F 762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

Institut. de ... Tehnică
BUCUREȘTI
... - CSERE
... - WYMIANA
... EHA

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

1-2

ANUL VIII

IANUARIE — IUNIE 1957

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Könyvtár
TULAJDONA

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

1-2

ANUL VIII

IANUARIE—IUNIE 1957

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Academician S. STOILOW — redactor responsabil; Academician G. VRĂNCEANU — redactor adjunct; Academician MIRON NICOLESCU; GH. MIHOC, membru corespondent al Academiei R.P.R.; N. TEODORESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.; T. GANEA; A. HALANAY

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul VIII, nr. 1—2 Ianuarie - iunie 1957

SUMAR

Pag.

D. BARBILIAN, Argumentul lui Euclid asupra infinităţii numerelor prime . 7

CONSTANTIN P. POPOVICI, Asupra unicităţii descompunerii în factori primi în inelele de întregi ai lui Dirichlet 73

EUGEN V. DOBRESCU, Contribuţii la o analiză infinitezimală bidimensională 103

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Relaţii integrale care caracterizează soluţiile unor ecuaţii cu derivate parţiale de ordin finit sau infinit 131

C. TELEMAN, O clasă specială de funcţii multiforme pe o suprafaţă riemanniană închisă 163

VIOREL DUMITRAŞ, Determinarea spaţiilor A_3 cu grup tranzitiv $\mathfrak{S}_7$. . . . 183

IVAN SINGER, Asupra unicităţii elementului de cea mai bună aproximaţie în spaţii Banach oarecare 235

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome VIII, nº 1–2 Janvier - juin 1957

SOMMAIRE

Page

D. BARBILIAN, L'argument d'Euclide pour l'infinité des nombres premiers 7

CONSTANTIN P. POPOVICI, Sur l'unicité de la décomposition en facteurs premiers dans les anneaux des entiers de Dirichlet 73

EUGEN D. DOBRESCU, Contribution à une analyse infinitésimale bidimensionnelle 103

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Relations intégrales caractérisant les solutions de certaines équations aux dérivées partielles, d'ordre fini ou infini 131

C. TELEMAN, Une classe de fonctions analytiques d'une surface de Riemann, généralisant les intégrales abéliennes 163

VIOREL DUMITRAŞ, Détermination des espaces A_3 à groupe $\mathfrak{G}_7$ 183

IVAN SINGER, Sur l'unicité de l'élément de meilleure approximation dans des espaces de Banach quelconques 135

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том VIII, № 1—2 Январь-июнь 1957

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Д. БАРБИЛИАН, Аргумент Евклида для бесконечности простых чисел . . 7

К. П. ПОПОВИЧ, Об однозначности разложения на простые множители в кольцах целых чисел Дирихле 73

Е. В. ДОБРЕСКУ, К вопросу о двумерном анализе 103

М. Н. РОШКУЛЕЦ, Интегральные соотношения, характеризующие решения некоторых уравнений с частными производными конечного или бесконечного порядка 131

К. ТЕЛЕМАН, Об одном классе аналитических функций на римановой поверхности, обобщающем абелевые интегралы 163

В. ДУМИТРАШ, Определение пространств A_3 с группой $\mathfrak{S}_7$ 183

И. ЗИНГЕР, О единственности элемента наилучшего приближения в любых банаховых пространствах 235

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VIII, nr. 1—2, 1957

ARGUMENTUL LUI EUCLID ASUPRA INFINITĂŢII NUMERELOR PRIME *)

DE

D. BARBILIAN

Modul lui Euclid de a conchide la infinitatea mulţimii numerelor prime, îndelung banalizat de învăţămîntul în clase, apare totuşi (regîndit, restituit momentului său originar) ca una din cele mai înaripate încorporări ale geniului elinesc.

Esenţial, concis şi fecund, acest raţionament aritmetic — altfel decît raţionamentele geometrilor vechi : succesive, greoaie, prin detaliarea tuturor cazurilor de figură; la fel, poate, cu unele apoftegme ale filozofilor sau unele versuri ale aezilor — închide pentru noi, într-o fracţiune de durată, întreg miracolul grec.

Puterea lui demonstrativă e departe de a fi istovită. Teoreme însemnate de aritmetică, a căror întemeiere în ipoteze cît mai generale, reclamă şi astăzi resursele analizei, se lasă stabilite algebric cîteodată chiar elementar) prin acţiunea acelui argument perenic, abia modernizat.

★

În nota de faţă dezvoltăm cîteva observaţii făcute cu ocazia unui curs introductiv de teoria numerelor şi avînd argumentul lui Euclid drept comună măsură.

Nota conţine :

§ 1. Transpunerea în necomutativ a teoremei relative la descompunerile în produse de elemente ireductibile din inelele cu element-unitate. Criterii suficiente de recunoaştere a infinităţii numerelor ireductibile în anumite inele necomutative cu element-unitate. Criterii suficiente de recunoaştere a infinităţii mulţimii idealelor prime din extinderile acelor inele.

§ 2. Izolarea nucleului algebric al teoremei analitice asupra infinităţii idealelor prime de grad 1 din corpurile de numere algebrice. Demonstraţia algebrică (cu ajutorul teoriei conductorului) a infinităţii idealelor prime de grad 1, din extinderile ciclice de grad prim l peste corpul numerelor raţionale. Restabilirea propoziţiei (fără teoria conductorului, dar

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 25 decembrie 1956.

cu teorema elementară a discriminantului corpurilor de numere pătratice) în cazul particular $l = 2$ (cazul corpurilor de numere pătratice).

§ 3. O demonstrare elementară, cu schematismul lui Euclid, a cazului special $p = nr + 1$ al teoremei lui Dirichlet asupra progresiei aritmetice. Rafinarea rezultatului. Redemonstrarea infinității idealelor prime de grad 1 din corpurile de numere pătratice, cu acest caz special al progresiei aritmetice plus legea reciprocității.

§ 4. Demonstrația algebrică a infinității idealelor prime de grad 2 din corpurile de numere pătratice de discriminant negativ arbitrar sau de discriminant d pozitiv, satisfăcînd la condițiile

$$d \equiv 0 \bmod 4, \frac{d}{4} \equiv -1 \bmod 4 \text{ } \textit{respectiv} \text{ } d \equiv 0 \bmod 8, \frac{d}{8} \equiv 1 \bmod 4,$$

cu ajutorul rafinării din § 3 a cazului special $p = nr + 1$ al teoremei progresiei aritmetice *respectiv* cu ajutorul demonstrației lui M. B a u e r [1], algebrice, a celuilalt caz special $p = nr - 1$ al aceleiași teoreme plus aplicarea legii reciprocității.

★

S-ar putea ca unele din demonstrațiile din § 3 și § 4, stabilite aici independent, să fie cunoscute, cu toate că în literatura pe care am consultat-o nu am găsit nimic asemănător. De altfel, nota pe care o publicăm are mai mult caracter metodologic.

Ținem să menționăm însă că schema demonstrației elementare a cazului special $p = nr + 1$ al progresiei aritmetice (§ 3), o datorăm unei comunicări orale a d. A. C h â t e l e t, pe care am avut plăcerea să-l cunoaștem la cel de-al 4-lea congres al matematicienilor din țara noastră.

Domnia sa afirmă că demonstrația ar aparține lui H i l b e r t. În primul volum (articolele de teoria numerelor plus așa-zisul Zahlbericht) al operelor complete ale acestuia, nu se găsește. E vorba, cred, mai de grabă de o variantă (foarte interesantă, în care argumentul lui Euclid apare într-un vestmînt neașteptat) a demonstrației algebrice a lui E. W e n d t [2], privitoare la același caz special al teoremei progresiei aritmetice, variantă a cărei paternitate e natural s-o atribuim, pînă la mai amplă informare, d. C h â t e l e t însuși.

Adăugăm că în zilele congresului de la București nu ne-am putut pune de acord cu d. C h â t e l e t asupra valabilității demonstrației sale care, într-un punct esențial, prezenta o anume lipsă (vezi § 3, 1°, nota din josul paginii). Această lipsă a putut fi împlinită cu ocazia redactării acestor pagini cum , desigur, va fi împlinit-o și d. C h â t e l e t, de partea sa, cînd va fi regîndit în liniște demonstrația.

În orice caz, informarea despre posibilitatea demonstrării complete*) a cazului $p = nr + 1$ al teoremei lui Dirichlet și comunicarea unei

*) Demonstrațiile lui V. A. L e b e s g u e s [3] și J. A. S e r r e t [4] privesc cazuri încă mai particulare, în care rația are o formă specială. Între timp P. E r d ö s și S. S e l b e r g [16] au demonstrat elementar complet (1948) teorema lui Dirichlet.

prime schițe a acelei demonstrații o datorez d. Châtelet, căruia îi aduc aici mulțumirile mele.

Fundarea elementară a cazului special $p = nr + 1$ al teoremei progresiei aritmetice începe să nu mai fie așa de cunoscută. Cărțile mai noi de Teoria Numerelor o ignoră. Astfel Hecke [5]*) preferă să demonstreze acest caz prin mijloace încă transcendente : teoria descompunerii numerelor prime în corpurile de numere ale diviziunii cercului plus teoria analitică a infinității idealelor prime de grad 1 în corpurile (generale) de numere algebrice.

Încît extinderea ce am dat-o în § 3 acestei probleme își găsește justificarea și din acest punct de vedere.

Nouă într-adevăr pare să fie materia din § 1, cu tipul de teoremă fundamentală necomutativă pe care îl propune.

§° 1. ARGUMENTUL LUI EUCLID ÎN INELELE ABSTRACTE

1° Elemente ireductibile și elemente prime. Raportul dintre ele

Fie O un semigrup (nu numaidecît comutativ, nu numaidecît înzestrat cu scurtare) înzestrat cu element-unitate.

Definiție. *Un element* $a \to O$ *se zice* ireductibil *cînd :*

1) *e diferit de o unitate și*

2) *nu se lasă descompus în produsul a două non-unități.*

Definiție. *Un element* $a \to O$ *se zice* prim la stînga *dacă*

1) *e diferit de o unitate și dacă*

2) *divizînd la stînga produsul a doi factori, divide la stînga cel puțin un factor. Adică, în semne,*

$$aa^* = bc$$

$$\therefore \quad b = ab^* \text{ respectiv } c = ac^*$$

Definiție duală, pentru elementele prime la dreapta.

În semigrupurile O generale cele două noțiuni nu stau în niciun raport de incluziune logică. Vom da însă, în cadrul inelelor, o construcție pentru O în care inplicația „ireductibil → prim la stînga" să se verifice.

Definiție. *Numim inel* subcomutativ *(la dreapta) un inel* Ω *în care*

$$\Omega \alpha \subset \alpha \Omega.$$

Dacă Ω are element-unitate, notăm această

Definiție echivalentă [6]**). *Inelele subcomutative la dreapta sînt inelele în care idealele stîngi și idealele bilaterale coincid.*

---

*) p. 127.

**) p. 40.

Definiție. *Un* subsemigrup *O al semigrupului multiplicativ din inelul cu element-unitate Ω, îl numim* uniform, *cînd orice descompunere a unui element $a \in O$ în Ω, are loc în O, adică*

$$a = bc, \qquad a \in O, \quad b, c \to \Omega,$$
$$\therefore b \to O, \qquad c \to O.$$

Exemplu.

Într-un inel Ω subcomutativ la dreapta, cu element-unitate, mulțimea O a tuturor nondivizorilor lui zero (a) la dreapta

$$\omega a = 0, \qquad a \in O, \ \omega \to \Omega$$
$$\therefore \omega = 0$$

formează un subsemigrup, uniform

Într-adevăr, O e un subsemigrup al semigrupului multiplicativ, deoarece din

$$\omega ab = 0, \qquad a, b \in O, \ \omega \to \Omega,$$

urmează, pe rînd,

$$\omega a = 0, \qquad \omega = 0.$$

Subsemigrupul e uniform. Într-adevăr, fie

$$a = bc, \qquad a \in O, \ b, c \to \Omega.$$

Din

$$\omega b = 0, \qquad \omega \to \Omega, \tag{1}$$

avem succesiv

$$\omega bc = 0, \qquad \omega a = 0, \ \omega = 0. \tag{1'}$$

Însă Ω e subcomutativ la dreapta. Ca atare

$$a = bc = cd, \qquad c \to \Omega, \qquad d \to \Omega.$$

Prin urmare, întocmai ca mai sus, din

$$\omega c = 0, \tag{2}$$

rezultă

$$\omega cd = 0, \ \omega a = 0, \ \omega = 0. \tag{2'}$$

Citim pe (1), (1') și (2), (2'),

$$b \to O, \qquad c \to O,$$

așadar, O e uniform.

Sîntem acum în măsură să dăm analogonul necomutativ al implicațiilor logice (banale) din inelele cu ideal principal, între „ireductibil" și „prim".

Teorema 1. *Într-un inel* Ω *subcomutativ la dreapta, cu element-unitate, în care toate idealele stîngi care au cel puțin un element comun cu un subsemigrup uniform* O *sînt principale, implicația*

$$\textit{ireductibil} \rightarrow \textit{prim la stînga},$$

pentru elemente, e construită în O.

Demonstrație. Fie elementul a ireductibil în O, dar altfel arbitrar. Presupunem că a divide la stînga un produs de două elemente din O,

$$aa^* = bc, \qquad a,\ a^*,\ b,\ c \rightarrow O. \tag{3}$$

Considerăm idealul stîng principial $a\Omega$.

Presupunem

$$a\Omega = \Omega. \tag{4}$$

Cum $b,\ c \rightarrow \Omega$, avem evident

$$b = ab^*, \qquad c = ac^*. \tag{5}$$

Aici, în virtutea lui $b,\ c \rightarrow O$ și a uniformității lui O, urmează

$$b^* \rightarrow O, \qquad c^* \rightarrow O. \tag{5'}$$

Presupunem, complementar lui (4),

$$a\Omega < \Omega. \tag{6}$$

Avem în $a\Omega$, potrivit subcomutativității, un ideal bilateral. Afirmăm că e nedivizibil față de inserțiunea în intervalul (6), de ideale bilaterale.

Fie, dimpotrivă,

$$a\Omega < I < \Omega \tag{7}$$

cu I ideal bilateral. Cum Ω are element-unitate, citim că I conține elementul $a \rightarrow O$. Conform identității menționate între idealele bilaterale și idealele stîngi, putem scrie în virtutea ipotezei din enunț,

$$I = \mu\Omega, \qquad \mu \rightarrow \Omega. \tag{8}$$

Din (7) și (8) rezultă

$$a = \mu\nu, \qquad \nu \rightarrow \Omega. \tag{9}$$

Dar a aparține semigrupului uniform O. Ca atare

$$\mu \rightarrow O, \quad \nu \rightarrow O.$$

Să facem să intervină ipoteza că a e ireductibil în O.

Din definiția subsemigrupului uniform, reiese că toate unitățile lui Ω sînt în O. Reciproc, orice unitate a lui O e unitate a lui Ω (deoarece are un invers față de același element-unitate).

Citim atunci pe (9) că unul din factorii μ, ν e sigur unitate în O și deci în Ω.

Dar μ nu poate fi unitate, deoarece ar urma

$$I = \mu\Omega = \Omega,$$

contrar lui (7). De asemenea, ν nu poate fi unitate întrucît am avea

$$a\Omega = \mu\nu\Omega = \mu\Omega = I,$$

contrar lui (7).

E deci dovedit că idealul bilateral $a\Omega$ din (6) e nedivizibil față de inserțiunea de ideale bilaterale.

În aceste condiții se știe [6]*) că $a\Omega$ divide, o dată cu produsul a două ideale bilaterale, cel puțin un factor.

Considerăm atunci același produs (3) de două elemente din O, divizat la stînga de a, dar altfel arbitrar.

Avem, în virtutea subcomutativității lui Ω

$$b\Omega c\Omega \subset bc\Omega^2 = aa^*\Omega^2,$$

deci

$$b\Omega c\Omega \subset a\Omega.$$

Ca atare conchidem

$$\text{sau} \quad b\Omega \subset a\Omega \quad \text{sau} \quad c\Omega \subset a\Omega,$$

de unde urmează una sau alta din diviziunile elementare

$$b = ab^* \quad \text{respectiv} \quad c = ac^*, \tag{10}$$

cu $b^*, c^* \to \Omega$ și, pînă la urmă, datorită uniformității lui O,

$$b^* \to O \quad \text{respectiv} \quad c^* \to O. \tag{10'}$$

Comparînd (3) cu (5), (5') și (10), (10'), recunoaștem în a un element prim la stînga.

Cu aceasta totul e demonstrat.

A doua teoremă privitoare la implicația logică inversă are mai puțină importanță pentru noi. Ea e independentă de încorporarea semigrupului O într-un inel.

Teorema 2. *În semigrupurile O subcomutative la dreapta, cu element-unitate, în care grupul E al unităților e subpermutabil la stînga*

$$aE \subset Ea, \qquad a \in O, \tag{11}$$

orice element prim la stînga, cu scurtare bilaterală, e ireductibil.

Demonstrație. Fie p un element prim la stînga. Teorema e demonstrată dacă putem arăta că p nu admite nici o reprezentare

$$p = bc \tag{12}$$

cu b, c nonunități.

Presupunem , prin absurd, existența unei reprezentări de felul (12).

*) p. 198.

Conform definiției elementelor prime la stînga, din (12) conchidem la una sau alta din relațiile

$$b = pb^* \tag{13}$$

$$c = pc^*. \tag{14}$$

În eventualitatea (13) avem, din (12)

$$p = pb^*c$$

$$\therefore 1 = b^*c = cb^{**},$$

căci O e subcomutativ la dreapta. Ultima relație arată că elementul c este o unitate, împotriva ipotezei raționamentului prin absurd.

În eventualitatea (14), subcomutativitatea la dreapta a lui O ne dă

$$bp = pb'. \tag{15}$$

Introducînd (14) în (12) și ținînd seama de (15) putem scrie, pe rînd,

$$p = pb'c^*$$

$$\therefore 1 = b'c^* = c^*b''.$$

Ultima relație arată că c^* e o unitate. În virtutea lui $1 = b'c^*$, avem în b', de asemenea, o unitate. Conform lui (11) rezultă

$$pb' = \eta p,$$

$$\eta \to E. \tag{15'}$$

Din relațiile (15) și (15'), ținînd seama de proprietatea scurtării bilaterale a lui p, avem

$$bp = \eta p$$

$$\therefore b = \eta, \qquad \eta \to E,$$

împotriva ipotezei raționamentului prin absurd, că b este o nonunitate.

Rămîne indirect dovedit că p e ireductibil.

Teorema e deci demonstrată*).

Să căutăm acum un cadru comun celor două implicații pentru o teoremă de echivalare.

Presupunem că semigrupul O din teorema 1 e cel construit în exemplul imediat precedent. Dacă postulăm în Ω bilateralitatea nondivizorilor (sau, ceea ce e totuna, a divizorilor) lui zero și subpermutabilitatea lui E la stînga, cu orice nondivizor al lui zero, cadrul teoremei 2 e dat în cadrul teoremei 1.

Într-adevăr, O are acum scurtare bilaterală iar (11) e postulat. Rămîne să ne asigurăm că O e subcomutativ la dreapta.

*) Din demonstrație, rezultă că subpermutabilitatea (11) trebuie cerută numai elementelor prime la stînga. Notăm iarăși că, fără (11), poate fi demonstrată implicația: „prim la dreapta → ireductibil".

În baza subcomutativității la dreapta a lui Ω, avem

$$ca = a\delta, \qquad a,c\xi O, \quad \delta \to \Omega.$$

Dar O e uniform, așadar $\delta = d \to O$. Deci

$$Oa \subset aO,$$

încît putem enunța următoarea

Teoremă de echivalare. *Fie Ω un inel cu element-unitate, subcomutativ la dreapta, cu divizori ai lui zero bilaterali.*

Dacă idealele stîngi ale lui Ω conținătoare de cel puțin un nondivizor al lui zero sînt principale și dacă grupul E al unităților e subpermutabil la stînga cu fiecare nondivizor al lui zero, atunci echivalența

$$ireductibil \sim prim\ la\ stînga$$

e construită pentru elementele subsemigrupului nondivizorilor lui zero.

În cele ce urmează, singură teorema 1, a primei implicații, va fi utilizată. Totuși semnalăm teorema de echivalare de mai sus, ca generalizarea, destul de departe împinsă, a teoremei de echivalență din inelele cu ideal principal.

Obținem un enunț mai neted dacă presupunem inelul Ω înzestrat cu o normă, număr real, multiplicativă astfel încît valorile nenule, *respectiv* valoarea 1, să caracterizeze nondivizorii lui zero, *respectiv* unitățile.

Într-un astfel de inel subcomutativ la dreapta, în care idealele stîngi conținătoare de cel puțin un nondivizor al lui zero sînt principale, echivalența celor două noțiuni e construită pentru semigrupul nondivizorilor lui zero.

2° Teorema fundamentală elementară în necomutativ

Definiție. *Într-un semigrup O cu element-unitate un element a'' se zice* divizor veritabil *al lui a' cînd avem una sau alta din relațiile*

$$a' = ba'' \text{ respectiv } a' = a''b$$

cu b nonunitate.

Diviziunea definită ca mai sus (fără specificarea direcției stîngă sau dreaptă în care se exercitează) nu e tranzitivă. Ne vom feri să vorbim de lanțuri (Ketten, Rheien). Vom vorbi numai de *succesiuni* (Folgen) de divizori.

Definiție. *O juxtapunere de elemente ale semigrupului cu element-unitate O*

$$a_1 / a_2 / \ldots \quad a_n / \ldots$$

în care a_{n+1} e divizor veritabil al lui a_n o numim succesiune de divizori.

Ipoteza. *Limitarea pentru succesiunile de divizori.* Dacă în semigrupul O cu element-unitate toate succesiunile de divizori se rup în finit, zicem că *semigrupul e cu limitare pentru succesiunile de divizori.*

Teorema de existență. *Într-un semigrup O cu element-unitate și limitare pentru succesiunile de divizori, orice element diferit de o unitate admite o reprezentare ca produs finit de elemente ireductibile.*

Demonstrație. În cazul comutativ teorema de mai sus e clasică. În cazul general, demonstrația urmează aceeași schemă (inducția față de divizori). Detaliul e însă modificat prin dualizarea noțiunii de divizor, fără de care, cum ne putem ușor da seama, inducția nu funcționează.

Enunțul presupune tacit că avem de a face cu un semigrup veritabil și nu cu un grup. Prin urmare, mulțimea A a nonunităților e nedeșartă.

Să presupunem, prin absurd, că ar exista un element

$$a \to A$$

ce s-ar sustrage proprietății din enunț.

În acest caz a e sigur reductibil (un număr ireductibil e un produs de dimensiune finită, anume 1, de elemente ireductibile și ca atare ascultă de proprietatea din enunț). Avem deci

$$a = a_1' \, a_1'', \qquad a_1^i \to A, \ (i = 1, \ 2). \tag{1}$$

Nu amîndouă numerele a_1^i satisfac la proprietatea din enunț. Altfel, introducînd în (1) descompunerile în factori ireductibili ale lui a_1' și a_1'', obținem pentru a o reprezentare ca produs finit de factori ireductibili, împotriva ipotezei raționamentului prin absurd.

Fie deci $a_1^{i_1}$ acela din factorii a_1^i care se sustrage sigur proprietății din enunț. E clar că $a_1^{i_1}$ e un divizor (la stînga sau la dreapta) veritabil al lui a, deoarece cîtul (celălalt factor) este o nonunitate. Încît putem scrie

$$a \,/\, a_1^{i_1}.$$

Elementul $a_1^{i_1}$ poate prelua, în raționamentul de mai sus, rolul lui a. Conchidem la existența unui divizor veritabil $a_2^{i_2}$ al lui $a_1^{i_1}$, ce se sustrage proprietății din enunț. Așadar putem mai departe scrie

$$a \,/\, a_1^{i_1} \,/\, a_2^{i_2}.$$

Iterînd, ia naștere succesiunea infinită de divizori

$$a \,/\, a_1^{i_1} \,/\, a_2^{i_2} \,/ \ldots \, a_n^{i_n} \,/ \ldots,$$

împotriva ipotezei limitării succesiunilor de divizori din O.

Rămîne dovedit, indirect, că orice nonunitate din O admite proprietatea din enunț, cu alte cuvinte se lasă descompusă în produs finit de factori ireductibili.

Consecință imediată. Orice nonunitate admite un divizor ireductibil la dreapta și un divizor ireductibil la stînga (primul și ultimul factor al descompunerii).

De la această teoremă de existență, întărind cadrul, trecem la teorema fundamentală necomutativă, care instruiește de invarianții diverselor descompuneri ale aceluiași element. Avem nevoie de cîteva noțiuni.

D e f i n i ț i e. *Fie* $p_1\ p_2 \ldots p_m$ *un produs eventual necomutativ de nonunități. Însemnăm cu* $[p]$ *mulțimea claselor de asociere la dreapta* $p\varepsilon$, $\varepsilon \in E$ *ale diverșilor factori (fiecare clasă e luată o singură dată).*

Mulțimea de clase $[p]$ *o numim* n u c l e u l *produsului. Ordinul mulțimii* $[p]$, d i m e n s i u n e a n u c l e a r ă *a produsului.*

T e o r e m a f u n d a m e n t a l ă n e c o m u t a t i v ă. *Fie* O *un semigrup cu element-unitate, subcomutativ la dreapta, satisfăcînd la ipoteza limitării pentru divizori și la implicația „ireductibil → prim la stînga" pentru elemente.*

În aceste condiții orice nonunitate din O *admite descompuneri în produs de factori ireductibili, de nucleu unic determinat.*

Demonstrație. Posibilitatea a cel puțin unei descompuneri pentru o nonunitate a a lui O derivă din teorema de existență de mai sus, ale cărei toate ipoteze sînt evident realizate aici.

Fie atunci

$$p_1 p_2 \cdots p_m = q_1 q_2 \cdots q_n \tag{2}$$

două descompuneri în factori ireductibili, dar altfel arbitrare, ale lui a.

Considerăm un factor arbitrar p_i al primului produs. Pentru $i > 1$ avem, folosind subcomutativitatea la dreapta,

$$p_1 \cdots p_{i-1} p_i = p_i p', \qquad p' \to O$$

$$\therefore\ p_1 p_2 \cdots p_m = p_i p^*$$

relație banal satisfăcută și în cazul $i = 1$, lăsat la o parte. Cu aceasta relația (2) devine

$$p_i p^* = q_1 q_2 \cdots q_n . \tag{3}$$

Prin ipoteză, elementul ireductibil p_i este prim la stînga. Citim pe (3) că produsul din membrul al doilea e divizibil la stînga prin p_i. Încît, în virtutea definiției elementelor prime la stînga, din aproape în aproape, găsim un factor q_j divizibil la stînga prin p_i,

$$q_j = p_i q^* . \tag{4}$$

Însă q_j e ireductibil. Conform definiției, p_i e diferit de o unitate. Deci, obligatoriu, q^* este o unitate.

Relația (4) exprimă că p_i și q_j fac parte din aceeași clasă de asociere la dreapta.

Dacă însemnăm cu $[p]$ și $[q]$ nucleele celor două produse din (2), rezultă în definitiv

$$[p] \subset [q].$$

Dar, schimbînd rolurile celor două produse, rezultă și implicația contrară. Conchidem

$$[p] = [q].$$

Cu aceasta teorema e demonstrată.

Să introducem o nouă

I p o t e z ă. *Scurtarea la stînga.*

Egalitățile de produse de factori ireductibili din O pot fi scurtate de un factor comun la stînga

$$aa_1a_2 \ldots a_h = aa'a'' \ldots a^{(k)},$$

$$\therefore a_1a_2 \ldots a_h = a'a'' \ldots a^{(k)}.$$

L e m m ă. În ipotezele teoremei precedente, plus ipoteza scurtării la stînga, produsele formate cu doi factori ireductibili aparțin aceleiași clase de asociere la dreapta

$$ab = ba\varepsilon, \qquad \varepsilon \to E,$$

unde E înseamnă grupul unităților din O.

Demonstrație. Presupunem mai întîi a, b asociate la dreapta

$$a = b\eta, \qquad \eta \to E.$$

Aplicarea subcomutativității ne dă

$$\eta b = b\zeta,$$

$$\therefore b = \eta^{-1}b\zeta.$$

Dar b e ireductibil. Ca atare sau $\eta^{-1}b$ sau ζ e o unitate. Prima eventualitate nu intervine, deoarece ar urma $b \to E$, ceea ce e exclus. Conchidem

$$\zeta \to E.$$

În definitiv

$$\eta b = b\eta\varepsilon, \qquad \varepsilon = \eta^{-1}\zeta \to E,$$

$$\therefore b\eta b = bb\eta\varepsilon,$$

$$\therefore ab = ba\varepsilon, \qquad \varepsilon \to E.$$

Presupunem acum a, b neasociate la dreapta.

Aplicarea subcomutativității ne dă

$$ab = bc.$$

Prin ipoteză, numărul ireductibil a e prim la stînga, deci divide la stînga sau pe b sau pe c.

Nu putem avea $b = a\theta$, deoarece b fiind ireductibil iar a o nonunitate, ar urma $\theta \to E$, împotriva faptului că a, b sînt neasociați la dreapta.

Deci, obligatoriu,

$$c = a\varepsilon,$$

și ca atare, din formula penultimă

$$ab = ba\varepsilon.$$

Rămîne de arătat că $\varepsilon \to E$.

Aplicarea subcomutativității ne dă

$$ba = ad.$$

Aici d este o nonunitate. Altfel, nucleul primului membru ar conține două clase distincte, pe cînd nucleul celui de-al doilea membru ar conține o singură clasă, împotriva teoremei fundamentale, necomutative, de mai sus.

Introducînd ultima expresie în penultima obținem

$$ab = ad\varepsilon,$$

iar prin scurtare la stînga cu a,

$$b = d\varepsilon,$$

cu d nonunitate.

Dar b e ireductibil. Conchidem

$$\varepsilon \to E.$$

Cu aceasta totul e demonstrat.

Teorema fundamentală completă. *Într-un semigrup O cu element-unitate, subcomutativ la dreapta, satisfăcînd la ipotezele*

1. *limitare pentru divizori,*
2. *prim la stînga $\to$ ireductibil,*
3. *scurtare la stînga,*

orice element $n \in O$ admite o descompunere în produs finit de factori ireductibili, unic determinat, pînă la ordinea factorilor și asocieri la dreapta (a posteriori *asocieri bilaterale*).

Demonstrație. Schema demonstrației este cea clasică, cu mici modificări.

În virtutea lui 1, existența a cel puțin unei descompuneri de felul celei din enunț, pentru n, e asigurată.

Fie

$$a_1 a_2 \ldots a_r = b_1 b_2 \ldots b_s$$

$$r \leqslant s$$

două astfel de descompuneri ale lui n.

Operăm inducție asupra indicelui r, cu $s \geqslant r$ dar altfel arbitrar.

Fie $r = 1$. Egalitatea devine

$$a_1 = b_1 b_2 \ldots b_s.$$

Nu putem lua $s > 1$. Altfel, numărul ireductibil a_1 s-ar descompune în produsul a două nonunități

$$a_1 = b_1 \ (b_2 \ldots b_s).$$

Avem deci

$$a_1 = b_1.$$

Teorema se verifică așadar pentru $r = 1$.

Presupunem teorema adevărată pentru toți $r^* < r$.

Să arătăm că se verifică și pentru r.

Potrivit teoremei fundamentale necomutative, există un factor b_i asociat la dreapta cu a_1,

$$b_i = a_1 \varepsilon,$$

sau încă

$$b_i \sim a_1 .$$

Introducem această expresie în membrul al doilea al egalității date și permutăm la stînga pe a_1, pe rînd, cu $b_{i-1}, b_{i-2}, \ldots, b_1$. Conform lemmei, factorii $b_j^* (j < i)$ obținuți după permutare aparțin aceleiași clase de asociere ca și factorii inițiali $b_j (j < 1)$,

$$b_j^* \backsim b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, i-1.$$

În definitiv,

$$a_1 a_2 \ldots a_r = a_1 b_1^* b_2^* \ldots b_{i-1}^* \varepsilon b_{i+1} b_{i+2} \ldots b_s,$$

sau scurtînd cu a_1

$$a_2 a_3 \ldots a_r = b_1^* b_2^* \ldots b_{i-2}^* (b_{i-1}^* \varepsilon) b_{i+1} b_{i+2} \ldots b_s.$$

Aplicînd ipoteza inductivă (ceea ce e permis, întrucît primul membru are dimensiunea $r-1 < r$ iar cei $s-1$ factori din membrul al doilea sînt ireductibili) obținem

$$r-1 = s-1,$$

iar apoi, mai puțin ordinea echivalenței,

$$(a_2, a_3, \ldots, a_r) \backsim (b_1^*, b_2^*, \ldots, b_{i-2}^*, b_{i-1}^* \varepsilon, b_{i+1}, \ldots, b_r)$$

$$\therefore (a_2, a_3, \ldots, a_r) \backsim (b_1, b_2, \ldots, b_{i-2}, b_{i-1}^*, b_{i+1}, \ldots, b_r)$$

$$\therefore (a_2, a_3, \ldots, a_r) \backsim (b_1, b_2, \ldots, b_{i-2}, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_r)$$

$$\therefore (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r) \backsim (b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \ldots, b_r).$$

Astfel teorema e demonstrată prin inducție.

Observație importantă. Cu ajutorul teoremei de existență, cu ajutorul lemmei și proprietății $E\rho \subset \rho E$, ρ = ireductibil, ușor de demonstrat (consecință a subcomutativității și a ireductibilității lui $\varepsilon\rho$), se recunoaște a posteriori, că subcomutativitatea semigrupului O din teorema de mai sus e specială. Avem anume

$$mn = nm\varepsilon, \qquad m, n \in O, \quad \varepsilon \to E.$$

Pe de altă parte, în ipoteza $aE \subset Ea$, $a \in O$ rezultă și

$$mn = \varepsilon' nm.$$

Tot de aici reiese că asocierile la dreapta sînt, în cadrul de față, chiar asocieri bilaterale.

Teorema fundamentală necomutativă, construită. *Fie* Ω *un inel subcomutativ la dreapta, cu element-unitate și toate idealele stîngi, conținătoare de cel puțin un nondivizor bilateral al lui zero, principale.*

Dacă grupul unităților E *din* Ω *e subpermutabil la stînga cu orice nondivizor bilateral* a,

$$aE \subset Ea,$$

atunci, în semigrupul O *al nondivizorilor bilaterali ai lui zero, fiecare element diferit de o unitate admite descompuneri în produse finite de factori ireductibili, unic determinate, pînă la ordinea factorilor și asocieri la dreapta.*

Demonstrație. Să arătăm că O verifică toate ipotezele teoremei fundamentale, complete, precedente.

Însemnăm cu b un divizor veritabil stîng, *respectiv* drept, al nonunității a din O. Avem

$$a = b\lambda \tag{5}$$

respectiv

$$a = \mu b \tag{6}$$

cu λ, *respectiv* μ, nonunități.

În eventualitatea (5) rezultă

$$a \to b\Omega,$$

$$a\Omega \subset b\Omega. \tag{7}$$

Nu putem lua în (7) semnul egal. Altfel ar urma $b \to a\Omega$, adică

$$b = a\lambda', \qquad \lambda' \to \Omega. \tag{8}$$

Din (5) și (8) ar rezulta, aplicînd subcomutativitatea,

$$a = a\lambda'\lambda = a\lambda\lambda'', \quad \lambda'' \to \Omega,$$

sau, scurtînd cu a,

$$1 = \lambda'\lambda = \lambda\lambda''.$$

Citim pe aceste relații că λ e o unitate, împotriva ipotezei că b e divizor veritabil în (5). Ca atare, în (7) avem incluziune tare,

$$a\Omega < b\Omega. \tag{9}$$

În eventualitatea (6), aplicînd subcomutativitatea, rezultă

$$a = \mu b = b\nu, \qquad \nu \to \Omega, \tag{10}$$

$$\therefore a\Omega \subset b\Omega. \tag{11}$$

Dacă luăm în (11) semnul egal, deducem pe rînd

$$b = a\nu', \qquad \nu' \to \Omega,$$

$$a = a\nu'\nu = a\,\nu\nu'', \qquad \nu'' \to \Omega,$$

$$1 = \nu'\nu = \nu\,\nu''.$$

Așadar, ν ar fi o unitate. Aplicînd atunci subpermutabilitatea stîngă a grupului E al unităților, putem scrie

$$b\nu = \varepsilon b, \qquad \varepsilon \to E,$$

deoarece b din (5) aparține semigrupului uniform O (vezi 1°).

Comparînd cu (10) obținem

$$\mu b = \varepsilon b, \qquad b \to O,$$

$$\therefore \mu = \varepsilon$$

împotriva ipotezei că b e divizor veritabil în (6).

E deci dovedit indirect că în (11) întocmai ca în (9), avem incluziune strictă,

$$a\Omega < b\Omega. \tag{9'}$$

Așa fiind, să considerăm o *succesiune de divizori* din O,

$$a_1/a_2/\cdots a_i/\cdots \tag{12}$$

Conform lui (9) și (9'), oricare ar fi direcția diviziunii, putem asocia acestei succesiuni de divizori, lanțul veritabil ascendent de ideale stîngi

$$a_1\Omega < a_2\Omega < \cdots a_i\Omega < \cdots \tag{13}$$

Dar, prin ipoteză, Ω e cu bază finită pentru idealele stîngi conținătoare de nondivizori bilaterali ai lui zero. Avem în (13) un astfel de lanț. Deci, potrivit unei teoreme cunoscute, lanțul se rupe în finit, încît succesiunea de divizori (12) nu poate continua indefinit.

E dovedit că semigrupul O satisface la ipoteza limitării succesiunilor de divizori.

Pe de altă parte (vezi 1°), orice subsemigrup multiplicativ uniform O al inelului Ω cu element-unitate, subcomutativ la dreapta, e el însuși cu element-unitate și subcomutativ la dreapta.

Ținînd seama de acestea, implicația „ireductibil → prim la stînga" e construită pentru elementele din O, deoarece toate cererile teoremei 1 din 1° sînt împlinite.

În sfîrșit e clar, că avem în O scurtare la stînga.

Avem întrunite toate condițiile teoremei fundamentale complete de mai sus. Ca atare, în semigrupul O al nondivizorilor bilaterali ai lui zero din Ω, orice element diferit de o unitate admite descompuneri în produse de cîte un număr finit de factori ireductibili, unic determinate, pînă la ordinea factorilor și asocieri la dreapta.

Observație. Teorema fundamentală clasică se obține postulînd comutativitatea lui O.

Dar prin aceasta teorema devine banală, prin lunga noastră familiaritate cu acest tip de descompuneri. În schimb, teorema de mai sus e nebanală și poate fi socotită ca un adaos elementar la cercetările ideal-teoretice, necomutative, din [6]. Trimitem însă la observația precedentă.

3° Analiza argumentului lui Euclid

Pentru mai multă claritate, reproducem demonstrația lui Euclid a infinității numerelor prime din inelul C al întregilor raționali, orientînd-o către generalizările pe care le avem în vedere.

În virtutea teoremelor cunoscute asupra inelelor cu ideal principal (sau, încă, prin particularizarea teoremei de echivalare din 1°), numerele ireductibile și numerele prime din C coincid. Vom vorbi deci de numere ireductibile.

Să presupunem deci, prin absurd, că mulțimea numerelor ireductibile din C ar fi deșartă sau finită. În acest din urmă caz, datorită ordonării de inel a lui C, numerele ireductibile apar grupate în perechi asociate $p_i > 0$, $-p_i < 0$, diferind numai prin semn. Ne mărginim la cele pozitive,

$$p_1, p_2, \cdots, p_N, \tag{1}$$

$$p_i > 0 \qquad (i = 1,2, \cdots, N). \tag{1'}$$

Formăm produsul

$$\pi = p_1 \, p_2 \cdots p_N$$

$$\therefore \pi > 0, \tag{1''}$$

pe care-l declarăm egal cu 1 în cazul unei mulțimi (1) deșarte.

Introducem numărul

$$a = \pi + 1 \tag{2}$$

care, în virtutea lui (1'') și a ordonării de inel, conduce la inegalitățile

$$-1 < 1 < a,$$

unde -1, $+1$ sînt singurele unități ale lui C.

Dar un număr din C diferit de o unitate admite un divizor ireductibil. Acesta e cazul lui a.

Dacă mulțimea (1) e deșartă, contrazicerea e evidentă.

Dacă nu e deșartă, numărul a se divide cu un număr ireductibil al cărui asociat pozitiv p_i face parte din mulțimea (1). Profitînd de comutativitatea lui C putem scrie

$$\pi = p_i \pi^*, \quad a = p_i a^*.$$

Cu aceasta (2) devine

$$p_i (a^* - \pi^*) = 1,$$

relație care exprimă că p_i este o unitate, împotriva definiției numerelor ireductibile.

E deci indirect dovedit că inelul C conține o infinitate de numere ireductibile.

Demonstrația de mai sus, față de demonstrația în forma ei concisă, originară, poate să apară întrucîtva pedantă. Ea are avantajul că face parcurgem străvezie armătura axiomatică a teoremei.

Apare clar că au fost folosite numai următoarele trăsături abstracte ale lui C :

1) Existența elementului-unitate și comutativitatea (sau chiar numai subcomutativitatea la dreapta).

2) Ordonare de inel.

3) Minimalitatea grupului unităților (redus la $+1$ și -1).

4) Existența unui divizor ireductibil (la stînga) pentru orice număr diferit de o unitate.

Cererea 2) poate fi încă slăbită, cum vom vedea în alineatele viitoare. Una din consecințele ei, sub care o vom reține în generalizările noastre, este integritatea lui C (sau încă, mai puțin : calitatea de nondivizori ai lui zero a numerelor ireductibile).

Credem că e interesantă prin ea însăși următoarea proprietate, ușor de stabilit :

Un inel C (eventual necomutativ, eventual fără element-unitate) *ordonat, e fără divizori ai lui zero.*

Într-adevăr, să admitem că ar exista un divizor al lui zero a, de exemplu la dreapta,

$$ab = 0, \tag{3}$$

$$a \neq 0, \qquad b \neq 0. \tag{4}$$

Însemnăm cu ε sau η una sau alta din operațiile : identitatea sau luarea inversului aditiv în C (amîndouă permutabilele cu înmulțirea).

În virtutea lui (4) și a ordonării de inel, putem dispune de ε și η astfel încît

$$\varepsilon a > 0, \qquad \eta b > 0$$

$$\therefore \varepsilon a \eta b > 0. \tag{5}$$

Avem însă pe rînd, folosind relația (3),

$$\eta a b = 0$$

$$\therefore a \cdot \eta b = 0$$

$$\therefore \varepsilon a \cdot \eta b = 0$$

împotriva lui (5).

Ca atare, rămîne demonstrat prin absurd că inelul C e fără divizori ai lui zero.

Altă consecință a cererii 2), valoarea nulă a caracteristicii, o neglijăm, întrucît e introdusă, sub formă ceva mai largă, de cererea 3) însăși. În această privință demonstrăm următoarea lemmă, pe care o vom folosi mai tîrziu.

L e m m ă. *Minimalitatea grupului unităților* (*reducerea lui, la* $+1$ *și* -1) *e conciliabilă numai cu caracteristicile* $n = 0, 2, 3, 4, 6$ *ale unui inel.*

Demonstrație. Cazul inelului C al întregilor raționali sau, mai general, al unor inele de întregi algebrici și a inelelor de polinoame construite peste acestea, arată că minimalitatea grupului unităților se conciliază cu caracteristica $n = 0$.

Presupunem $n \neq 0$ (chiar $n > 1$, excluzînd cazul inelelor nule). Inelul Ω conține inelul caracteristic izomorf cu inelul factor $C/(n)$. Acesta din urmă are, cum se știe, $\varphi(n)$ unități. Deci, o condiție necesară este $\varphi(n) \leqslant 2$.

Punînd $n = q_1^{r_1} q_2^{r_2} \cdots q_k^{r_k}$ pentru descompunerea canonică în factori primi a lui n, avem

$$\varphi(n) = q_1^{r_1-1} q_2^{r_2-1} \cdots q_k^{r_k-1} (q_1 - 1)(q_2 - 1) \cdots (q_k - 1).$$

Deci $\varphi(n) \leqslant 2$ impune $q_i \leqslant 3$ și anume : pentru $k = 1, \cdots q_1 = 2, r_1 = 1,2$ și $q_1 = 3, r_1 = 1$; pentru $k = 2, \cdots q_1 = 2, q_2 = 3, r_1 = 1, r_2 = 1$.

Avem, în definitiv,

$$n = 2, 3, 4, 6,$$

deoarece $\varphi(n) \leqslant 2$ impune $k \leqslant 2$.

Aceste valori necesare ale caracteristicei sînt și admisiblie, întrucît inelele de polinoame construite peste $\frac{C}{(n)}$ în aceste patru cazuri au, într-adevăr, un grup minimal de unități (redus la $+1$ sau la $+1, -1$).

Încît cercetarea noastră se schițează astfel :

Cercetarea cazului caracteristicii $n = 0$, în care chestiunea infinității numerelor ireductibile și chiar a idealelor prime e o consecință imediată a infinității numerelor ireductibile în inelul caracteristic C.

Cercetarea cazului caracteristicilor $n = 2, 3, 4, 6$, în care, numai cu axiomele 1) $+3)$ $+4)$ de mai sus, infinitatea numerelor ireductibile poate fi demonstrată fără referire la teorema fundamentală.

Cercetarea cazului general al unei caracteristici $n > 1$, cu folosirea unei forme foarte slabe a teoremei fundamentale.

4° Infinitatea idealelor prime tari în anume inele cu element-unitate, de caracteristică nulă, și limitare maximală pentru idealele bilaterale

Fie Ω un inel, eventual necomutativ, cu element-unitate, de caracteristică nulă. El conține inelul C al întregilor raționali. Însemnăm cu $[p]$ o mulțime infinită de numere prime din C. Existența unei astfel de mulțimi e garantată de teorema lui Euclid. Însemnăm cu Γ inelul cîturilor lui C în raport cu semigrupul multiplicativ Σ generat de mulțimea numerelor prime $\{p\}$ complementară lui $[p]$. Dacă $[p]$ epuizează mulțimea tuturor întregilor primi raționali, prin convenție luăm $\{p\} = 1$.

Definiție. *Zicem că inelul Ω este unitar, relativ la mulțimea infinită de numere prime $[p]$, cînd*

$$\Omega \cap R = \Gamma,$$

unde R e corpul numerelor raționale.

Teoremă. *Fie Ω un inel cu element-unitate, de caracteristică nulă, unitar relativ la mulțimea infinită de numere prime raționale $[p]$. Presu-*

punem că Ω *este cu limitare maximală pentru idealele bilaterale conținătoare de întregi raționali nenuli.*

În acest caz, Ω *admite o infinitate de ideale prime-tari**). *Dacă* $\mathfrak{M}_p$ *este mulțimea tuturor idealelor prime-tari care divid întregul prim* $p \in [p]$, *aceste mulțimi sînt disjuncte și suma lor carteziană coincide cu totalitatea idealelor prime* $[P]$, *conținătoare de întregi raționali, din* Ω.

Demonstrație. Fie $\Omega p = (p)$ idealul principal generat de $p \in [p]$. Cum p aparține centrului lui Ω, avem în (p) un ideal bilateral conținător de un întreg rațional nenul.

Avem

$$(p) < \Omega,$$

altfel inversul $\frac{1}{p}$ al lui (p) s-ar găsi în Ω, deci în $\Omega \cap R = \Gamma$. Dar numerele lui Γ, prin definiție, au numitorii în mulțimea complementară $\{p\}$ a lui $[p]$.

În virtutea limitării maximale din enunț, există un ideal bilateral nedivizibil N care divide pe (p),

$$(p) \subset N < \Omega.$$

Se demonstrează însă [6]**) că un ideal bilateral nedivizibil (conținător de un întreg rațional nenul) este un ideal prim-tare, adică un ideal bilateral care o dată cu orice produs divizat de două ideale bilaterale, divide unul din factori.

Conchidem că mulțimea $\mathfrak{M}_p$ a idealelor prime-tari ce divid întregul prim $p \in [p]$ nu e deșartă.

Aceste mulțimi $\mathfrak{M}_p$ sînt disjuncte. Într-adevăr, să presupunem, dimpotrivă, că mulțimile

$$\mathfrak{M}_{p^*}, \quad \mathfrak{M}_{p^{**}}, \qquad p, p^{**} \to [p], \tag{1}$$

$$p^* \neq p^{**}, \tag{1'}$$

ar avea un ideal P comun. Se știe că numerele prime diferite (1') sînt prime în C iar $C \subset \Omega$. Avem deci, pe rînd,

$$c^* p^* + c^{**} p^{**} = 1, \qquad c^*, c^{**} \to C,$$

$$\therefore 1 \to P, \tag{2}$$

deoarece, prin ipoteza raționamentului prin absurd, $p^*, p^{**} \to P$.

Citim pe (2)

$$P = \Omega,$$

împotriva definiției idealelor prime.

E deci indirect dovedit că mulțimile (1) și (1') sînt disjuncte.

Dar mulțimea $[p]$ e infinită. Ca atare reuniunea mulțimilor $\mathfrak{M}_p$ cu $p \in [p]$ e infinită.

---

*) Pentru definiția și teoria idealelor prime-tari, vezi [6], p. 188 și p. 196–198.

**) p. 188 și p. 196–198.

Cu aceasta prima parte a teoremei e demonstrată.

Fie acum P un ideal prim (adică un ideal bilateral conținător de un întreg rațional nenul, care, o dată cu produsul divizat a două ideale bilaterale conținătoare de întregi rationali, divide unul din factori). Aceste ideale sînt evident mai generale decît idealele prime-tari. Vom arăta că P aparține unei mulțimi $\mathfrak{M}_{p_i}$, $p_i \to [p]$ și deci e un ideal prim-tare.

Să însemnăm cu c întregul rațional nenul conținut de P. E clar că acest întreg e diferit de ± 1, altfel am avea $P = \Omega$, ceea ce e exclus. Fie atunci

$$c = \bar{p}_1 \bar{p}_2 \cdots \bar{p}_m$$

descompunerea în factori primi a lui c. Avem, pe rînd, ținînd seama că $\Omega \bar{p}$ e ideal bilateral conținător de un întreg rațional nenul, întrucît $\bar{p}$ aparține centrului lui Ω,

$$\bar{p}_1 \bar{p}_2 \cdots \bar{p}_m \equiv 0 \bmod P$$

$$\therefore \Omega \bar{p}_1 \Omega \bar{p}_2 \ldots \Omega \bar{p}_m \equiv 0 \bmod P$$

$$\therefore \Omega \bar{p}_i \equiv 0 \bmod P, \tag{3}$$

căci P e ideal prim. Aici i înseamnă unul, anume, din indicii $1, 2, \ldots, m$.

Nu putem lua $\bar{p}_i \to \{p\}$, deoarece atunci $\bar{p}_i^{-1} \to \Gamma \subset \Omega$ iar (3) ar da $\Omega \bar{p}_i = \Omega \subset P$, împotriva definiției idealelor prime. Deci, obligatoriu,

$$\bar{p}_i = p_i \to [p]. \tag{3'}$$

Comparînd (3) cu (3'), conchidem

$$P \to \mathfrak{M}_{p_i}.$$

E astfel dovedit că mulțimea idealelor prime $[P]$, conținătoare de întregi nenuli, coincide cu mulțimea idealelor prime-tari, introdusă. Conchidem la descompunerea în sumă carteziană

$$[P] = (+)\, \mathfrak{M}_p, \qquad p \in [p]. \tag{4}$$

Cu aceasta totul e demonstrat.

Caz particular: *inelele Ω cu element-unitate, de caracteristică nulă, unitare relativ la mulțimea infinită de întregi rationali primi $[p]$ în care idealele bilaterale nenule au indice finit**).

E clar că idealele bilaterale nenule conțin întregi rationali (anume norma, adică indicele finit) și există limitarea maximală pentru idealele bilaterale.

Consecința 1. Dacă mulțimile $\mathfrak{M}_p$ au cardinale finite, mulțimea idealelor prime $[P]$ din enunț e infinit numerabilă.

Dacă mulțimile $\mathfrak{M}_p$ au cardinale mai mici, inclusiv egale cu un cardinal transfinit $\mathfrak{C}$, mulțimea $[P]$ are același cardinal $\mathfrak{C}$.

---

*) E de ajuns ca idealele Ωp să aibă această proprietate.

Aceste proprietăți se citesc pe descompunerea în sumă carteziană (4), unde $[p]$ e, prin ipoteză, o mulțime infinit numerabilă.

Consecința 2. Într-un inel Ω subcomutativ la dreapta, cu element-unitate, de caracteristică nulă, unitar relativ la mulțimea infinită de numere prime raționale $[p]$, satisfăcînd la cererile :1) limitare maximală pentru idealele bilaterale conținătoare de întregi raționali nenuli, 2) implicație „prim tare $\rightarrow$ nedivizibil" pentru aceleași ideale ; — mulțimea idealelor prime conținătoare de întregi raționali nenuli e infinit numerabilă.

Într-adevăr, se demonstrează în [6]*) o teoremă de descompunere în ideale uniforme (ideale bilaterale cu un singur divizor prim), ale cărei toate ipoteze sînt realizate în cazul de față. În virtutea ei conchidem că orice ideal bilateral din Ω, conținător de întregi raționali nenuli, se reprezintă ca secțiune finită unic determinată de ideale uniforme maxime. Divizorii primi ai idealului bilateral coincid cu divizorii primi ai componentelor uniforme maxime. Deci, idealul admite un număr finit de divizori primi.

În special, idealele bilaterale, conținătoare de întregi raționali nenuli $(p) = \Omega p$, $p \in [p]$ au această proprietate. Conchidem că mulțimea $\mathfrak{M}_p$ are un cardinal finit.

Conform consecinței 1, mulțimea $[P]$ a idealelor prime din Ω, conținătoare de întregi raționali nenuli, e infinit-numerabilă.

5° Infinitatea numerelor ireductibile, din anumite inele subcomutative, de caracteristică nulă, unitare relativ la o mulțime infinită de întregi raționali primi $[p]$

T e o r e m ă. *Fie Ω un inel subcomutativ la dreapta, cu element-unitate, de caracteristică nulă, unitar relativ la o mulțime infinită de întregi raționali primi $[p]$.*

Dacă în Ω nondivizorii bilaterali ai lui zero diferiți de o unitate admit un divizor la stînga ireductibil (de exemplu dacă nondivizorii bilaterali ai lui zero au limitare pentru succesiunile de divizori), atunci mulțimea numerelor ireductibile din Ω e infinită.

Demonstrație. Însemnăm cu $\overline{\Omega}$ inelul cîturilor lui Ω față de semigrupul multiplicativ generat de $[p]$.

Nu putem avea în Ω

$$p\,a = 0, \qquad p \in [p], \quad a \rightarrow (\Omega - 0),$$

fiindcă ar urma, în $\overline{\Omega}$,

$$\frac{1}{p}\,p\,a = 0$$

$$\therefore\ a = 0$$

împotriva lui

$$a \rightarrow (\Omega - 0).$$

*) p. 83—90.

Pe de altă parte, nu putem avea $\frac{1}{p} \to \Omega$, întrucît ar rezulta $\frac{1}{p} \to \Omega \cap R = \Gamma$, și deci semigrupul generat de $\{p\}$, al numitorilor din Γ, ar avea un element comun cu semigrupul generat de mulțimea complementară $[p]$ de numere prime raționale, ceea ce e exclus.

Avem așadar în p un nondivizor al lui zero bilateral (p e în centrul lui Ω) care nu e unitate în Ω. Deci, potrivit ipotezei din enunț, p admite un divizor stîng ireductibil ρ,

$$p = \rho\sigma, \qquad \sigma \to \Omega. \tag{1}$$

Ipoteza e construită dacă semigrupul divizorilor bilaterali ai lui zero e cu limitare pentru succesiunile de divizori (vezi 2°, consecința teoremei de existență).

Fie, în $[p]$, elementele $p^* \neq p^{**}$. Citim pe (1) că mulțimea $\mathfrak{M}_p$ a divizorilor stîngi ireductibili ai lui $p \in [p]$ nu e deșartă. Vrem să arătăm că mulțimile $\mathfrak{M}_{p^*}$, $\mathfrak{M}_{p^{**}}$ sînt disjuncte. Presupunem, dimpotrivă, că ar avea un element comun ρ.

Din (1) și $p^* \neq p^{**}$ rezultă, pe rînd,

$$p^* = \rho\sigma^*, \qquad p^{**} = \rho\sigma^{**};$$

$$p^* c^* + p^{**} c^{**} = 1, \qquad c^*, c^{**} \to C,$$

$$\rho(\sigma^* c^* + \sigma^{**} c^{**}) = 1, \tag{2}$$

deoarece $\Omega \supset C$. Punînd

$$\sigma^* c^* + \sigma^{**} c^{**} = \tau, \qquad \tau \to \Omega,$$

avem, din (2), ținînd seama de subcomutativitatea la dreapta a lui Ω,

$$1 = \rho\tau = \tau\rho', \qquad \rho' \to \Omega.$$

Citim pe această relație că τ e o unitate în Ω. Urmează

$$\rho\tau\rho' = \rho = \rho',$$

deci ρ e altă unitate.

Ajungem la o contrazicere, întrucît ρ e element ireductibil.

Deci mulțimile $\mathfrak{M}_{p^*}$, $\mathfrak{M}_{p^{**}}$, cu $p^* \neq p^{**}$, sînt disjuncte, Așadar, cum $[p]$ e infinit-numerabilă, inelul Ω conține mulțimea infinită de numere ireductibile, dată de suma cartezianăă

$$(+)\ \mathfrak{M}_p, \qquad p \in [p].$$

Cu aceasta totul e demonstrat*).

Observație. Obținem o variantă a teoremei precedente dacă, în enunț, cererea de subcomutativitate la *dreapta* a lui Ω o înlocuim cu cererea de

*) Construcția efectivă a limitării pentru succesiunile de divizori din enunț poate fi condusă în acord cu ultima teoremă din 2°.

subpermutabilitate la *stînga* a elementelor ireductibile din Ω,

$$\rho\,\Omega \subset \Omega\,\rho.$$

Demonstrația urmează la fel ca mai sus, pînă în punctul unde stabilim relația $1 = \rho\,\tau$. De aici avem $1 = \rho\,\tau = \tau'\rho$, de unde ρ apare ca unitate în Ω. Apoi, continuă în același mod.

Bineînțeles, cererea nouă ar reprezenta o slăbire față de subcomutativitatea la stînga, nu față de subcomutativitatea la dreapta a lui Ω, din enunț.

Observație. Proprietățile din 4° și 5° au la bază existența unei submulțimi $[p]$ infinite de întregi primi raționali, prin urmare decurg de-a dreptul din teorema originară a lui Euclid.

6° Infinitatea numerelor ireductibile din anumite inele cu element-unitate, de caracteristică nenulă și grup minimal al unităților

Dacă menținem ipoteza centrală a grupului minimal al unităților dar postulăm o caracteristică nenulă, putem da și aici o generalizare a teoremei lui Euclid, întemeiată altfel însă decît generalizarea din 5°. Cererile apar ca modificări directe ale cererilor 1), 2), 3) și 4) din 3°.

Cele două generalizări au o trăsătură comună, în afară de postularea minimalității grupului unităților: nu presupun în Ω o teoremă fundamentală, ci numai (în formele lor construite) o teoremă de existență a descompunerilor în produse de elemente ireductibile.

Teoremă. *Fie Ω un inel cu element-unitate, de caracteristică nenulă.*

Dacă

1) *Ω e subcomutativ la dreapta,*

2) *elementele ireductibile sînt nondivizori ai lui zero la dreapta,*

3) *grupul unităților e minimal, adică redus la 1 sau la $+1$, -1,*

4) *orice element diferit de o unitate admite un divizor la stînga ireductibil,*

atunci mulțimea elementelor ireductibile din Ω e infinită.

*Demonstrație.**) Fie n caracteristica lui Ω. Am arătat în 3°, că inelele nenule cu $n \neq 0$ și care satisfac cererea 3) sînt numai cele pentru care $n = 2, 3, 4, 6$.

Demonstrăm teorema prin absurd. Presupunem că mulțimea numerelor ireductibile în Ω e finită, eventual deșartă,

$$p_1, p_2, \cdots p_N. \tag{1}$$

Introducem produsul

$$\pi = p_1 p_2 \cdots p_N, \tag{2}$$

pe care, prin convenție, îl luăm egal cu 1 în cazul cînd (1) e deșartă.

---

*) Notăm că ipoteza 4) poate fi construită fie cu ipoteza limitării succesiunilor de divizori, fie cu ipotezele ultimei teoreme din 2°, în cazul unui Ω fără divizori ai lui zero.

Formăm numărul

$$a = \pi\varepsilon + 1, \tag{3}$$

unde $\varepsilon = +1$ pentru $n = 2, 4, 6$ și $\varepsilon = -1$ pentru $n = 3$.

Vrem să arătăm, că a e diferit de o unitate. Pentru aceasta împărțim discuția în patru cazuri :

$n = 2$

Aici $\varepsilon = 1$.

Conform cererii 3) singurele unității ale lui Ω sînt $+1$, -1. În cazul de față, coincid.

Presupunem, prin absurd, că în (3) avem

$$a = 1.$$

Rezultă

$$\pi = 0. \tag{4}$$

Dacă multimea (1) e deșartă, avem, prin convenție, $\pi = 1$ și deci (4) reprezintă o contrazicere.

Dacă mulțimea (1) nu e deșartă, conform cererii 2), produsul π aparține semigrupului tuturor nondivizorilor drepți ai lui Ω, deci $\pi \neq 0$, ceea ce, în raport cu (4), dă o contrazicere.

E deci indirect dovedit, că a este o nonunitate.

$n = 3$

Aici $\varepsilon = -1$.

Conform cererii 3) unitățile lui Ω sînt numai $+1$, -1.

Presupunem, prin absurd, că în (3) a este o unitate și anume, mai întîi

$$a = +1.$$

Rezultă

$$\pi = 0,$$

pe cînd produsul π este sau egal cu 1, prin convenție, cînd mulțimea (1) e deșartă, sau egal cu un nondivizor la dreapta al lui Ω, în virtutea cererii 2). În amîndouă eventualitățile, $\pi \neq 0$ și ne contrazicem.

Să luăm în (3)

$$a = -1.$$

Obținem

$$-\pi + 1 = -1$$

$$\therefore \pi = 2$$

sau, avînd în vedere valoarea $n = 3$ a caracteristicei,

$$\pi = -1. \tag{5}$$

Dacă mulțimea (1) e deșartă, avem $\pi = 1$ și ne contrazicem. Dacă mulțimea nu e deșartă, (5) se scrie, avînd în vedere cererea 1),

$$-1 = \omega\, p_N = p_N\, \omega^*.$$

Citim pe aceste relații că numărul ireductibil p_N e o unitate, ceea ce am exclus.

În definitiv, rămîne stabilit, prin absurd, că a e o nonunitate.

$n = 4$

Aici $\varepsilon = +1$.

Punem în (3)

$$a = 1.$$

Regăsim

$$\pi = 0,$$

pe cînd $\pi = 1$, în cazul unei mulțimi (1) deșartă și $\pi \neq 0$, ca nondivizor la dreapta al lui zero, dacă (1) nu e deșartă. Așadar ne contrazicem.

Să punem în (3)

$$a = -1.$$

Rezultă, pe rînd,

$$\pi = -2$$

$$\therefore 2\pi = -4$$

$$\therefore 2\pi = 0, \tag{6}$$

ținînd seama de valoarea caracteristicei.

Dacă mulțimea (1) e deșartă, urmează $\pi = 1$ iar (6) devine $2 = 0$, împotriva definiției caracteristicei $n = 4$ (cel mai mic adiționator al lui 1 care dă zero).

Dacă mulțimea (1) nu e deșartă, egalitatea (6) se scrie

$$2\, p_1\, p_2 \ldots p_N = 0.$$

În virtutea cererii 2) putem scurta, la dreapta, pe rînd, cu

$$p_N, p_{N-1}, \ldots p_1.$$

Obținem

$$2 = 0,$$

împotriva definiției caracteristicei.

Deci ne contrazicem în toate cazurile. Rămîne demonstrat, prin absurd, că a este o nonunitate.

$n = 6$

Aici $\varepsilon = +1$.

Punem în (3)

$$a = 1.$$

Rezultă $\pi = 0$, ceea ce contrazice valoarea $\pi = 1$ sau calitatea de nondivizor la dreapta al lui zero, corespunzătoare lui π.

Să punem în (3)

$$a = -1.$$

Găsim, pe rînd,

$$\pi = -2$$

$$\therefore 3\pi = -6$$

$$\therefore 3\pi = 0. \tag{7}$$

Dacă mulțimea (1) e deșartă avem $\pi = 1$, deci $3 = 0$, împotriva definiției caracteristicei.

Dacă mulțimea (1) nu e deșartă, (7) se scrie

$$3\, p_1\, p_2 \cdots p_N = 0.$$

În virtutea cererii 2) putem scurta, pe rînd, cu

$$p_N,\ p_{N-1},\ \cdots,\ p_1.$$

Rămîne

$$3 = 0$$

împotriva definiției caracteristicei.

Așadar e demonstrat indirect că a e nonunitate.

În definitiv, a rezultă nonunitate oricare ar fi caracteristica.

Conform cererii 4) din enunț, a admite un divizor la stînga ireductibil.

Dacă mulțimea (1) e deșartă, contrazicerea e evidentă.

Dacă nu e deșartă, divizorul la stînga ireductibil al lui a aparține mulțimii (1).Coincide, să zicem, cu p_i.

Avem deci

$$a = p_i\, a^*, \qquad a^* \to \Omega. \tag{8}$$

Pe de altă parte, în virtutea subcomutativității la dreapta a lui Ω, putem scrie

$$\varepsilon\pi = \varepsilon\, p_1 \cdots p_{i-1}\, p_i\, p_{i+1} \cdots p_N = p_i\, q_i\, p_{i+1} \cdots p_N$$

$$\therefore \varepsilon\pi = p_i\, \pi^*, \qquad \pi^* \to \Omega. \tag{9}$$

Introducînd (8) și (9), în (3), găsim

$$1 = p_i\, s_i, \qquad s_i \to \Omega, \tag{10}$$

unde am pus $s_i = a^* - \pi^*$.

Folosind încă o dată subcomutativitatea la dreapta a lui Ω, rezultă din (10)

$$1 = p_i\, s_i = s_i\, p_i'. \tag{11}$$

Deci s_i e o unitate. În virtutea lui (11) avem

$$p_i\, s_i\, p_i' = p_i = p_i'.$$

Citim atunci pe (11) că p_i e o altă unitate.

Ajungem la o contrazicere, întrucît p_i e element ireductibil.

E astfel demonstrat, prin absurd, că mulțimea numerelor ireductibile din Ω e infinită.

7° Infinitatea mulțimii numerelor ireductibile în anumite inele cu element-unitate, de caracteristică nenulă și grup neminimal al unităților

Concluziile acestui alineat sînt valabile și în cazul caracteristicei nule; numai că, pentru $n = 0$, am putut stabili în 5° rezultate mult mai generale.

Am arătat în 2° existența unui tip de teoremă fundamentală necomutativă, în care permanența descompunerilor aceluiași element este nucleul. În cele ce urmează avem nevoie de o teoremă fundamentală mult mai slabă, în care permanența descompunerilor să o constituie numai ordinul mulțimii nucleelor (dimensiunea nucleară).

Această teoremă fundamentală o vom postula. O parte dintr-însa, teorema de existență, o putem construi, cu ipoteza limitării pentru succesiunile de divizori. În cazul unui inel Ω fără divizori ai lui zero, putem construi întreaga teoremă fundamentală, dar sub o formă tare, cu permanența nucleelor. O construcție ideal-teoretică, numai a permanenței dimensiunii nucleare, n-am putut găsi.

Teoremă. *Fie Ω un inel cu element unitate (de caracteristică nenulă), satisfăcînd la următoarele cereri:*

1) *e subcomutativ la dreapta;*

2) *elementele ireductibile sînt nondivizori la dreapta (respectiv la stînga) ai lui zero;*

3) *Ω admite teoremă fundamentală, cu permanența dimensiunii nucleare *), pentru toate nonunitățile nenule (sau, încă, mai slab, pentru toate diferențele de unități $(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$ diferite de zero și de o unitate);*

4) *orice nonunitate din Ω admite un divizor la stînga ireductibil **).*

În acest cadru, condiția necesară și suficientă pentru ca mulțimea numerelor ireductibile neasociate (fie la stînga, fie la dreapta, indiferent) din Ω să fie infinită este ca limita superioară

$$D = \lim d(\varepsilon_i - \varepsilon_j), \qquad \varepsilon_i \neq \varepsilon_j,$$

a dimensiunilor nucleare privitoare la diferențele nenule de unități să fie sau infinită sau să existe în Ω cel puțin $D + 1$ numere ireductibile neasociate.

Demonstrație. Condiția $D = \infty$ e evident suficientă pentru concluzia teoremei, astfel încît, în cele ce urmează, vom presupune D finit (eventual nul).

E clar atunci că existența a cel puțin $D + 1$ numere ireductibile neasociate e necesară pentru concluzia teoremei. Ne propunem să arătăm că e și suficientă.

Presupunem, prin absurd, că mulțimea tuturor numerelor ireductibile, neasociate, e finită (eventual deșartă),

$$p_1, p_2, \ldots, p_N, \qquad N \geqslant D + 1. \tag{1}$$

Introducem, potrivit schematismului lui Euclid, produsul

$$\pi = p_1 p_2 \ldots p_N, \tag{2}$$

*) Pentru definiție, vezi 2°.

**) Dacă cererea 3) o păstrăm sub forma tare, cererea 4) e construită (vezi 2°, consecința teoremei de existență) și ca atare poate fi suprimată.

pe care-l luăm egal cu 1 dacă mulțimea (1) e deșartă. Dacă mulțimea (1) nu e deșartă, avem în π din (2), potrivit cererii 2), un nondivizor al lui zero (la dreapta, respectiv la stînga). Deci, în toate cazurile

$$\pi \neq 0. \tag{3}$$

Formăm numărul

$$a = \pi + 1. \tag{4}$$

Nu putem lua $a = 1$, întrucît ar urma $\pi = 0$, împotriva lui (3). Nu putem lua nici $a = \varepsilon$, unde ε e o unitate diferită de 1 dar altfel arbitrară. Într-adevăr, din (4) ar rezulta mai întîi

$$\pi = \varepsilon - 1, \quad \varepsilon \neq 1. \tag{5}$$

Să însemnăm cu $d(x)$ dimensiunea nucleară a descompunerii lui $x \to \Omega$, conform teoremei fundamentale. Din (5) rezultă

$$d(\pi) = d(\varepsilon - 1), \tag{6}$$

în baza cererii 3); observăm că (6) are loc chiar și în cazul cînd $\varepsilon - 1$ e o unitate, deoarece nucleul descompunerii unităților este mulțimea deșartă și ca atare $d(\varepsilon - 1) = d(\pi) = 0$.

Ținînd seama de definiția dimensiunii nucleare, citim pe (2), că dimensiunea produsului π de N factori ireductibili neasociați este egală cu N. Din (6) urmează deci

$$N \leqslant D,$$

împotriva ipotezei $N > D$.

În definitiv, e stabilit, prin absurd, că a e diferit de orice unitate a inelului.

Din acest punct demonstrația sfîrșește ca în 6°. Reproducem acest final.

Conform cererii 4), nonunitatea a admite un divizor la stînga ireductibil. Dacă mulțimea (1) e deșartă, contrazicerea e evidentă. Dacă (1) nu e deșartă, divizorul la stînga ireductibil al lui a e unul din elementele mulțimii, să zicem p_i. Avem

$$a = p_i a^*, \quad a^* \to \Omega.$$

Pe de altă parte, în virtutea cererii 1) putem scrie

$$\pi = p_i \pi^*, \quad \pi^* \to \Omega.$$

Cu aceasta (4) ia forma $1 = p_i(a^* - \pi^*)$ sau, mai scurt, și cu aplicarea din nou a cererii 1),

$$1 = p_i s_i = s_i p'_i$$

$$\therefore p_i s_i p'_i = p_i = p'_i.$$

Citim pe aceste relații că p_i este o unitate, împotriva definiției numerelor ireductibile.

E dovedit astfel, indirect, că mulțimea numerelor ireductibile din Ω e infinită.

Teorema e demonstrată.

Observație. Teorema de mai sus conduce, prin specializare, la un non tip de demonstrație al teoremei lui Euclid, originare, întemeiată pe cu totul alte aspecte abstracte ale lui C, decît cele puse în evidență în 3°.

Într-adevăr, inelul C al întregilor raționali satisface la cererile 1), 2), 3), 4), căci e cu ideal principal (deci cu teoremă fundamentală clasică) și fără divizori ai lui zero. Ipoteza centrală e de asemenea satisfăcută, cu $D = 1$, deoarece avem o singură diferență $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, anume $2 = 1 - (-1)$, care e număr ireductibil, și fiindcă există cel puțin două, adică $D + 1$, numere ireduetibile, de exemplu 2,3.

Cazuri particulare.

I. *Domeniile de integritate $\Omega \neq$ corp, cu element-unitate, limitare pentru lanțurile de divizori și în care E (grupul unităților) plus zero formează modul (deci corp).*

Într-adevăr axiomele 1) și 2) sînt banal satisfăcute.

Axioma 3) tare, și deci, implicit, axioma 4), sînt satisfăcute, deoarece semigrupul multiplicativ ($\Omega - 0$) e comutativ, cu element-unitate, scurtare și limitare pentru lanțurile de divizori.

Ipoteza centrală se verifică de asemenea. Într-adevăr, diferența a două unități diferte $\varepsilon_i - \varepsilon_i$ cade în $E + 0$, deci în E. Cum unitățile nu au descompuneri în produs finit de elemente ireductibile, urmează $d(\varepsilon_i - \varepsilon_j) = 0$, așadar $D = 0$. Pe de altă parte, în virtutea axiomei 4), verificate, și a presupunerii $\Omega \neq$ corp, $\Omega \neq 0$, există în Ω cel puțin o nonunitate nenulă și ca atare cel puțin $1 = D + 1$ numere ireductibile.

Exemple construite de astfel de domenii de integritate avem în inelele de polinoame cu $m \geqslant 1$ nedeterminate peste un corp comutativ K. Aici $E = (K - 0)$.

II. *Domeniile de integritate Ω cu element-unitate, în care idealele nenule au indice finit; pentru care indicii idealelor principale $((\varepsilon_i - \varepsilon_j))$ generate de diferența a două unități diferite, au o limită superioară finită *) $M + 1$; unde există cel puțin $M + 1$ numere ireductibile.*

Într-adevăr, axiomele 1) și 2) sînt banal satisfăcute.

Axioma 3) tare și deci, implicit, axioma 4), sînt satisfăcute, deoarece semigrupul ($\Omega - 0$) e comutativ, cu element-unitate, scurtare și limitare pentru divizori. Ultima proprietate provine din faptul că idealul principal (a), cu $a \in (\Omega - 0)$ are indice finit în Ω, deci un număr finit de ideale divizoare, *a fortiori* un număr finit de ideale principale divizoare, înlănțuite.

Ipoteza centrală se verifică de asemenea. Într-adevăr, idealul principal nenul $((\varepsilon_i - \varepsilon_j))$ are, conform enunțului, cel mult indicele $M + 1$, prin urmare admite cel mult M ideale veritabile divizoare, *a fortiori* cel mult M ideale principale veritabile divizoare, înlănțuite. Ca atare,

$$d(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \leqslant M \quad \therefore \quad D \leqslant M.$$

*) Cerere de la sine satisfăcută cînd Ω are un număr finit de unități.

Pe de altă parte, conform enunțului, există sigur cel puțin $M + 1$, așadar cel puțin $D + 1$ numere ireductibile. Avem așadar de-a face cu un caz special al teoremei din acest alineat.

Observăm că putem slăbi considerabil ultima cerere, afirmînd existența a numai cel puțin $N + 1$ numere ireductibile în Ω, unde N este numărul divizorilor lui M.

§ 2. ARGUMENTUL LUI EUCLID ADAPTAT PROBLEMEI INFINITĂȚII IDEALELOR PRIME DE GRAD 1 DIN CORPURILE DE NUMERE PĂTRATICE.

(EXTINDEREA REZULTATULUI LA CORPURILE DE NUMERE ALGEBRICE, GALOISIENE DE GRAD PRIM *l*)

1° Recapitularea teoriei clasice a idealelor în corpurile de numere pătratice

Cititorii familiarizați cu teoria algebrică a numerelor pot trece peste acest prim alineat. În afară de unele notații și sistematizări introduse cu ocazia cursului nostru, toate rezultatele se găsesc demonstrate în paragrafele 186 și 187 ale suplimentului XI (ediția a 4-a din 1894 a lecțiilor lui Dirichlet) al lui Dedekind [7] *); pentru unele rezultate, vezi de asemenea D. Hilbert [8] și E. Landau [15]**). Recomandăm însă citirea celui de-al doilea alineat, pentru demonstrația foarte elementară a teoremei discriminantului, cu toate că materia e clasică.

Scopul acestei digresiuni este grija de a ușura înțelegerea alineatelor viitoare dar, mai ales, de a întări în cititor convingerea că materialul pe care-l folosim în demonstrația algebrică a unor cazuri speciale ale unor teoreme de teoria analitică a numerelor e elementară.

Orice corp de numere pătratice poate fi reprezentat ca extindere a corpului R al numerelor raționale prin rădăcina θ a ecuației pătratice

$$\theta^2 + \rho\theta + \frac{\rho - d}{4} = 0, \tag{1}$$

unde

I. $d = \varepsilon p_1 p_2 \dots p_m$, $\rho = 1$ dacă $\varepsilon p_1 p_2 \dots p_m \equiv 1 \mod 4$,

respectiv

II. $d = 4\varepsilon p_1 p_2 \dots p_m$, $\rho = 0$ dacă $\varepsilon p_1 p_2 \dots p_m \not\equiv 1 \mod 4$.

Aici ε înseamnă ± 1 iar $p_1, p_2, \dots, p_m$ numere prime $p_i > 1$ toate diferite între ele. Dimensiunea m a produsului lor poate fi chiar nulă. Acest minim este atins numai pentru $\varepsilon p_1 p_2 \dots p_m = -1$.

Numărul d se numește discriminantul corpului, iar θ, întregul canonic.

Pornind de la o anumită definiție, a întregilor algebrici, se dovedește că toți întregii corpului $R(\theta)$ sînt dați de numerele C — modulului

$$\tau = c_0 + c\theta,$$

unde C e inelul întregilor raționali.

---

*) p. 200–222.

**) p. 171–180.

Acest C—modul, în virtutea lui (1), formează un inel Ω (ordinul principal).

Fie θ' cea de-a doua rădăcină a lui (1). Numărul

$$\tau' = c_0 + c\theta'$$

se numește conjugatul lui τ. Prin norma întregului θ înțelegem

$$N(\tau) = |\tau\tau'|.$$

E clar că $N(\tau)$ e un număr natural.

Însemnăm cu l, k două numere naturale iar cu h un număr natural, eventual nul, cuprins între limitele

$$0 \leqslant h < k, \tag{2}$$

supuse numai condiției

$$N(\theta + h) \equiv 0 \bmod k. \tag{3}$$

Idealele I ale ordinului principal Ω sînt în corespondență biunivocă cu aceste terne h, k, l condiționate numai prin (2) și (3). Se demonstrează anume că fiecare I e reprezentat de un C—modul de bază

$$lk, \quad l(\theta + h) \tag{4}$$

și reciproc.

Mulțimea (4) se numește baza minimală canonică a lui I. Orice altă pereche de numere α_1, α_2 deduse din (4) printr-o transformare liniară peste C, de determinant ± 1, se numește bază minimală.

La fel, orice pereche de numere ω_1, ω_2 dedusă din baza minimală canonică 1, θ a lui Ω printr-o substituție lineară de determinant ± 1 se numește bază minimală a lui Ω.

Determinantul, în valoare absolută, al substituției liniare ce face trecerea de la ω_1, ω_2 la α_1, α_2 se numește norma $N(I)$ a idealului I.

E clar că avem

$$N(I) = l^2k. \tag{5}$$

Cel mai mic întreg natural conținut de idealul I se recunoaște că este lk. Se arată atunci ușor că o condiție necesară pentru ca idealul $I = P$ să fie prim este

$$lk = p, \quad p > 1$$

cu p întreg prim natural. Condiția se desface în două,

$$l = 1, \quad k = p, \tag{6}$$

$$l = p, \quad k = 1. \tag{7}$$

Aceste condiții devin și suficiente, dacă le întregim respectiv prin

$$N(\theta + h) \equiv 0 \bmod p \tag{6'}$$

$$N(\theta + h) \not\equiv 0 \bmod p, \tag{7'}$$

ultima condiție fiind cerută pentru orice h din $0 \leqslant h < p$.

Două ideale de baze minimale canonice conjugate se zic conjugate. Conjugatul lui I se înseamnă prin I'.

Fie I, J două ideale de baze minimale respectiv

$$\alpha_1, \alpha_2, \qquad \beta_1, \beta_2.$$

Se dovedește că C — modulul generat de *expansiunea*

$$\alpha_1\beta_1, \quad \alpha_1\beta_2, \quad \alpha_2\beta_1, \quad \alpha_2\beta_2,$$

a celor două baze este un alt ideal care, prin definiție, e declarat produsul IJ al celor două ideale. Această operație e asociativă și comutativă.

Se demonstrează atunci următoarea teoremă centrală (urmă a celebrei teoreme a lui Dedekind, asupra modulului complementar):

Produsul unui ideal I cu idealul conjugat e egal cu idealul principal generat în Ω de normă

$$II' = (N(I)).$$

De aici decurg imediat următoarele teoreme importante:

Echivalența diviziunii aditive și diviziunii multiplicative a idealelor

$$J \supset K \sim K = IJ.$$

Multiplicativitatea normei idealelor (8)

$$N(IJ) = N(I)\,N(J).$$

Teorema fundamentală. *Orice ideal I propriu, $\Omega > I > (0)$, admite o descompunere în ideale prime unică, pînă la ordinea factorilor*

$$I = P_1P_2 \dots P_r. \tag{9}$$

Se recunoaște ușor că orice ideal prim P divide un număr prim natural $p > 1$, unic determinat, întrucît coincide cu cel mai mic număr natural divizat de P.

Reciproc, dacă $p > 1$ e un număr prim natural, găsim

$$(p) = P_1P_2 \dots P_r, \qquad p^2 = N(P_1)\,N(P_2) \dots N(P_r)$$

$$\therefore r \leqslant 2.$$

Așadar, idealele prime din Ω se despart în două mari categorii:

idealele prime P de grad 1

$$(p) = PP_1$$

(aceleași cu idealele definite de (6), (6′) sau de condiția $N(P) = p$);

idealele prime P de grad 2

$$(p) = P$$

(aceleași cu idealele definite de (7), (7′) sau de condiția $N(P) = p^2$).

Din $(N(P)) = PP'$ rezultă, că descompunerea numărului prim natural p corespunzător idealului prim P de grad 1 se face în două ideale prime conjugate,

$$(p) = PP'. \tag{10}$$

Pornind de la (6) § (6′), *respectiv* (7) și (7′), se dovedește că numerele prime $p > 2$ corespunzătoare idealelor prime de grad 1, *respectiv* de grad 2, sînt complet caracterizate prin următoarea proprietate:

Întregul natural prim $p > 2$ e divizat de un ideal prim de grad 1, *respectiv* de grad 2 *atunci și numai atunci cînd discriminantul d* este, *respectiv* nu este *reziduu pătratic mod p*,

$$x^2 \equiv d \bmod p, \quad \text{respectiv } x^2 \not\equiv d \bmod p.$$

Pentru $p = 2$ e valabil alt criteriu:

Numărul 2 e totdeauna divizat de un ideal prim de grad 1 în cazul II ($\varepsilon p_1, p_2, \ldots, p_m \not\equiv 1 \bmod 4$); *în cazul* I ($\varepsilon p_1, p_2, \ldots, p_m \equiv 1 \bmod 4$), *atunci și numai atunci cînd* $\varepsilon p_1 p_2 \ldots p_m \equiv 1 \bmod 8$.

Un număr prim natural p se zice *ramificat* cînd satisface la (10), cu $P = P'$,

$$(p) = P^2.$$

Un ideal prim P se zice *de ramificare* cînd e de grad 1 și coincide cu conjugatul său

$$P = P'.$$

2° Teorema discriminantului pentru corpurile pătratice

În corpurile generale de numere algebrice teorema reciprocă a discriminantului se demonstrează destul de greu [7] *), [9]. Pentru corpurile galoisiene D. Hilbert[8] **) a simplificat mult demonstrația, reducînd-o la proprietatea diferenței de a fi c.m.m.c.d. al diferentelor elementare. Dar chiar și aici, demonstrația folosește noțiuni și procedee algebrice destul de ridicate.

Pentru corpurile de numere pătratice există însă o demonstrație cu totul elementară, care merită să fie cunoscută, poate inedită ***). Chiar teorema directă (a cărei fundare generală nu prezintă dificultăți) poate fi prezentată cu simplificări esențiale.

Teorema directă. *Fie p un număr prim natural ramificat, așadar*

$$(p) = PP', \qquad P = P'.$$

El divide discriminantul d al corpului.

Demonstrație. Cum P e ideal prim de grad 1, baza lui minimală canonică, (vezi (6) și (6′) din 1°), e dată de

$$p, \quad \theta + h, \tag{1}$$

unde

$$N(\theta + h) \equiv 0 \bmod p, \qquad 0 \leqslant h < p. \tag{2}$$

Baza minimală canonică a lui P' este

$$p, \quad \theta' + h. \tag{1'}$$

*) Vol. I, p. 539–370.
**) p. 1–56.
***) Altă demonstrație elementară, cu totul diferită, în Landau [15] p. 178–180.

Trecerea de la (1) la (1′) e dată obligatoriu de o substituție liniară peste C de determinat ± 1. Ca atare conchidem

$$\theta' + h = cp \pm (\theta + h), \qquad c \to C. \tag{3}$$

Nu putem lua aici semnul plus, întrucît ar urma

$$\theta' = \theta = cp$$

$$\therefore -\sqrt{d} = cp,$$

împotriva proprietății lui d de a fi un noncuadrat al corpului.

Prin urmare în (3) trebuie luat semnul minus. Ținînd seama de ecuația (1) din 1° (unde, evident, $\rho^2 = \rho$) și de condiția (2), avem, pe rînd,

$$2h + \theta + \theta' = cp,$$

$$\therefore 2h - \rho = cp; \tag{4}$$

$$h^2 + h(\theta + \theta') + \frac{\rho - d}{4} \equiv 0 \bmod p,$$

$$\therefore h^2 - \rho h + \frac{\rho - d}{4} \equiv 0 \bmod p,$$

$$\therefore (2h - \rho)^2 - d \equiv 0 \bmod p. \tag{4'}$$

Din (4) și (4′) conchidem

$$d \equiv 0 \bmod p.$$

Teorema directă e demonstrată.

Teorema reciprocă. *Divizorii primi naturali* $p > 1$ *ai discriminantului* d *sînt ramificați,*

$$(p) = PP', \qquad P = P'.$$

Demonstrație. Citim pe

$$d \equiv 0 \bmod p \tag{5}$$

că congruența $x^2 \equiv d \bmod p$ are soluția banală $x = 0$. Prin urmare, dacă $c > 2$, atunci p are ideale prime divizioare de grad 1. Dacă $p = 2$ concluzia nu se schimbă decît în cazul $\varepsilon p_1 p_2 \ldots p_m = 1 + 4(2n + 1)$. Dar atunci $d = \varepsilon p_1 p_2 \ldots p_m$, și e clar că ipoteza (5) nu are loc, căci d e impar.

În definitiv, toți divizorii primi $p \geqslant 2$ ai discriminantului d sînt divizați de ideale prime de grad 1.

Presupunem întîi $p = 2$ în (5). Baza canonică minimală a unuia din idealele prime P care divid pe 2 este (vezi 1°)

$$(2, \ \theta + h), \qquad 0 \leqslant h < 2, \tag{6}$$

la care trebuie adăugată condiția suplimentară $N(\theta + h) \equiv 0 \bmod 2$, de unde deducem

$$(2h - \rho)^2 - d \equiv 0 \bmod 2;$$

cum $d \equiv 0 \bmod 2$, urmează obligatoriu $\rho = 0$.

Avem deci $\theta + \theta' = 0$. Ca atare

$$(\theta + h) + (\theta' + h) = 2h.$$

Citim pe această relație că trecerea de la baza (6) la baza

$$(2, \quad \theta' + h) \tag{6'}$$

e dată de o transformare liniară peste C de determinant -1. Așadar, $P = P'$ iar

$$(2) = P^2.$$

Să presupunem acum $p > 2$ în (5).

Din $2\theta + \rho = \sqrt{d}$ urmează $\sqrt{d} \to \Omega$. Pe de altă parte, $\sqrt{d}$ e diferit de o unitate, deoarece $N(\sqrt{d}) = |d| > 1$.

Aplicînd teorema fundamentală urmează

$$(\sqrt{d}) = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_r, \tag{7}$$

unde $\mathfrak{P}_i$ sînt ideale prime, nu numaidecît diferite.

Pe de altă parte (vezi 1°)

$$\varepsilon d = 2^\alpha p_1 p_2 \ldots p_m, \tag{7'}$$

unde $\alpha = 0, 2, 3$ iar p_i sînt numere prime naturale diferite între ele și diferite de 2 (în cazul $\alpha = 3$ se cuvine să punem $m = 1$ în loc de m; dar această preciziune e fără importanță pentru cele ce urmează).

Potrivit observației preliminare, avem (P_i ideale prime)

$$(2) = P_0 P_0', \quad (p_i) = P_i P_i', \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{8}$$

Din (7), (7') și (8) rezultă

$$\mathfrak{P}_1^2 \mathfrak{P}_2^2 \ldots \mathfrak{P}_r^2 = (P_0 P_0')^\alpha P_1 P_1' P_2 P_2' \ldots P_m P_m'. \tag{9}$$

Fie $i > 0$. Teorema fundamentală impune

$$P_i = \mathfrak{P}_k.$$

În membrul întîi din (9) avem un al doilea factor egal cu $\mathfrak{P}_k$. Teorema fundamentală impune

$$\mathfrak{P}_k = P_j^{(\lambda)},$$

unde j e unul din indicii $0, 1, \ldots, m$ iar (λ), accentul nul sau prim.

Nu putem avea $i \neq j$ deoarece (punînd ad-hoc $2 = p$) numerele p_i, p_j ar fi prime între ele. Ca atare, $1 = (c_i p_i + c_j p_j) \to \mathfrak{P}_k$, deci $\mathfrak{P}_k = \Omega$, ceea ce e exclus. Conchidem că

$$j = i.$$

În rezumat, orice factor egal cu $\mathfrak{P}_k$ din al doilea membru este egal sau cu P_i sau cu P_i'. Cum P_i și P_i' figurează la puterea întîia, urmează

că avem cel puțin doi factori egali cu $\mathfrak{P}_k$ în primul membru și cel mult doi factori egali cu $\mathfrak{P}_k$ în al doilea membru. În virtutea teoremei fundamentale conchidem că avem exact doi factori $P_i^{(\lambda)}$ egali cu $\mathfrak{P}_k$, anume

$$P_i = P_i' = \mathfrak{P}_k$$
$$\therefore (p_i) = P^2, \qquad i > 0.$$

Cu aceasta totul e demonstrat.

3° Infinitatea mulțimii idealelor prime de grad 1 în corpurile pătratice

Fără întrebuințarea funcției $\zeta(s, K)$ a lui Dedekind și cazului ei particular (funcția $\zeta(s)$ a lui Riemann) care constituie aparatul de demonstrație în cazul teoremei generale din corpurile de numere algebrice de grad n; fără întrebuințarea cazului special al teoremei progresiei aritmetice și a legii reciprocității (aparatul de demonstrație elementar ce va fi întrebuințat în § 4, în cadrul corpurilor de numere pătratice, pentru aceeași teoremă); în schimb numai cu o formă puțin modificată a argumentului lui Euclid, cu noțiunile și rezultatele din 1° plus demonstrația simplă din 2° a teoremei discriminantului, ne propunem să stabilim această

T e o r e m ă. *Mulțimea idealelor prime de grad 1 din corpurile pătratice e infinită.*

Demonstrație. Presupunem, dimpotrivă, că mulțimea idealelor prime din enunț e finită sau deșartă (vom vedea că ultima eventualitate se exclude imediat).

Fiecărui ideal prim P al mulțimii îi corespunde univoc un întreg prim natural $p > 1$ *unic determinat* (vezi 1°). Deci avem cel mult atîtea numere prime p corespunzătoare cîte ideale P, așadar o mulțime finită sau deșartă.

Printre aceste numere prime naturale, norme de ideale prime de grad 1, se găsesc divizorii primi naturali ai discriminantului d,

$$p_0, p_1, \ldots, p_m, \tag{1}$$

în virtutea teoremei reciproce, din 2°, a discriminantului.

Aici, p_0 înseamnă un divizor $p_0 = 2$, care, conform celor arătate în 1°, se adaugă la $p_1, p_2, \ldots, p_m$ numai în cazul II), și anume cînd $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sînt diferiți de 2.

Cum, potrivit definiției *) din 1°, avem întotdeauna $|d| > 1$, e clar că mulțimea (1) nu e deșartă.

În virtutea ipotezei prin absurd adoptată, mulțimea tuturor normelor idealelor prime de grad 1 se compune din reuniunea mulțimii nedeșarte (1) cu o mulțime finită, eventual deșartă, de norme analoage (numere prime naturale $p > 1$),

$$p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_{m+n}, \qquad n \geqslant 0. \tag{2}$$

*) Atragem atenția că proprietatea $|d| > 1$ este consecința felului cum am introdus discriminantul și nu a teoremei generale $|d| > 1$, a lui M i n k o w s k y, din cazul corpurilor de grad arbitrar.

Notațiile fiind acelea din 1°, introducem întregul pătratic

$$\tau = (2\theta + \rho)\, p_{m+1} p_{m+2} \cdots p_{m+n} + 1. \tag{3}$$

În cazul $n = 0$, expresia lui τ este, prin convenție

$$\tau = (2\theta + \rho) + 1. \tag{3'}$$

Construcția întregului pătratic τ reprezintă aici chiar adaptarea procedeului lui Euclid.

Observăm că

$$\tau \neq 0, \tag{4}$$

altfel (deoarece 1, θ e o bază minimală) ar urma pentru coeficientul lui θ din (3), *respectiv* din (3'),

$$2p_{m+1} p_{m+2} \cdots p_{m+n} = 0, \text{ respectiv } 2 = 0,$$

ceea ce e exclus.

De asemenea, τ nu e o unitate a ordinului principal Ω. Altfel am avea

$$N(\tau) = 1. \tag{5}$$

Dar din (1), 1°, rezultă

$$2\theta + \rho = \sqrt{d}, \quad 2\theta' + \rho = -\sqrt{d},$$

$$\therefore N(\tau) = |\tau\tau'| = |1 - dp_{m+1}^2 p_{m+2}^2 \cdots p_{m+n}^2|.$$

Cu aceasta relația (5) devine

$$|1 - dp_{m+1}^2 p_{m+2}^2 \cdots p_{m+n}^2| = 1,$$

ceea ce înseamnă sau

$$1 - dp_{m+1}^2 p_{m+2}^2 \cdots p_{m+n}^2 = 1$$

$$\therefore dp_{m+1}^2 p_{m+2}^2 \cdots p_{m+n}^2 = 0, \tag{6}$$

sau

$$1 - dp_{m+1}^2 p_{m+2}^2 \cdots p_{m+n}^2 = -1$$

$$\therefore dp_{m+1}^2 p_{m+2}^2 \cdots p_{m+n}^2 = 2. \tag{7}$$

Reamintim că în (6) și (7), conform convenției, produsul $p_{m+1}^2 p_{m+2}^2 \cdots p_{m+n}^2$ trebuie înlocuit cu 1, pentru $n = 0$.

Considerăm cazul I) din 1°.

Prima concluzie (6) se elimină de la sine.

Pentru eliminarea concluziei (7), observăm că deoarece toți $p_{m+i} > 1$, în (7) trebuie luat obligatoriu $n = 0$. Cu aceasta (7) devine

$$d = 2,$$

împotriva ipotezei $d \equiv 1 \mod 4$, proprie cazului I).

Considerăm cazul II) din 1°.

Concluzia (6) cade de la sine.

Concluzia (7) se îndepărtează, ca incompatibilă cu inegalitatea $|d| \geqslant 4$, consecință imediată a definiției $d = 4\varepsilon p_1 p_2 \ldots p_m$ a discriminantului, din cazul de față.

Rămîne deci indirect stabilită contrara relației (5), adică

$$N(\tau) \neq 1. \tag{4'}$$

Deci τ este o nonunitate diferită de zero a ordinului principal Ω, cum se citește pe (4) și (4').

Ca atare, idealul principal (τ) admite o descompunere în produs de ideale prime, conform teoremei fundamentale,

$$(\tau) = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_s. \tag{8}$$

Nu toți divizorii primi $\mathfrak{P}_i$ ai lui τ pot fi de grad 2.

Să presupunem, dimpotrivă, că toți divizorii $\mathfrak{P}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ ar fi de grad 2. Am arătat în 1° că idealele prime de grad 2 sînt ideale principale generate în Ω de întregi primi naturali. Ar urma deci

$$\mathfrak{P}_i = (p_i^*), \qquad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{8'}$$

Din (8) și (8') deducem

$$(\tau) = (p_1^* p_2^* \ldots p_s^*) = (c), \tag{9}$$

$$c \to (C - 0).$$

Ca atare

$$\tau = c\eta, \tag{10}$$

unde η este o unitate a lui Ω.

Din (3) și (10) rezultă

$$\eta = \frac{2 p_{m+1} p_{m+2} \cdots p_{m+n}}{c}\,\theta + \frac{1 + \rho p_{m+1} p_{m+2} \cdots p_{m+n}}{c}. \tag{11}$$

Ajunși aici, discuția se articulează iarăși după cazurile I) și II) din 1°.

Cazul I. Avem $\rho = 1$. Componentele a și b ale lui $\eta = a\theta + b$ din (11) sînt în C. Prin urmare, $(2b - a) \to C$. Aceasta înseamnă

$$\frac{2}{c} \to C$$

$$\therefore\ c = \pm 1, \qquad \text{respectiv } c = \pm 2. \tag{12}$$

Nu putem lua $c = \pm 1$, deoarece, în virtutea lui (10), am avea $N(\tau) = 1$, împotriva lui (4').

De asemenea, valorile $c = \pm 2$ sînt inacceptabile.

Într-adevăr, introduse în (9) ne dau

$$\zeta p_1^* p_2^* \cdots p_s^* = 2,$$

unde ζ e o unitate a lui Ω. Dar singurele unități raționale ale lui Ω sînt ± 1. Cum $p_1^*, p_2^*, \ldots, p_s^*$ sînt numere prime naturale, conchidem că

$$s = 1, \quad p_1^* = 2. \tag{9'}$$

Avem însă, potrivit ipotezei proprii cazului I)

$$d - 1 \equiv 0 \bmod 4 \equiv 0 \bmod 2$$

adică, în virtutea lui (9'),

$$\therefore d \equiv 1 \bmod p_1^*.$$

Dar 1 e reziduu pătratic (mod p_1^*). Avînd în vedere criteriul menționat în 1°, recunoaștem în p_1^* un număr prim natural produs de ideale prime de grad 1, contrar ipotezei : (p_1^*) ideal prim de grad 2.

E deci indirect dovedit, în cazul I, că τ admite cel puțin un divizor prim $\mathfrak{P}_i = P$ de grad 1.

Cazul II. Avem $\rho = 0$. Cum componentele lui η sînt în C, rezultă din (11)

$$c = \pm 1$$

adică, în virtutea lui (10),

$$N(\tau) = 1,$$

împotriva lui (4').

Prin urmare, rămîne indirect stabilită, și în cazul II, existența unui divizor prim $\mathfrak{P}_i = P$ de grad 1 al lui τ.

În definitiv, τ admite în toate cazurile un ideal prim π_h de grad 1, care-l divide

$$\tau \equiv 0 \bmod \pi_h. \tag{13}$$

Conform ipotezei demonstrației noastre prin absurd, mulțimea normelor tuturor idealelor prime de grad 1, ale ordinului principal Ω este

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_m, p_{m+1}, \ldots, p_{m+n}.$$

Așadar, $N(\pi_h)$ coincide obligatoriu cu unul din aceste numere. Dispunînd de notația indicelui lui π_h, putem deci scrie

$$p_h \equiv 0 \bmod \pi_h \tag{14}$$

pentru unul, anume din indicii de la 0 la $m + n$,

$$0 \leqslant h \leqslant m + n. \tag{14'}$$

Din (3) urmează

$$(\tau - 1)^2 = (2\theta + \rho)^2 p_{m+1}^2 p_{m+2}^2 \cdots p_{m+n}^2 = dp_{m+1}^2 p_{m+2}^2 \cdots p_{m+n}^2. \tag{15}$$

Prin definiție însă, $p_0 p_1 \ldots p_m$ sînt divizorii primi ai lui d. Comparînd relațiile (14) și (14') cu (15), conchidem

$$(\tau - 1)^2 \equiv 0 \bmod p_h \equiv 0 \bmod \pi_h$$

$$\therefore \tau - 1 \equiv 0 \bmod \pi_h, \tag{13'}$$

întrucît π_h e ideal prim.

Dar (13) şi (13′) dau împreună

$$1 \equiv 0 \bmod \pi_h,$$

împotriva inegalităţii $\pi_h < \Omega$ din definiţia idealelor prime.

Infinitatea idealelor prime de grad 1 din ordinul principal Ω al unui corp de numere pătratice e astfel indirect stabilită.

Observaţie. În ordinele primitive O ale unui corp de numere algebrice (aici pătratice) avem o proprietate analoagă dacă ne limităm la idealele, prime din O divizibil-străine cu conductorul.

Într-adevăr, norma în O a unui astfel de ideal $\mathfrak{P}$ coincide cu norma idealului (de asemenea prim) $\Omega\mathfrak{P}$ din ordinul principal Ω. Se exceptează numai divizorii primi ai conductorului, aşadar o mulţime finită.

Dar în Ω există o infinitate de ideale prime P, divizibil străine cu conductorul, de grad 1, deci de normă număr prim raţional. Teoria conductorului arată că în O există o infinitate de ideale prime $\mathfrak{P} = P \cap O$ cu aceeaşi proprietate.

4° Extinderea rezultatului la corpurile de numere ciclice de grad prim l

Numim corp de numere (algebrice) *ciclic de grad* l, o extindere $R(\theta)$ a corpului numerelor raţionale, cu grup al lui Galois ciclic de ordin $l > 1$.

Pentru l prim, $R(\theta)$ este extindere galoisiană. Într-adevăr, fie $H \supset R(\theta)$ extinderea galoisiană minimă a lui $R(\theta)$. Prin definiţie, grupul lui H e de ordin l. Deci gradul extinderii galoisiene H este l. Urmează că numărul prim l se divide cu gradul $l' > 1$ al lui $R(\theta)$. Aşadar, $l' = l$, $\therefore H = R(\theta)$.

Corpurile de numere ciclice de grad l nu sînt kummeriene decît pentru $l = 2$. Numai atunci corpul de începere R conţine rădăcina primitivă de ordin l a unităţii. Altfel, potrivit unui rezultat al nostru [10], $R(\theta)$ nu poate fi construit prin radicali, pornind de la R, pentru $l > 2$ (oricare ar fi metoda). Totuşi, existenţa corpurilor de numere ciclice de orice grad l e asigurată prin soluţia dată de E. Noether [11] inversării teoriei lui Galois în cazul grupurilor abeliene.

Pentru corpurile de numere ciclice de grad prim l, sîntem încă în măsură să dăm o demonstraţie neanalitică (fără intervenţia funcţiei $\zeta(s, K)$ a lui Dedekind) a infinităţii idealelor prime de grad 1, bazată pe acelaşi schematism al lui Euclid din 3°.

Greutatea, însă, de a produce efectiv o bază minimală, în cazul $l > 2$, pentru ordinul principal, schimbă caracterul elementar al demonstraţiei. Sîntem nevoiţi să întărim aparatul algebric, făcînd să intervină teoria conductorului. În schimb, ne putem face liberi de teorema discriminantului, folosită în cazul $l = 2$ (într-o redemonstrare elementară).

Începem prin a stabili ceea ce ni se pare a fi adevăratul nucleu algebric al propoziţiei de care e vorba.

Teoremă. *În corpurile generale de numere algebrice de grad* n, *există cel puţin o mulţime infinită de ideale prime de grad* $g < n$.

Demonstrație. Fie Ω ordinul principal al corpului din enunț iar θ un întreg primitiv. Introducem ordinul regulat generat de θ, adică ordinul primitiv O generat de baza minimală

$$1,\ \theta,\ \theta^2,\ \ldots,\ \theta^{n-1}. \tag{1}$$

Însemnăm cu F conductorul lui O (adică reuniunea tuturor idealelor lui Ω cuprinse în O) iar cu

$$F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_s \tag{2}$$

totalitatea idealelor prime din O care divid pe F. Se știe că fiecare F_i divide un întreg prim rațional $f_i > 1$ bine determinat. Punem

$$f = f_1 f_2 \cdots f_s. \tag{2'}$$

De la acest punct adoptăm demonstrația prin absurd ce stă la baza argumentului lui Euclid.

Presupunem, așadar, că mulțimile idealelor prime din Ω, de grade $g < n$ sînt finite, eventual deșarte. Reuniunea acestor mulțimi rezultă de asemenea finită, eventual deșartă *). Ca atare, mulțimea întregilor primi raționali divizați de aceste ideale e finită, eventual deșartă. Însemnăm întregii raționali primi, în chestiune, cu

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m, \qquad m \geqslant 0. \tag{3}$$

Introducem întregul din O

$$\tau = ef p_1 p_2 \cdots p_m\, \theta + 1, \tag{4}$$

unde e este un întreg rațional disponibil și unde produsul $p_1 p_2 \cdots p_m$ trebuie înlocuit cu 1, cînd mulțimea (3) e deșartă.

Însemnînd cu $\tau^{(i)}$, $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ conjugații lui τ. Ecuațiile algebrice în e

$$\prod_0^{n-1} (\cdot)\, \tau^{(i)} = +1, \qquad \prod_0^{n-1} (\cdot)\, \tau^{(i)} = -1,$$

au un număr finit de rădăcini raționale. Prin urmare, există o infinitate de moduri de a alege pe $e \to (C - 0)$, astfel încît să avem inegalitățile

$$\prod_0^{n-1} (\cdot)\, \tau^{(i)} \neq +1, \qquad \prod_0^{n-1} (\cdot)\, \tau^{(i)} \neq -1,$$

---

*) Cu teorema discriminantului se vede ușor că ultima eventualitate se elimină. Fie $\Delta > 1$ discriminatul lui Ω. Există deci un divizor prim rațional $p > 1$ al lui Δ. Conform teoremei discriminantului (reciproca) p este ramificat în Ω. Avem deci descompunerea în produs de puteri de ideale prime diferite $p = \pi_1^{a_1}\, \pi_2^{a_2} \ldots \pi_u^{a_u}$, unde $N(\pi_i) = p^{g_i}$ și unde, pentru cel puțin un indice, $a_i > 1$. Luînd norma în amîndoi membrii, deducem $n = \sum_1^u a_i g_i$. Conchidem $g_i < n$. Deci mulțimea (3) nu e deșartă.

Ne-am interzis însă folosirea teoremei discriminantului și mai ales a reciprocii ei, a cărei demonstrație nu e ușoară.

la care se adaugă, avînd în vedere (4),

$$\tau \neq 0,$$

deoarece 1, θ face parte din baza minimală a lui O.

Însemnăm cu N norma în Ω. În virtutea ultimelor trei relații, putem scrie

$$N(\tau) = N(\Omega\tau) > 1. \tag{5}$$

Însemnăm cu N norma în O. Avem, de asemenea,

$$N(\tau) = N(O\tau) > 1 \tag{6}$$

altfel ar urma $O\tau = O$, $\therefore$ $\Omega O\tau = \Omega O$, $\therefore$ $\Omega\tau = \Omega$, împotriva lui (5).

Vrem să arătăm că idealul $\Omega\tau$ admite cel puțin un ideal prim divizor $\mathfrak{Q}$ de grad $g < n$.

Conform teoremei fundamentale, avem

$$\Omega\tau = \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_r, \tag{7}$$

unde $\mathfrak{Q}_i$ sînt toți divizorii primi ideali ai lui $\Omega\tau$ în Ω, eventual repetați

Presupunem, prin absurd, că toate idealele $\mathfrak{Q}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$) sînt de grad n. Putem deci scrie, q_i fiind întregul prim rațional divizat de $\mathfrak{Q}_i$,

$$N(\mathfrak{Q}_i) = q_i^n, \qquad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{8}$$

Pe de altă parte, incluziunea

$$O\tau \cup F \subset O$$

se reduce la o egalitate. Altfel, $O\tau$ și F ar avea în O un ideal prim divizor comun, care trebuie să se găsească deci printre idealele (2). Ar urma deci pentru un anume indice i ($i = 1, 2, \ldots, s$)

$$\tau \equiv 0 \mod F_i \tag{9}$$

iar din (2′)

$$f \equiv 0 \mod f_i \equiv 0 \mod F_i. \tag{9'}$$

Congruențele (9) și (9′), introduse în (4), dau

$$1 \equiv 0 \mod F_i,$$

împotriva proprietății $F_i < O$ a idealelor prime din O.

E deci indirect dovedită egalitatea

$$O\tau \cup F = O.$$

Prin urmare, idealul $O\tau$ din O e divizibil-străin cu conductorul. Conform teoriei conductorului, $O\tau$ admite în O o descompunere în produs de ideale prime deduse din descompunerea (7) a dilatării sale $\Omega O\tau = \Omega\tau$ în Ω, conform corespondenței „Erweiterung-Verengung" a lui Dedekind. Ca atare putem scrie

$$O\tau = P_1 P_2 \ldots P_r, \tag{10}$$

$$P_i = \mathfrak{Q}_i \cap O, \qquad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{11}$$

Tot din teoria conductorului rezultă, însemînînd cu $\mathfrak{N}$ norma în O,

$$\mathfrak{N}(P_i) = N(\mathfrak{Q}_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{8'}$$

Pe de altă parte, citim pe (11) că idealele $\mathfrak{Q}_i$ și P_i divid același întreg prim rațional q_i iar pe (8) și (8') că

$$\mathfrak{N}(P_i) = q_i^n. \tag{12}$$

În același timp urmează

$$\mathfrak{N}(Oq_i) = q_i^n. \tag{12'}$$

Comparînd (12), (12') și incluziunea evidentă

$$P_i \supset Oq_i,$$

conchidem

$$P_i = Oq_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Cu aceasta (10) devine

$$O\tau = Oq_1q_2 \ldots q_r,$$

sau

$$O\tau = Oc, \qquad c \to C,$$

de unde

$$\tau = c\eta, \tag{13}$$

cu η unitate în O.

Introducînd (13) în (4) găsim

$$\eta = \frac{ef p_1p_2 \ldots p_m}{c}\,\theta + \frac{1}{c}.$$

Însă η e un întreg al ordinului O de bază minimală (1). Deci

$$\frac{1}{c} \to C \quad \therefore \; c = \pm 1.$$

Egalitatea (13) se scrie acum

$$\tau = \pm \eta$$
$$\therefore N(\tau) = 1,$$

împotriva lui (6).

Rămîne indirect dovedit că $\Omega\tau$ admite în Ω un divizor prim $\mathfrak{Q}$ de grad $g < n$.

Fie p întregul prim rațional divizat de $\mathfrak{Q}$. Dacă mulțimea (3) e deșartă, contrazicerea e evidentă.

Dacă mulțimea (3) nu e deșartă, atunci p coincide, pentru un anume indice, cu unul din numerele (3). Avem, pe rînd, ținînd seama de (4).

$$p = p_i \quad \therefore \; p_i \equiv 0 \bmod \mathfrak{Q}, \quad \therefore \; 1 \equiv 0 \bmod \mathfrak{Q},$$

împotriva neegalității evidente $\mathfrak{Q} < \Omega$.

E deci demonstrat, prin absurd, că una cel puțin din mulțimile de ideale prime de grad $g < n$ e infinită.

Observație. Teorema analitică are, așadar, față de teorema algebrică de mai sus, funcția de a preciza prntre cele $n - 1$ valori $g < n$ una, $g = 1$, pentru care mulțimea idealelor e sigur infinită.

Teoremă. *În corpurile de numere ciclice de grad prim $l > 1$, mulțimea idealelor prime de grad 1 e infinită.*

Demonstrație. Repetînd argumentul de la corpurile kummeriene, vom arăta că idealele prime ale corpurilor ciclice din enunț pot fi numai de grad 1 sau l.

Într-adevăr, fie ω transformarea generatoare a grupului lui Galois corespunzător corpului de numere ciclic, de grad prim $l > 1$. Însemnăm cu $\mathfrak{P}$ un ideal al ordinului său principal Ω.

Fie

$$\mathfrak{P},\ \mathfrak{P}^{\omega},\ \mathfrak{P}^{\omega^2},\ \ldots,\ \mathfrak{P}^{\omega^{l-1}} \tag{14}$$

conjugații lui $\mathfrak{P}$. Se recunoaște imediat că idealele (14) sînt sau toate confundate sau toate diferite (deoarece fiecare din transformările ω^i, $i < l$, sînt generatoare ale grupului ciclic).

Dacă p e întregul prim rațional divizat de $\mathfrak{P}$, atunci

$$N(\mathfrak{P}) = p^g, \qquad g \leqslant l. \tag{15}$$

Pe de altă parte se demonstrează formula [5] *)

$$N(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\mathfrak{P}^{\omega}\,\mathfrak{P}^{\omega^2} \ldots \mathfrak{P}^{\omega^{l-1}}. \tag{16}$$

Folosind teorema fundamentală din corpurile de numere algebrice și comparînd relațiile (15) și (16), conchidem că toți divizorii primi ideali ai lui p coincid cu (14). Avem de considerat două cazuri:

1) Toate idealele (14) coincid. Urmează atunci (α, putere)

$$p = \mathfrak{P}^{\alpha}.$$

Introducînd în (15) și (16), obținem, ținînd seama de ipoteza cazului de față,

$$\mathfrak{P}^{\alpha g} = \mathfrak{P}^{l},$$
$$\therefore\ \alpha g = l,$$
$$\therefore\ g = 1 \text{ respectiv } g = l. \tag{17}$$

2) Toate idealele (14) sînt diferite. Aplicînd descompunerii lui p substituția generatoare ω a grupului lui Galois, recunoaștem că idealele (14) figurează, în descompunere, la aceeași putere

$$p = (\mathfrak{P}\mathfrak{P}^{\omega}\,\mathfrak{P}^{\omega^2} \ldots \mathfrak{P}^{\omega^{l-1}})^{\beta}.$$

Introducînd această expresie a lui p în (15) și (16), avem

$$(\mathfrak{P}\mathfrak{P}^{\omega}\,\mathfrak{P}^{\omega^2} \ldots \mathfrak{P}^{\omega^{l-1}})^{\beta g} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}^{\omega} \ldots \mathfrak{P}^{\omega^{l-1}},$$
$$\therefore\ \beta g = 1,$$
$$\therefore\ g = 1. \tag{17'}$$

Citim pe (17) și (17') că idealele prime din corpul de numere algebrice considerat sînt fie de grad $g = 1$, fie de grad $g = l$.

*) p. 142.

Aplicînd prima teoremă din acest alineat, rezultă că mulțimea idealelor prime de grad $g = 1$ e infinită.

Cu aceasta totul e demonstrat.

§. 3. ARGUMENTUL LUI EUCLID ADAPTAT CAZULUI SPECIAL AL TEOREMEI PROGRESIEI ARITMETICE.

(APLICAȚII LA INFINITATEA IDEALELOR PRIME DE GRAD 1 ÎN CORPURILE DE NUMERE PĂTRATICE)

1° Demonstrația d. A. Châtelet a cazului teoremei lui Dirichlet (asupra progresiei aritmetice $p = 1 + nr$

Ideea demonstrației elementare din acest alineat, așa cum am afirmat și în rîndurile introductive, nu ne aparține; nu putem revendica decît punerea ei la punct și materia din 2° și 3°, care constituie o rafinare, probabil inedită, a cazului special al teoremei lui Dirichlet.

Domnul A. Châtelet, căruia îi datorăm comunicarea primei schițe a teoremei din alineatul de față, susține că prioritatea ar reveni lui Hilbert, ceea ce n-am putut constata. În această situație, vom continua a o atribui domnului Châtelet însuși. Ea constituie o variantă interesantă a demonstrației lui E. Wendt.

Ceea ce caracterizează această variantă, foarte ingenioasă, este aplicarea sub semnul Φ_r, al polinomului de diviziune circulară, a argumentului lui Euclid.

Teoremă. *Fie $r > 1$ un număr natural dat. Există o infinitate de numere prime naturale, de forma* *)

$$p = 1 + nr, \qquad n > 0.$$

Demonstrație. Presupunem, prin absurd, că mulțimea numerelor prime din enunț e finită (eventual deșartă),

$$p_1, p_2, \ldots, p_m. \tag{1}$$

Fie Λ o mulțime infinită de numere naturale, de a cărei nedeterminare vom dispune în alineatele viitoare.

Considerăm produsul

$$l = \lambda p_1 p_2 \ldots p_m r \tag{2}$$

cu un λ disponibil în Λ, a cărui alegere va fi precizată în ceea ce urmează.

În cazul unei mulțimi (1) deșarte, luăm, prin convenție,

$$l = \lambda r. \tag{2'}$$

Introducem polinomul de diviziune circulară $\Phi_r[x]$ relativ la ecuația binomă unitară

$$x^r - 1 = 0. \tag{3}$$

Se știe că primul coeficient al lui $\Phi_r[x]$ e egal cu 1, iar ceilalți, cu întregi raționali. Însă dacă x e o rădăcină primitivă a lui (3), e clar, că

*) Pentru $r = 1$ teorema e încă valabilă, dar coincide cu teorema lui Euclid.

x^{-1} reprezintă o altă rădăcină primitivă. Fie c ultimul coeficient al lui $\Phi_r[x]$. Dispunînd de semn, urmează identitatea

$$\pm \frac{1}{c} x^{\varphi(r)} \Phi_r[x^{-1}] = \Phi_r[x],$$

unde $\varphi(r)$ e gradul lui $\Phi_r[x]$. Deci $\pm \frac{1}{c} = 1$ sau

$$c = \pm 1.$$

Încît pentru $\Phi_r[x]$ avem identitatea

$$\Phi_r[x] = x\Psi_r[x] \pm 1, \tag{4}$$

unde $\Psi_r[x]$ înseamnă alt polinom cu coeficienții întregi raționali.

Cum mulțimea Λ e infinită, putem alege în (2), respectiv în (2'), pe λ astfel încît l să nu coincidă cu niciuna din rădăcinile (raționale), evident în număr finit, ale ecuațiilor

$$\Phi_r[x] = 1, \qquad \Phi_r[x] = -1$$

și deci să avem*)

$$\Phi_r[l] \neq 1, \qquad \Phi_r[l] \neq -1. \tag{5}$$

Din cele arătate, conchidem că avem în $\Phi_r[l]$ un întreg rațional diferit de unitățile lui C,

$$\Phi_r[l] \longrightarrow C, \qquad \Phi_r[l] \neq \pm 1.$$

Ca atare, există un număr prim natural $p > 1$ divizor al lui $\Phi_r[l]$,

$$\Phi_r[l] \equiv 0 \bmod p, \tag{6}$$

$$p > 1. \tag{6'}$$

Citim pe (2), (4), (6), incongruența

$$r \not\equiv 0 \bmod p. \tag{5'}$$

Să concepem ecuația (3) definită nu în corpul prim de caracteristică nulă, ci în corpul prim de caracteristică $p > 1$,

$$x^r - 1 \equiv 0 \bmod p. \tag{3'}$$

Ea are, conform lui (5'), tot atîtea rădăcini primitive ca și (3). Polinomul care admite ca rădăcini simple aceste rădăcini primitive, de prim coeficient egal cu 1, e dat de aceeași formulă ca și $\Phi_r[x]$,

$$\Phi_r[x] = \prod_t (x^t - 1)^{\mu\left(\frac{r}{t}\right)}, \tag{7}$$

unde t străbate toți divizorii lui r iar μ e funcția lui Möbius.

*) În această introducere a factorului arbirar λ, și în folosirea lui pentru garantarea inegalităților (5), (5') constă rectificarea adusă de noi demonstrației.

Domnul Châtelet, în comunicarea sa orală, lua $l = p_1 p_2 \ldots p_m$.

În definitiv, rădăcinile primitive ale lui (3′) coincid cu toate rădăcinile ecuației

$$\Phi_r[x] \equiv 0 \bmod p \tag{6''}$$

concepută cu coeficienții în corpul prim de caracteristică p.

Ea nu mai trebuie numită ecuația de diviziune circulară, deoarece, în general, e reductibilă. Dar această împrejurare nu are importanță aici.

Pe (6) și (6″) citim că l e rădăcină primitivă a lui (3′).

Din (4)și (6) rezultă

$$l\,\Psi[l] \pm 1 \equiv 0 \bmod p,$$
$$\Psi_r[l] \longrightarrow C. \tag{8}$$

Această relație arată că numărul natural l e prim cu p. Teorema lui Fermat dă atunci

$$l^{p-1} - 1 \equiv 0 \bmod p.$$

Dar l e rădăcină primitivă a lui (3′). Prin urmare, cea mai mică putere (număr natural) ce reduce pe l la 1 mod p este r. Conchidem

$$p - 1 = n\,r,$$

$$\therefore\ p = 1 + n\,r, \qquad n > 0. \tag{9}$$

Dacă mulțimea (1) e deșartă, contrazicerea e evidentă.

Dacă (1) nu e deșartă, atunci avem, pentru un anume indice i

$$p = p_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{10}$$

Din (2), (8) și (10) deducem

$$\pm 1 \equiv 0 \bmod p_i, \tag{11}$$

împotriva condiției $p_i = p > 1$.

E astfel indirect dovedită existența unei infinități de numere prime cu caracterele din enunț.

Teorema lui Dirichlet generală a fost demonstrată [16] cu mijloace elementare dar nu simple, de către *P. Erdös* și *S.Selberg*, prin 1948.

2°. Rafinarea cazului special al teoremei lui Dirichlet pentru o rație impară liberă de pătrate

T e o r e m ă. *Fie $r > 1$ un număr natural, liber de pătrate, dat. Există o infinitate de numere prime naturale de forma*

$$p = 1 + n\,r, \qquad n > 0,$$
$$p \equiv -1 \bmod 4.$$

Demonstrație. Reproducem principalele momente ale demonstrației din 1°, dîndu-le însă o altă orientare.

Admitem, prin absurd, că mulțimea numerelor din enunț e finită (eventual deșartă),

$$p_1, p_2, \ldots, p_s, \tag{1*}$$

unde

$$p_i \equiv 1 + n_i r, \qquad n_i > 0, \qquad i = 1,2,\ldots,s, \tag{1$_1^*$}$$

$$p_i \equiv -1 \bmod 4, \; r \not\equiv 0 \bmod 2. \tag{1$_2^*$}$$

Luăm ca mulțime infinită Λ din 1°, mulțimea tuturor numerelor naturale λ cu

$$\lambda \equiv 2 \bmod 4.$$

Cu aceasta produsul (2) din 1° devine

$$l = (4\lambda^* + 2)\, p_1 p_2 \ldots p_s r, \qquad (4\lambda^* + 2) \to \Lambda. \tag{2*}$$

Din (1$_2^*$) și (2*) conchidem

$$l \equiv 2 \bmod 4. \tag{2$_1^*$}$$

Demonstrăm, ca în 1°, că λ^* poate fi ales astfel încît întregul $\Phi_r[l]$, unde $\Phi_r[x]$ are aceeași semnificație, să admită divizori primi $p > 1$ iar $r \not\equiv 0 \bmod p$.

Vrem să arătăm (și acesta e aportul, față de 1°, al teoremei), că putem alege, printre acești divizori primi, unul cu $p \equiv -1 \bmod 4$.

Din identitatea (7) din 1°, deducem, făcînd substituția (2*),

$$\Phi_r[l] = \prod_t (l^t - 1)^{\mu\left(\frac{r}{t}\right)}, \tag{7*}$$

unde t parcurge toți divizorii lui r.

Citim pe (2$_1^*$) că diferențele $(l^t - 1)$ sînt prime cu 4; sînt deci reprezentanți ai unităților inelului rezidual $\frac{C}{(4)}$. Ca atare, deși unii din exponenții $\mu\left(\frac{r}{t}\right)$ sînt negativi, putem aplica în (7*) omomorfismul $C \longrightarrow \frac{C}{(4)}$ și deduce

$$\Phi_r([l] \equiv \prod_t (2^t - 1)^{\mu\left(\frac{r}{t}\right)} \bmod 4. \tag{7$_1^*$}$$

Printre divizorii lui r avem și pe $t = 1$. E clar că în (7$_1^*$) putem lua

$$2^t - 1 \equiv -1 \bmod 4 \text{ pentru } t > 1 \quad \text{și} \quad 2^t - 1 \equiv 1 \bmod 4 \text{ pentru } t = 1.$$

Congruența (7$_1^*$) se scrie deci

$$\Phi_r[l] \equiv (-1)^{\sum_t \mu\left(\frac{r}{t}\right)} (-1)^{-\mu(r)} (1)^{\mu(r)} \bmod 4, \tag{7$_2^*$}$$

unde t parcurge toți divizorii lui r.

Din teoria funcției lui Möbius avem însă

$$\sum_t \mu\left(\frac{r}{t}\right) = 0$$

și totdeodată

$$\mu(r) = \pm 1,$$

deoarece, prin ipoteză, r e liber de pătrate (altfel am fi avut $\mu(r) = 0$).

Încît (7_2^*) devine*)

$$\Phi_r[l] \equiv -1 \bmod 4.$$

Această congruență arată, mai întîi, că printre divizorii primi $p > 1$ ai lui $\Phi_r[l]$ nu intră $p = 2$, încît resturile mod 4 ale divizorilor primi ai lui $\Phi_r[l]$ sînt ± 1. Astfel, în al doilea rînd, citim pe congruența de mai sus că $\Phi_r[l]$ admite cel puțin un divizor prim p cu

$$p \equiv -1 \bmod 4. \qquad (9^*)$$

Recunoaștem, întocmai ca în 1°, că $p - 1$ se divide cu r, prin urmare,

$$p = 1 + nr, \qquad n > 0. \qquad (9_1^*)$$

Dacă mulțimea (1^*) e deșartă, (9^*) și (9_1^*) dau imediat o contrazicere.

Dacă (1^*) nu e deșartă, atunci (9^*) și (9_1^*) arată că pentru un anume i avem

$$p = p_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, s. \qquad (10^*)$$

Din (2^*) și (10^*) din alineatul de față, și din (8) din 1°, deducem congruența imposibilă (11) din 1°.

E astfel indirect dovedit că mulțimea numerelor prime din enunț e infinită.

3° Rafinarea cazului special al teoremei lui Dirichlet pentru o rație pară, liberă de pătrate

T e o r e m ă. *Fie r un număr natural, divizibil cu 2 și liber de pătrate, dat. Există o infinitate de numere prime naturale, de forma*

$$p = 1 + nr, \qquad n > 0,$$
$$p \equiv \pm 3 \bmod 8.$$

Demonstrație. Admitem, prin absurd, că mulțimea numerelor din enunț e finită (eventual deșartă)

$$p_1, p_2, \ldots, p_s, \qquad (1^{**})$$

unde

$$p_i = 1 + n_i r \qquad n_i > 0, i = 1,2,\ldots,s, \quad (1_1^{**})$$
$$p_i \equiv \pm 3 \bmod 8. \qquad (1_2^{**})$$

*) Deoarece $\Phi_r[l]$ poate fi și negativ nu putem deduce, de aici, existența divizorilor primi $p > 1$. Acest punct esențial al demonstrației trebuie stabilit în prealabil, așa cum am văzut.

Mulțimea infinită Λ din 1° o identificăm cu mulțimea numerelor naturale

$$\lambda \equiv \pm 2 \mod 8.$$

Produsul (2) din 1° devine

$$l = (8\lambda^{**} \pm 2)\, p_1 p_2 \ldots p_s r, \quad r \equiv 2 \mod 4. \qquad (2^{**})$$

Din (1_2^{**}) rezultă

$$p_1 p_2 \ldots p_s \equiv \begin{cases} \pm 1 \\ \pm 3 \end{cases} \mod 8$$

Deci în (2^{**}) putem alege totdeauna semnul lui 2 astfel încît să avem

$$l \equiv +2 \mod 8. \qquad (2_1^{**})$$

Fie (t) mulțimea tuturor divizorilor naturali ai lui r. Citim pe (2_1^{**}) că diferențele $(l^t - 1)$ sînt prime cu 8. Prin urmare, punînd în $\Phi_r[x]$ din 1°, în locul argumentului general, valoarea l, obținem relația

$$\Phi_r[l] = \prod_t (l^t - 1)^{\mu\left(\frac{r}{t}\right)}, \qquad (7^{**})$$

unde putem aplica omomorfismul $C \xrightarrow{(8)} \overline{C}$, cu toate că anumiți exponenți sînt negativi. Rezultă

$$\Phi_r[l] \equiv \prod_t (2^t - 1)^{\mu\left(\frac{r}{t}\right)} \mod 8. \qquad (7_1^{**})$$

Însă r e par. Deci, printre divizorii t intră 1 și 2. Deoarece, evident,

$$2^t - 1 \equiv -1 \mod 8, \quad t > 2,$$

$$2^t - 1 \equiv 3 \mod 8, \quad t = 2,$$

$$2^t - 1 \equiv 1 \mod 8, \quad t = 1,$$

congruența (7_1^{**}) devine

$$\Phi_r[l] \equiv (-1)^{\sum_t \mu\left(\frac{r}{t}\right)} (-1)^{-\mu\left(\frac{r}{2}\right)} (-1)^{-\mu(r)} (3)^{\mu\left(\frac{r}{2}\right)} (1)^{\mu(r)} \mod 8.$$

Pe de altă parte, r e liber de pătrate. Ca atare

$$\sum_t \mu\left(\frac{r}{t}\right) = 0, \quad \mu\left(\frac{r}{2}\right) = \pm 1, \quad \mu(r) = \mp 1,$$

cu corespondența semnelor.

Cu aceasta, ultima congruență se scrie

$$\Phi_r[l] \equiv 3 \mod 8,$$

deoarece $3 \equiv 3^{-1} \mod 8$.

Observăm pe această congruență că întregul rațional $\Phi_r[l]$ admite divizori primi naturali $p > 1$: altfel am avea $|\Phi_r[l]| = \pm 1$. împotriva congruenței de mai sus*). Citim, mai departe, pe aceeași congruență, că printre divizorii primi ai lui $\Phi_r[l]$ nu intră $p = 2$. Urmează că toți divizorii primi ai lui $\Phi_r[l]$ sînt de forma

$$p \equiv \begin{cases} \pm 1 \\ \pm 3 \end{cases} \bmod 8.$$

Nu toți pot intra în tipul $p \equiv \pm 1 \bmod 8$. Altfel am avea $\Phi_r[l] \equiv \pm 1 \bmod 8$. E deci probată existența a cel puțin unui divizor prim de forma

$$p \equiv \pm 3 \bmod 8. \qquad (9^{**})$$

Cu ajutorul teoremei lui Fermat recunoaștem, întocmai ca în 1°, că $p - 1$ se divide la r. Deci

$$p = 1 + n r, \qquad n > 0. \qquad (9_1^{**})$$

O dată ajunși aici, concluzia rezultă imediat. Într-adevăr, dacă mulțimea (1^{**}) e deșartă, contrazicerea e evidentă, în virtutea lui (9^{**}) și (9_1^{**}). Dacă (1^{**}) nu e deșartă, atunci (9^{**}) și (9_1^{**}) arată că pentru un anume i din (1^{**}) avem

$$p = p_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant s. \qquad (10^{**})$$

Atunci, din (2^{**}) și (10^{**}) din alineatul de față, și din (8) din 1°, deducem congruența imposibilă (11) din 1°.

E astfel indirect dovedit că mulțimea numerelor din enunț e infinită.

4° Redemonstrarea infinității idealelor prime de grad 1, cu legea reciprocității și cazul special al progresiei aritmetice, în corpurile de numere pătratice generale

Fie d discriminantul corpului. Cum nu totdeauna acesta e divizibil prin 4, luăm drept rație numărul natural

$$r = 4|d|.$$

Conform teoremei din 1°, există o infinitate de numere prime de forma

$$p = 1 + 4 n |d|, \qquad n > 0. \qquad (1)$$

E clar că numerele acestea sînt diferite de 2.

Discriminantul d e de forma (vezi § 2, 1°)

$$d = 2^\alpha \varepsilon p_1 p_2 \ldots p_m, \qquad m \geqslant 0, \qquad (2)$$

$$\alpha = 0, 2, 3, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

*) Atragem atenția că existența unui divizor prim $p > 1$ s-a demonstrat aici mai pe scurt ca în 1° și 2°.

unde $p_1, p_2, \ldots, p_m$ înseamnă numere prime naturale diferite între ele și diferite de 2,

$$p_i > 2, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$p_i \neq p_j, \qquad i \neq j, \; i,j = 1, 2, \ldots, m.$$

Legea reciprocității, a lui Gauss — Legendre, ne dă

$$\left(\frac{d}{p}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)^{\alpha} \prod_1^m \left(\frac{p_i}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{1-\varepsilon}{2}} (-1)^{\frac{p^2-1}{8}\alpha} (-1)^{\sum_1^m \frac{p-1}{2}\frac{p_i-1}{2}} \prod_1^m \left(\frac{p}{p_i}\right),$$

adică

$$\left(\frac{d}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\left(\frac{p+1}{4}\alpha + \frac{1-\varepsilon}{2} + \sum_1^m \frac{p_i-1}{2}\right)} \prod_1^m \left(\frac{p}{p_i}\right). \tag{3}$$

Din (1) rezultă însă

$$\frac{p-1}{2} \equiv 0 \bmod 2, \tag{4}$$

iar din (1) și (2)

$$p \equiv 1 \bmod p_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\therefore \quad \prod_1^m \left(\frac{p}{p_i}\right) = 1. \tag{5}$$

Cu (4) și (5) egalitatea (3) devine

$$\left(\frac{d}{p}\right) = 1,$$

deci există o infinitate de numere prime raționale (1) pentru care discriminantul e rest pătratic mod p. Așadar (§ 2, 1°), există o infinitate de ideale prime care au ca norme numere prime (la puterea întîi): există o infinitate de ideale prime de grad 1.

§ 4. DEMONSTRAȚIA ALGEBRICĂ A INFINITĂȚII IDEALELOR PRIME DE GRAD 2, PENTRU TOATE CORPURILE DE NUMERE PĂTRATICE, MAI PUȚIN CORPURILE DE DISCRIMINANT:

$$d > 0, \quad d \equiv 0 \bmod 8, \; \frac{d}{8} \equiv -1 \bmod 4;$$

$$d > 0, \qquad d \equiv 1 \bmod 4.$$

1° Punerea problemei

1°. Infinitatea idealelor prime într-un corp de numere algebrice este, cum am văzut în § 1, 4°, o simplă consecință a teoremei lui Euclid. În

cazul corpurilor de numere pătratice, aceste ideale se împart în două mulțimi complimentare: cele de grad 1 și cele de grad 2.

Observația că una din aceste mulțimi e infinită e banală. Nebanală e însă informația asupra acelei mulțimi sigur infinită. Astfel teorema asupra infinității idealelor prime de grad 1 e remarcabilă. Ea subsistă pentru corpurile de numere algebrice de grad n, dar în acest caz general stă foarte adînc; nu poate fi demonstrată cu mijloace algebrice, doar cu teoria funcției $\zeta(s, K)$ a lui Dedekind. În § 2 și § 3 am arătat însă, pe două căi deosebite, cum pentru $n = 2$ teorema e demonstrabilă algebricește.

Cu atît mai mult e remarcabilă teorema asupra infinității amîndoror mulțimi complementare. Ea e de mult cunoscută pentru corpurile de numere pătratice [12], [13] dar aparține în propriu corpurilor kummeriene [14]. Metoda de demonstrație e analitică: teoria seriilor lui Dirichlet, cu caractere L (s,χ).

E deci vrednic de subliniat faptul că pentru $n = 2$ infinitatea idealelor prime de grad 2 e încă demonstrabilă algebricește pentru toate cazurile, afară de cazurile unui discriminant pozitiv, cu

$$d > 0, d \equiv 1 \bmod 4, \textit{ respectiv } d > 0, d \equiv 0 \bmod 8, \frac{d}{8} \equiv -1 \bmod 8,$$

în care metoda analitică a lui Dirichlet pare de neocolit.

Această demonstrație analitică o sprijinim pe cele două rafinări ale cazului special al teoremei progresiei aritmetice din § 3, 2° și 3°, cît și pe demonstrația algebrică a lui M. Bauer [1] a unui alt caz special al progresiei aritmetice.

Demonstrația lui Bauer nu folosește schematismul lui Euclid, ci o anume lemmă a lui Kronecker. În definitiv, fără apel la analiză, el stabilește următoarea propoziție:

Există o infinitate de numere prime naturale de forma

$$p = nr - 1,$$

unde $r > 1$ e un număr natural dat iar n înseamnă un număr natural variabil.

Vezi, de altfel [16]

2° Consecințele teoremei lui M. Bauer

Teoremă. *În corpurile de numere pătratice de discriminant negativ, se poate demonstra pe cale algebrică existența unei infinități de ideale prime de grad 2.*

Demonstrație. Aplicînd formei generale (2) din § 3, 4° a discriminantului, legea reciprocității, ajungem la egalitatea generală (3) din § 3, 4°, care se mai scrie

$$\left(\frac{d}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}\alpha} (-1)^{\frac{p-1}{2}\left(\frac{1-\varepsilon}{2} + \sum_1^m \frac{p_i - 1}{2}\right)} \prod_1^m \left(\frac{p}{p_i}\right). \qquad (1)$$

Observăm că produsul $\varepsilon p_1 p_2 \cdots p_m$ din § 3, 4°, formula (2), nu se divide cu 2. Ca atare

$$\varepsilon p_1 p_2 \cdots p_m \equiv (-1)^{\omega} \mod 4 \tag{2}$$

cu ω întreg rațional.

Pe de altă parte, cum $\varepsilon = \pm 1$ iar p_i este impar, avem evident

$$\varepsilon \equiv (-1)^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \mod 4, \quad p_i \equiv (-1)^{\frac{p_i-1}{2}} \mod 4,$$

$$i = 1, 2, \cdots, m,$$

astfel încît congruența (2) e chivalentă cu egalitatea

$$(-1)^{\frac{1-\varepsilon}{2} + \sum_1^m \frac{p_i-1}{2}} = (-1)^{\omega}. \tag{3}$$

Cu aceasta (1) se scrie

$$\left(\frac{d}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}\alpha} (-1)^{\frac{p-1}{2}\omega} \prod_1^m \left(\frac{p}{p_i}\right). \tag{4}$$

În această formulă generală să facem uz de teorema lui B a u e r. Luăm drept rație numărul natural

$$r = 8 p_1 p_2 \cdots p_m, \tag{5}$$

unde produsul $p_1 p_2 \cdots p_m$ trebuie luat egal cu 1 pentru $m = 0$. Introducem, conform teoremei lui Bauer, înfinitatea de numere prime de forma

$$p = nr - 1. \tag{5'}$$

Din (5) și (5') urmează

$$p^2 \equiv 1 \mod 16$$

$$\therefore \frac{p^2-1}{8} \equiv 0 \mod 2. \tag{6}$$

Pe de altă parte, conform lui (5) și (5'), avem încă

$$\left(\frac{p}{p_i}\right) = \left(\frac{-1}{p_i}\right) = (-1)^{\frac{p_i-1}{2}},$$

$$\therefore \prod_1^m \left(\frac{p}{p_i}\right) = (-1)^{\sum_1^m \frac{p_i-1}{2}}$$

sau, folosind relația (3),

$$\prod_1^m \left(\frac{p}{p_i}\right) = (-1)^{\omega + \frac{1-\varepsilon}{2}}, \tag{7}$$

Cu (6) și (7) formula (4) devine

$$\left(\frac{d}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\omega + \omega + \frac{1-\varepsilon}{2}}. \tag{8}$$

Dar din (5) și (5′)

$$\frac{p-1}{2} \equiv 1 \bmod 2,$$

astfel încît (8) ne dă

$$\left(\frac{d}{p}\right) = (-1)^{2\omega + \frac{1-\varepsilon}{2}}$$

$$\therefore \left(\frac{d}{p}\right) = (-1)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}.$$

Deci, dacă discriminantul corpului e negativ (adică $\varepsilon = -1$), rezultă

$$\left(\frac{d}{p}\right) = -1.$$

Există deci o infinitate de numere prime (5′) pentru care d este nonreziduu pătratic mod p. Ca atare (vezi § 2,1°), idealele principale (p) generate în ordinul principal Ω de aceste numere $[p]$ formează o mulțime infinită de ideale prime de grad. 2.

Cu aceasta totul e demonstrat.

3° Consecințele rafinărilor cazului special al progresiei aritmetice. Teorema finală

T e o r e m ă. *În corpurile de numere pătratice de discriminant pozitiv d caracterizat prin una sau alta din condițiile (1), (2),*

$$d \equiv 0 \bmod 4, \qquad \frac{d}{4} \equiv -1 \bmod 4 \tag{1}$$

$$d \equiv 0 \bmod 8, \qquad \frac{d}{8} \equiv 1 \bmod 4 \tag{2}$$

se poate demonstra pe cale algebrică existența unei infinități de ideale prime de grad 2.

Demonstrație. Considerăm cazul (1).

Cu înlocuirea din (1), formula generală (4) din 2° devine

$$\left(\frac{d}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\omega} \prod_1^m \left(\frac{p}{p_i}\right), \tag{3}$$

căci $\alpha = 2$.

Comparînd (2) din 2° cu ipoteza $\varepsilon\, p_1\ p_2 \dots p_m \equiv -1 \bmod 4$, adică $\frac{d}{4} \equiv -1 \bmod 4$, rezultă

$$\omega \equiv 1 \bmod 2,$$

deci (3) se mai scrie

$$\left(\frac{d}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \prod_1^m \left(\frac{p}{p_i}\right). \tag{4}$$

În virtutea rafinării din § 3, 2° a cazului special al progresiei aritmetice, există, față de o rație impară $r > 1$ liberă de pătrate

$$r = p_1\ p_2 \cdots p_m, \tag{5}$$

o infinitate de numere prime naturale

$$p = n\,r + 1 \tag{5'}$$

satisfăcînd la relația

$$p \equiv -1 \bmod 4. \tag{5''}$$

Pentru o rație $r = 1$ proprietatea exprimată de (5') și (5'') se menține încă și se demonstrează cît se poate de elementar*). Prin urmare, în (5') și (5'') rația r poate fi concepută ca un număr natural impar $r \geqslant 1$ liber de pătrate. Ca atare, în (5) avem

$$m \geqslant 0.$$

Din (5), (5') urmează

$$\left(\frac{p}{p_i}\right) = 1$$

$$\dots \prod_1^m \left(\frac{p}{p_i}\right) = 1, \tag{4'}$$

iar din (5'')

$$\frac{p-1}{2} \equiv 1 \bmod 2. \tag{4''}$$

Introducînd (4') și (4'') în (4) obținem

$$\left(\frac{d}{p}\right) = -1.$$

---

*) Figurează ca problemă în *Bazele Teoriei Numerelor* de I. Vinogradov. Iată dezvoltarea soluției simple indicată acolo.

Presupunem, în șirul numerelor naturale, că mulțimea numerelor prime cu $p \equiv -1 \bmod 4$ ar fi mulțimea finită $p_1, p_2, \dots, p_s$. Formăm numărul $N = 4p_1p_2 \dots p_s - 1$. Eclar că $N > 1$. Pe de altă parte, $N \equiv -1 \bmod 4$. Deci divizorii săi primi sînt de forma $P \equiv \pm 1 \bmod 4$. E clar că nu toți divizorii P sînt de forma $P \equiv 1 \bmod 4$, deoarece ar urma $N \equiv 1 \bmod 4$. Există deci un $P \equiv -1 \bmod 4$. Conform ipotezei, pentru un indice $1 \leq i \leq s$ avem $P = p_i$. În definitiv, $N \equiv 0 \bmod p_i$ alături de $N \equiv -1 \bmod p_i$. Ne contrazicem. Proprietatea e demonstrată prin absurd.

Deci (§ 2, 1°) idealele principale generate în ordinul principal de infinitatea de numere prime (5′) și (5″) reprezintă o mulțime infinită de ideale prime de grad 2.

Considerăm cazul (2).

Avem, corespunzător acestui caz, în formula generală (4) din 2°,

$$\alpha = 3.$$

Formula (4) din 2° devine

$$\left(\frac{d}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} (-1)^{\frac{p-1}{2}\omega} \prod_1^m \left(\frac{p}{p_i}\right). \tag{6}$$

Confruntînd relația (2) din 2° cu ipoteza (2) a cazului de față, rezultă

$$\omega \equiv 0 \bmod 2.$$

Cu aceasta (6) se scrie

$$\left(\frac{d}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \prod_1^m \left(\frac{p}{p_i}\right). \tag{7}$$

Introducem ratia pară, liberă de pătrate,

$$r = 2\, p_1\, p_2 \cdots p_m. \tag{8}$$

Conform rafinării din § 3, 3° a cazului special al progresiei aritmetice, există o infinitate de numere prime naturale

$$p = nr + 1, \tag{8′}$$

cu

$$p \equiv \pm 3 \bmod 8. \tag{8″}$$

În virtutea lui (8) și (8′), avem

$$\left(\frac{p}{p_i}\right) = 1$$

$$\cdots \prod_1^m \left(\frac{p}{p_i}\right) = 1. \tag{7′}$$

În virtutea lui (8″) urmează

$$p = 8q \pm 3$$

$$\cdots \quad p^2 - 1 = 8\,(8q^2 \pm 6q + 1)$$

$$\cdots \quad \frac{p^2-1}{8} \equiv 1 \bmod 2. \tag{7″}$$

Introducînd (7′) și (7″) în (7), găsim în definitiv

$$\left(\frac{d}{p}\right) = -1.$$

Citim pe această relație că discriminantul d este nonreziduu cuadratic mod p.

Ca atare (§ 2, 1°), idealele principale generate în ordinul principal de infinitatea de numere prime (8′) și (8″) constituie o mulțime infinită de ideale prime de grad 2.

Cu aceasta totul e demonstrat.

Rezultatele din alineatul de față comparate cu acela din 2°, conduc la următoarea,

Teoremă finală. *Existența unei infinități de ideale prime de grad 2 e demonstrabilă pe cale algebrică pentru toate corpurile de numere pătratice, afară poate de cele cu discriminant de forma*

$$d > 0,$$

unde

$$d \equiv 1 \bmod 4, \quad \textit{respectiv} \quad d \equiv 0 \bmod 8, \quad \frac{d}{8} \equiv -1 \bmod 8.$$

АРГУМЕНТ ЕВКЛИДА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОСТИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР И ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

Со времени Дирихле алгебраическая теория чисел принуждена зачастую прибегать к анализу.

Тем не менее арифметики с алгебраической душой, то есть настоящие, считают это сотрудничество неестественным и преходящим. Они переносят не без некоторого нетерпения эту зависимость, которую они всегда считали порабощающей, если не унизительной.

Но как только им удается выбить с места их опасных товарищей по оружию — аналитиков и отвоевать у них даже самую незначительную позицию, они спешат оповестить о содеянном ими подвиге.

Однако нельзя не отдать этим пуристам некоторой справедливости. Можно думать, что наука, путающаяся еще в непредусмотренных вопросах, возникающих на пути ее исследований, и не могущая извлечь из своей собственной почвы элементы, необходимые для ее развития, далеко еще не достигла некоторой степени зрелости.

Настоящая очень элементарная статья находит себе обоснование в этом алгебраическом радикализме, который я хотел проявить здесь, не очень однако, его придерживаясь вообще.

Являясь результатом методических соображений, настоящая работа прежде всего имеет целью выявить алгебраическое ядро известной, восходящей ко времени Дирихле[1], теоремы о бесконечности простых идеалов 1-й степени в полях алгебраических чисел, доказательство которой основано на использовании функции $\zeta(s, k)$ Дедекинда, являющейся обобщением функции Римана.

Основной результат, получаемый строго алгебраическим (хотя и не элементарным) методом, следуя схеме Евклида, но опираясь на теорию кондуктора, представляется в следующем виде (§ 2):

[1] Что касается квадратичных тел.

В главном порядке поля алгебраических чисел n-й степени находится, по крайней мере, одно бесконечное множество простых идеалов степени $g < n$.

Тотчас же видно, что теорема Дирихле о бесконечности простых идеалов 1-й степени устанавливается таким образом алгебраически для любого циклического расширения поля рациональных чисел простой степени l.

Случай квадратичных полей соответствует $l = 2$.

Но оказывается, что доказательство в этом случае может быть сделано совершенно элементарным — освобожденным от теории кондуктора и отнесенным только к нескольким очень простым теоремам, свойственным квадратичным полям (§ 2).

★

Известно, что в вышеуказанную теорему внесено для полей Куммера дополнение, а именно: в поле Куммера простой степени l существует бесконечное количество простых идеалов степени l. Эта теорема встречалась также и у Дирихле и Кронекера для квадратичного случая $l = 2$, поэтому она здесь будет называться теоремой Дирихле — Кронекера.

Полное доказательство этой теоремы, даже для случая $l = 2$ требует применения рядов Дирихле характера $L(s, \chi)$.

Поставим себе задачей алгебраически обосновать теорему Дирихле — Кронекера по крайней мере для нескольких довольно широких квадратичных полей.

Исходим из алгебраического доказательства Е. Вендта[1], соответственно, М. Бауэра[2] частного случая этой теоремы для арифметической прогрессии: $p = nr + 1$, соответственно $p = nr - 1$.

Следует тут же упомянуть, что в настоящей статье речь идет не о самом первоначальном доказательстве Вендта, а об его остроумном видоизменении, сообщенном мне в общих чертах г-ном А. Шателе в перерыве между двумя заседаниями Съезда математиков в Бухаресте (июнь 1956 года). Выражаю ему за это в настоящей статье мою горячую благодарность[3].

Применяя доказательство г-на Шателе, строго проведенное мною (§ 3), получаем сперва строго алгебрическим путем следующее уточнение результата Вендта (§ 3):

---

[1] E. Werdt. J. f. reine u, angewandte Math. (1895), B. 115.

[2] M. Bauer. J. f. reine u. angewandte Math. (1906), B. 131.

[3] Во время Съезда математиков в Бухаресте я категорически отрицал обоснованность доказательства г-на А. Шателе, но признаю, что в этом я был до известной степени неправ. Правда, в доказательстве, указанном А. Шателе был пробел (впоследствии заполненный мною), но в нем содержалась правильная идея, к тому же весьма тонкая.

Если не считать трансцендентного доказательства Гека (Theorie der algebraischen Zahlen, 1923, str. 127) мне в то время были известны, в отношении особого случая $p = nr + 1$ арифметической прогрессии, лишь первые доказательства В. А. Лебега и М. А. Серре для некоторых форм отношения r. Статьи Вендта и Бауэра были прочитаны мною совсем недавно.

Г-н Шателе утверждает, что идею, лежащую в основе его доказательства, можно найти у Гильберта. Однако найти ее не удалось и потому я сильно подозреваю, что она принадлежит самому г-ну Шателе.

Для знаменателя, свободного от квадратов, соответственно, четного и свободного от квадратов, существует бесконечное количество простых чисел $p = nr + 1$, удовлетворяющих $p \equiv -1 \bmod 4$, соответственно, $p \equiv \pm 3 \bmod 8$.

Опираясь на доказательство Бауэра и на уточнение результата Вендта при помощи закона взаимности алгебраически обосновываем эти довольно распространенные случаи теоремы Дирихле — Кронекера (§ 4):

В полях квадратичных чисел отрицательного дискримината d : $d < 0$, а также положительного дискримината, характеризуемого $d > 0$ $d \equiv 0 \bmod 4$, $\frac{d}{4} \equiv 1 \bmod 4$, соответственно $d \equiv 0 \bmod 8$, $\frac{d}{8} \equiv 1 \bmod 4$, существует бесконечное чиско простых идеалов 2-й степени.

★

Настоящая статья об алгебризации теорем Дирихле и Кронекера, касающиеся бесконечности некоторых множеств простых идеалов, начинается с родственной проблемы о бесконечности непроводимых элементов в необязательно коммутативных кольцах (§ 1).

Вопрос представляет интерес только при наличии основной теоремы, относящейся к разложению на неприводимые элементы, то есть если: 1) неприводимые элементы эффективно доставляют первичный материал для некоторых мультипликативных полугрупп кольца; 2) если можно охарактеризовать инварианты разложений на произведения неприводимых элементов одного и того же элемента.

Для этого вводим следующие определения:

Ядро произведения неприводимых элементов (не обязательно коммутативного) = множеству правых классов смежности, которым принадлежат множители.

Последовательности делителей = последовательность элементов, каждый член которой делит справа или слева (безразлично) предыдущий член[1]).

Кольцу главных идеалов справа = кольцо Ω с подкоммутативным единичным элементом справа

$$\Omega\,\omega \subset \omega\,\Omega,\ \omega \in \Omega,$$

группа единиц которого E подперестановочна вправо с полугруппой O неделителей нуля

$$\delta E, \subset E\,\delta \in \delta,$$

и в которой каждый двусторонний идеал I, содержащий по меньшей мере один неделитель нуля, является главным справа

$$I = \eta\,\Omega$$

[1] В коммутатитных полугруппах, в которых деление двух последовательных членов может всегда считаться делением справа и потому транзитивным, последовательности делителей совпадают с цепями делителей.

Исходя из этого, доказываем эти некоммутативные аналогии классических коммутативных теорем (§ 1):

а) В кольце единичных элементов, полугруппа неделителей нуля которого имеет конечные последовательности делителей, каждый неделитель нуля представим как произведение (конечное) неприводимых элементов.

б) В кольцах главных идеалов справа каждый неделитель нуля $\delta \ni \delta$ поддается разложению в подгруппе O неделителей нуля, на произведения (конечные) неприводимых элементов, ядро которых остается инвариантным.

Обращаем внимание на теорему, вероятно, новую, в которой усматриваем тип некоммутативной основной теоремы. Известно, что всякая основная теорема для разложений на произведения простых идеалов в некоммутативных кольцах оказывается à posteriori фундаментальной теоремой, относящейся к разложениям в коммутативные произведения[1]. Было бы желательно глубже выяснить причину этой разницы между элементарной теорей и теорией идеалов.

★

Существование теорем разложения a, b узаконивает существование задачи о бесконечности неприводимых элементов в кольцах с единичным элементом подкоммутативных справа, но не являющихся непременно кольцами главных идеалов справа.

В рамках подобных колец нам удалось сформулировать условия достаточные, чтобы множество неприводимых элементов было бесконечным (§ 1). Таким образом получаем:

Множество классов ассоциированных неприводимых элементов кольца Ω бесконечно, если удовлетворено одно из следующих условий:

1. Нулевая характеристика и свойство рациональной целостности Ω, то есть $\Omega \cap R = C$, где C — кольцо рациональных целых, а R — его поле отношений.

2. Целостность неприводимых[2] элементов и группы минимальных единиц $(E = +1, -1)$.

3. Слабая основная[3] теорема (с не обязательно инвариантными ядрами, но с инвариантной размерностью) и существование по меньшей мере $L + 1$ классов ассоциированных неприводимых элементов, где L означает предел (конечный) размерностей относительных ядер, относящихся к разностям $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ двух единиц.

Интересно отметить, что если в аксиоматических кольцах Ω со слабой основной теоремой, устранить тривиальный случай, в котором размерность ядер разностей $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ бесконечно растет, условие существования $L + 1$ классов ассоциированных неприводимых элементов становится обязательным и достаточным для осуществления бесконечности множества всех этих классов.

Отметим, что в теореме 3 существование неприводимых элементов обусловлено самой основной теоремой. В 1 и 2-й теоремах оно должно быть

---

[1] См. „Арифметическая теория идеалов", Изд. Академии РНР (1956), на румынском языке, стр. 272—273.

[2] Что означает: всякий неприводимый элемент является неделителем нуля.

[3] Обычно некоммутативный, принадлежащий к вышеуказанному типу b.

постулировано отдельно или построено при помощи условия минимальности для последовательностей делителей.

★

Единство изложения столь разнообразных тем является результатом последовательного применения рассуждений, восходящего к старому аргументу Евклида о бесконечности простых чисел, делающего честь греческому мышлению. Этим объясняется выбранное мною заглавие настоящей статьи.

L'ARGUMENT D'EUCLIDE POUR L'INFINITÉ DES NOMBRES PREMIERS

HISTORIQUE ET POSITION DU PROBLÈME

Depuis Dirichlet, la Téorie algébrique des nombres se voit forcée à de fréquents recours à l'Analyse.

Cependant les arithméticiens à l'âme algébrique, c'est-à-dire les vrais, conçoivent cette collaboration comme peu naturelle et transitoire. Ils subissent avec quleque impatience ce qu'ils ont toujours regardé comme une servitude envahissante, sinon avilissante.

Aussi, dès qu'ils parviennent à déloger leurs redoutables compagnons d'armes, les analystes, et à reconquérir, sur eux, même la plus insignifiante bourgade, s'empressent-ils de clamer leur exploit.

Pourtant on ne saurait nier à ces puristes toute raison. Il est permis de penser qu'une science qui s'ambarrasse encore dans les aléas de ses moments heuristiques et qui n'arrive pas à extraire de son propre sol les éléments nécessaires à son développement, est loin d'avoir atteint un certain degré de maturité.

L'article bien élémentaire que nous venons d'écrire trouve son excuse dans ce radicalisme algébrique qu'il nous plaît d'arborer ici, sans y tenir beaucoup.

Sorti des préoccupations didactiques, ce travail vise surtout à dégager le noyau algébrique de ce théorème célèbre, remontant à D i r i c h l e t *) sur l'infinité des idéaux premiers de degré 1 dans les corps de nombres algébriques, théorème dont la demonstration repose sur l'emploi de la fonction $\zeta(s, K)$ de D e d e k i n d généralisation de celle de R i e m a n n.

Le résultat principal que nous obtenons par une méthode strictement algébrique (quoique non élémentaire), en suivant le schéma d'Euclide, mais en nous appuyant sur la théorie du conducteur, s'énonce comme suit (§ 2) :

Dans l'ordre principal d'un corps de nombres algébriques de degré n il y a au moins un ensemble infini d'idéaux premiers de degré $g < n$.

*) En ce qui concerne les corps quadratiques.

On voit tout de suite que *le théoréme de Dirichlet sur l'infinité des idéaux premiers de degré* 1 *se trouve, par cela algébriquement établi, pour toute extension cyclique du corps des nombres rationnels, de degré premier l.*

Le cas des corps quadratiques correspond à $l = 2$.

Mais il arrive que la démonstration pour ce cas puisse être rendue complètement élémentaire : libérée de la théorie du conducteur et rapportée seulement à quelques théorèmes simples, propres aux corps quadratiques (§ 2).

★

On sait que le théorème dont nous venons de parler, comporte, pour les corps de Kummer, un complèment, à savoir : dans un corps de Kummer de degré l (premier) il y a une infinité d'idéaux premieres de degré l. Ce théorème a été rencontré par Dirichlet et Kronecker aussi, dans le cas quadratique $l = 2$. Il sera donc désigné ici sous le nom de *théorème de Dirichlet-Kronecker.*

La démonstration complète de ce théorème, même pour le cas $l = 2$ exige l'emploi des séries de Dirichlet à caractères $L(s, \chi)$.

Nous nous sommes posés le problème d'étayer algébriquement le théorème de Dirichlet - Kronecker, du moins pour quelques corps quadratiques assez étendus.

Le point de départ nous le prenons dans la démonstration algébrique due à E. Wendt [2], *respectivenment* à M. Bauer [1] du cas spécial du théorème sur la progression arithmétique : $p = nr + 1$, *respectivement* $p = nr - 1$.

Disons tout de suite, que *dans notre article il ne s'agit pas précisément de la démonstration originaire de* Wendt, *mais d'une modification ingénieuse de celle-ci, dont l'esquisse nous fut communiquée par* M. A. Châtelet, *entre deux séances du congrès mathématique de Bucarest* (Juin 1956). Aussi lui adressons nous, par l'intercession de ces lignes, nos vifs remerciements*).

En utilisant la démonstration de Mr. Châtelet, que nous sommes parvenus à établir rigoureusement (§ 3), nous obtenons d'abord, par voie strictement algébrique, ce renforcement du résultat de Wendt (§ 3) :

Pour une raison r impaire et libre de carrés, respectivement *paire et libre de carrés, il existe une infinité de nombres premiers* $p = nr + 1$ *qui satisfont* à

$$p \equiv -1 \bmod 4 \text{ respectivement } p \equiv \pm 3 \bmod 8.$$

*) Aux jours du congrès mathématique de Bucarest, nous refusâmes âprement à Mr. Châtelet le bien fondé de sa démonstration.

En cela nous eûmes en partie tort. Il est vrai que la démonstration indiquée par Mr. Châtelet présentait une lacune (que nous avons comblée par la suite), mais elle renfermait une idée juste, qui plus est, fort subtile.

La démonstration transcendante de Hecke mise à part [5], nous ne connaissions à ce moment, — relativement au cas spécial $p = nr + 1$, de la progression arithmétique, — que les premières démonstrations dues à V. A. Lebesgues et J. A. Serret, pour certaines formes de la raison r. Les articles de Wendt et Bauer nous les avons lus ensuite.

Tout dernièrement [16] le thèorème général de Dirichlet vient d'être établi élémentairement par P. Erdős et S. Selberg.

Mr. Châtelet affirme que l'idée de sa démonstration se trouve chez Hilbert. Mais nous n'avons pas réussi à l'y retrouver. Aussi la soupçonons-nous fort d'appartenir en propre à Mr. Châtelet lui-même.

En nous appuyant sur la démonstration de Bauer et sur ce renforcement du résultat de Wendt nous arrivons, en faisant intervenir la loi de réciprocité, à fonder algébriquement ces cas assez étendus, du théorème de Dirichlet-Kronecker (§ 4) :

Dans les corps des nombres quadratiques de discriminant d négatif

$$d < 0$$

et aussi dans ceux de discriminant positif $d > 0$ *caractérisé par :*

$$d \equiv 0 \bmod 4, \frac{d}{4} \equiv 1 \bmod 4 \text{ } \textit{respectivement} \text{ } d \equiv 0 \bmod 8, \frac{d}{8} \equiv 1 \bmod 4,$$

il y a une infinité d'idéaux premiers de degré 2.

★

Nous avons fait commencer cette Note, relative à l'algébrisation des théorèmes de Dirichlet et Kronecker sur l'infinité de certains ensembles *d'idéaux premiers*, par le problème corrélatif, sur l'infinité des *éléments irréductibiles* dans les anneaux pas nécessairement commutatifs (§ 1).

La question présente de l'intérêt seulement s'il existe un théorème fondamental relatif aux décompositions en éléments irréductibles. C'est-à-dire si :

1° les éléments irréductibles livrent effectivement le matériel premier pour certains semi-groupes multiplicatifs de l'anneau,

2° on peut caractériser les invariants des décompositions en produits d'éléments irréductibles d'un même élément.

A cet effet nous introduisons les définitions suivantes :

Noyau d'un produit d'éléments irréductibles (pas nécessairement commutatif) = l'ensemble des classes d'association à droite, auxquelles appartiennent les facteurs.

Suite à diviseurs = juxtaposition d'éléments dont chaque terme divise à droite ou bien à gauche (indifféremment) le terme précedant *).

Anneau à idéal principal à droite = anneau Ω à élément - unité, sous - commutatif à droite

$$\Omega \ \omega \subset \omega \ \Omega, \qquad \omega \in \Omega,$$

dont le groupe des unités E est sous - permutable à gauche avec le semi-groupe O des non diviseurs de zéro

$$OE, \subset EO \qquad o \in 0$$

et où chaque idéal bilateral I, qui renferme au moins un non diviseur de zéro, est principal à droite

$$I = \eta \ \Omega.$$

*) Dans les semi-groupes commutatifs, où la division des deux termes succesifs peut être regardée toujours comme une division à droite et, par cela même, comme transitive, les suites à diviseurs coïncident avec les chaînes à diviseurs.

Dès lors on démontre ces analogues non commutatifs des théorèmes commutatifs classiques (§1) :

a. Dans un anneau à élément-unité et dont le semi-groupe des non diviseurs de zéro est à suites à deviseurs finies, tout non diviseur de zéro est représentable comme produit (fini) d'éléments irréductibles.

b. Dans un anneau Ω à élément-unité dont tous les idéaux gauches sont bilatéraux et principaux, tout semigroupe O à suites à diviseurs finies et tel que $a = bc$, où $a \to O$, $b, c \to \Omega$ implique $b, c, \to O$, possède un théorème fondamental non commutatif, c'est-à-dire les éléments de O se laissent décomposer en produit (fini) d'éléments irreductibles en O, dont le noyau reste invariant.

c. Dans les anneaux à idéal principal à droite, chaque non diviseur de zéro $o \in O$ se laisse décomposer, dans le semi-groupe O des non diviseurs de zéro, en produits (finis) d'éléments irréductibles, dont les classes d'association sont invariantes et permutables.

Nous signalons l'avant dernier théorème, probablement nouveau, où nous voyons le type du théorème fondamental non commutatif. On sait que tout théorème fondamental pour les décompositions en produits d'idéaux premiers, dans les anneaux non commutatifs, s'avère *a posteriori* un théorème fondamental relatif aux décompositions en produits commutatifs [6]*). Il serait instructif d'approfondir la raison de cette différence entre *l'élémentaire* et *l'idéal-théorique*.

★

L'existence des théorèmes de décomposition *a*, *b* rend légitime le problème sur l'infinité d'éléments irréductibles dans les anneaux à élément-unité sous-commutatifs à droite, mais pas nécessairement à idéal principal à droite.

Dans le cadre de tels anneaux nous sommes parvenus à formuler des conditions suffisantes pour que l'ensemble des éléments irréductibles soit infini (§ 1). On a donc :

L'ensemble des classes d'éléments irréductibles associés, d'un anneau Ω, *est infini si l'une ou l'autre des conditions suivantes se trouve remplie* :

1. *Caractéristique nulle et propriété d'integrité rationnelle de* Ω, *c'est-à-dire*

$$\Omega \cap R = C$$

où C *est l'anneau des entiers rationnels et* R, *son corps quotient.*

2. *Intégrité des éléments irréductibles***) *et groupes des unités minimum* ($E = +1, -1$)

3. *Théoreme fondamental****) *faible* (à noyaux pas nécessairement invariants mais à dimension invariante) *et existence d'au moins* $L + 1$ *classes d'éléments irréductibles associés, où* L *signifie la limite (finie) des dimensions des noyaux relatifs aux différences* $\varepsilon_i - \varepsilon_i$ *de deux unités.*

*) p. 272—273.

**) C'est-à-dire : tout élément irréductible est non diviseur de zéro.

***) En général non commutatif, appartenant au type *b* ci-dessus.

Il est intéressant de noter que, dans le cadre axiomatique des anneaux Ω à théorème fondamental faible, si on écarte le cas banal où la dimension des noyaux de $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ croît indéfiniment, la condition de l'existence de $L + 1$ classes d'éléments irréductibles associés, devient nécessaire et suffisante pour l'infinité de l'ensemble de toutes ces classes.

Notons encore que, dans le théorème 3, l'existence des éléments irréductibles est impliquée de par le fait du théorème fondamental. Dans les théorèmes 1 et 2 elle doit être postulée à part ou bien construite à l'aide de la condition minimale pour les suites à diviseurs.

★

L'exposé de matières si diverses admet comme mesure uniforme un type de raisonnement qui remonte au vieil argument d'Euclide, sur l'infinité des nombres premiers : honneur des inventions grecques.

Cela explique le titre que nous avons choisi.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Bauer, J. f. reine u. ang. Math., 1906, vol. 131.
2. E. Wendt, J. f. reine u. ang. Math., 1895, vol. 115.
3. V. A. Lebesgue, J. math. pures et appl., 1843.
4. J. A. Serret, J. math. pures et appl., 1852.
5. E. Hecke, *Theorie der Algebraischen Zahlen.* 1923.
6. D. Barbilian, *Teoria aritmetică a idealelor.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti.
7. Dedekind, *Gesammelte matematische Wercke*, vol. III.
8. D. Hilbert, *Théorie des corps algébriques.* Hermann et fils, Paris, 1913, p. 103.
9. O. Ore, *Ueber den zusammenhang zwischen den definierenden Gleichungen und der Idealtheorie in algebraischen Körpern.* Math. Ann., 1926, vol. 96, p. 313.
10. D. Barbilian, *Curs de teoria lui Galois în axiomatizarea lui Steinitz.* Bucureşti, 1949, Fac. de matematică şi fizică (litografiat).
11. E. Noether, *Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe.* Math. Ann., vol. 78, p. 221.
12. Dirichlet, *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres. Œuvres.* 1839—40, t. I, p. 411.
13. L. Kronecker, *Ueber den Gebrauch der Dirichletschen Methoden in der Theorie der quadratischen Formen.* Berichte der K. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1875.
14. E. Kummer, *Ueber die allgemeinen Reciprocitätsgesetze unter den Resten und Nichtresten, deren Grad eine Primzahl ist.* Abh. der K. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1859.
15. *E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie*, vol. III, 1927.
16. *W. Specht, Elementare Beweise der Primzahlsätze*, 1956.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VIII, nr. 1—2, 1957

ASUPRA UNICITĂŢII DESCOMPUNERII ÎN FACTORI PRIMI ÎN INELELE DE ÎNTREGI AI LUI DIRICHLET *)

DE

CONSTANTIN P. POPOVICI

1. Un întreg al lui Dirichlet este un număr de forma

$$\Omega = \sigma + \tau\theta,$$

unde σ şi τ sînt întregi ai lui Gauss, iar θ are una dintre următoarele valori :

$$\frac{1+\sqrt{\delta}}{2}, \text{ dacă } \quad \delta \equiv 1 \pmod 4;$$

$$\frac{i+\sqrt{\delta}}{2}, \text{ dacă } \quad \delta \equiv 3 \pmod 4;$$

$$\frac{1+\sqrt{\delta}}{1+i}, \text{ dacă } \begin{cases} \delta \equiv 1 + 2i \pmod 4; \\ \\ \delta \equiv 3 + 2i \pmod 4; \end{cases}$$

$\sqrt{\delta}$ în celelalte cazuri,

δ fiind un anumit întreg al lui Gauss, care nu are factori pătrate perfecte. Perechea de numere $(1, \theta)$ formată din coeficienţii lui σ şi τ constituie o bază a întregilor lui Dirichlet. Această bază prezintă o deosebire neesenţială faţă de baza din [1], deoarece în aceasta din urmă pentru $\delta \equiv 3 \pmod 4$ am luat $\theta = \frac{-1+i\sqrt{\delta}}{2}$.

Norma relativă a lui Ω este întregul lui Gauss

$$N_r(\Omega) = \Omega\Omega^*,$$

*) Lucrare prezentată la al IV-lea Congres al matematicienilor romîni din 27 mai — 4 iunie 1956, Bucureşti.

unde $\Omega^* = \sigma + \tau\theta^*$ este conjugatul relativ al lui Ω, θ^* obținîndu-se din expresia lui θ punînd semnul minus în fața radicalului, iar norma absolută a lui Ω este

$$N_a(\Omega) = N_r(\Omega)\,\overline{N_r(\Omega)},$$

$\overline{N_r(\Omega)}$ fiind conjugatul complex al lui $N_r(\Omega)$.

Atunci cînd întregul δ al lui Gauss este dat, mulțimea tuturor întregilor lui Dirichlet, obținuți pornind de la acest δ, formează inelul $\mathfrak{J}[i, \theta]$ al întregilor lui Dirichlet, unde $i^2 + 1 = 0$. În același timp, mulțimea tuturor numerelor de forma $\Omega = \sigma + \tau\theta$, cu σ și τ numere complexe, cu partea reală și imaginară numere raționale, formează corpul relativ pătratic $\mathfrak{R}(i, \sqrt{\delta})$ și este evident că

$$\mathfrak{R}(i, \sqrt{\delta}) \supset \mathfrak{J}[i, \theta].$$

Unitățile din inelul întregilor lui Dirichlet sînt întregii η ai lui Dirichlet, care verifică fiecare în parte cel puțin, una dintre ecuațiile

$$N_r(\eta) = \pm 1, \pm i.$$

Cu noțiunile de mai sus putem prezenta, acum, scopul urmărit în această lucrare.

Astfel, vom demonstra că există întregi μ ai lui Dirichlet cu $N_r(\mu) \neq \neq \pm 1, \pm i$ care nu se pot scrie sub forma

$$\mu = \nu \cdot \omega$$

cu ν și ω întregi ai lui Dirichlet, pentru care $N_r(\nu) \neq \pm 1, \pm i$ și $N_r(\omega) \neq \neq \pm 1, \pm i$. Vom numi acești întregi μ *întregi ai lui Dirichlet indecompozabili*. Dacă, însă, un întreg γ al lui Dirichlet, care nu este o unitate, poate fi scris sub forma

$$\gamma = \lambda\xi,$$

unde λ și ξ sînt întregi ai lui Dirichlet, dar nu sînt unități, atunci, ca de obicei vom spune că atît λ cît și ξ sînt *divizori proprii* ai lui γ, iar γ este un *întreg compus al lui Dirichlet*. γ și γ^* sînt în același timp sau întregi indecompozabili ai lui Dirichlet sau întregi compuși ai lui Dirichlet. Într-adevăr, dacă γ nu ar fi indecompozabil, atunci ar exista doi întregi λ și ξ ai lui Dirichlet astfel încît

$$\gamma = \lambda\xi \quad \text{cu} \quad N_r(\lambda) \neq \pm 1, \pm i \quad \text{și} \quad N_r(\xi) \neq \pm 1, \pm i.$$

Dar atunci nici γ^* nu ar fi indecompozabil, deoarece ar rezulta că

$$\gamma^* = \lambda^*\xi^* \quad \text{cu} \quad N_r(\lambda^*) \neq \pm 1, \pm i \quad \text{și} \quad N_r(\xi^*) \neq \pm 1, \pm i.$$

Dacă cel puțin unul dintre λ și ξ este o unitate, atunci atît λ cît și ξ vor fi numiți *divizori improprii* ai lui γ. Se observă că dacă un întreg al lui Dirichlet admite divizori improprii, el însuși poate fi o unitate și că întregii lui Dirichlet care nu sînt unități și admit ca divizori numai divizori improprii sînt întregi ai lui Dirichlet indecompozabili.

Spunem că divizorii improprii diferiți de unități ai unui întreg al lui Dirichlet sînt *asociați* cu întregul respectiv ; acest întreg este la rîndul lui divizor impropriu al divizorilor săi improprii diferiți de unități și deci este asociat cu ei.

Vom demonstra, de asemenea, că orice întreg Ω al lui Dirichlet poate fi scris sub forma

$$\Omega = \mu_1\mu_2 \dots \mu_r,$$

unde $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ sînt întregi ai lui Dirichlet indecompozabili, r fiind un întreg natural, care depinde de Ω. În general, este posibil ca pentru un întreg dat Ω al lui Dirichlet să putem scrie

$$\Omega = \mu_1\mu_2 \dots \mu_r = \mu_1'\mu_2' \dots \mu_{r'}' = \dots = \mu_1^{(l)}\mu_2^{(l)} \dots \mu_{r^{(l)}}^{(l)},$$

cu $r^{(j)} \neq r^{(k)}$ pentru $j \neq k$, iar dacă $r^{(j)} = r^{(k)}$ pentru $j \neq k$, atunci cel puțin unul dintre întregii $\mu_s^{(k)}$ ($s = 1, 2, \dots, r^{(k)}$) să nu fie asociat cu nici unul dintre $\mu_t^{(j)}$ ($t = 1, 2, \dots, r^{(j)}$). În acest caz vom spune, ca de obicei, că întregul Ω al lui Dirichlet nu se descompune unic în factori indecompozabili ai lui Dirichlet. Dacă în corpul $\Re(i, \sqrt{\delta})$ cel puțin unul dintre întregi nu se descompune unic în factori indecompozabili ai lui Dirichlet, atunci vom spune că în acest corp unicitatea descompunerii în factori indecompozabili nu are loc. Dacă în corpul $\Re(i, \sqrt{\delta})$ toți întregii corpului se descompun unic în factori indecompozabili, atunci vom spune că în acest corp are loc unicitatea descompunerii în factori indecompozabili. Pînă în prezent nu se știa dacă există sau nu corpuri relativ pătratice $\Re(i, \sqrt{\delta})$ în care să aibă loc unicitatea descompunerii în factori indecompozabili. În această lucrare se demonstrează că există astfel de corpuri, iar în tabloul nr. 1 sînt date toate aceste corpuri pentru valori ale lui δ care verifică relația $N(\delta) \leqslant 100$, $N(\delta)$ fiind norma întregului δ al lui Gauss.

Pentru a pune în evidență aceste lucruri, vom demonstra că, în general există trei categorii de întregi ai lui Dirichlet indecompozabili *).

a) Întregi ai lui Dirichlet indecompozabili, care sînt divizori proprii ai întregilor primi ai lui Gauss ; îi vom numi întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul întîi. Vom demonstra că acești întregi ai lui Dirichlet pot fi numiți întregi primi ai lui Dirichlet.

---

*) Întregii lui Dirichlet pe care, în această lucrare, îi numim indecompozabili sînt analogi cu întregii pătratici indecompozabili [2]. Aceștia din urmă, în mod nefiresc, sînt denumiți în [3], p. 340, întregi pătratici primi. Am evitat să dăm această denumire întregilor lui Dirichlet corespunzători, deoarece se știe că întregii primi raționali sînt denumiți astfel pentru că au următoarea proprietate : un număr prim p nu divide un produs ab fără să dividă unul din factori [4], p. 21. Dar această proprietate este echivalentă cu faptul că întregii raționali se descompun unic în factori indecompozabili raționali, care pentru acest motiv au fost numiți factori primi. Dacă am fi siguri că în orice corp relativ pătrativ $\Re(i, \sqrt{\delta})$ are loc unicitatea descompunerii în factori indecompozabili, am fi denumit acești factori, factori primi, dar pentru că nu sîntem siguri de acest lucru vom păstra denumirea introdusă mai sus, așa cum s-a făcut și în [4], p. 208, [5], p. 281, [6], p. 32, [7], p. 102.

b) Întregi primi ai lui Gauss care nu admit nici un întreg al lui Dirichlet ca divizor propriu; aceştia vor fi denumiţi întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al doilea.

c) Întregi ai lui Dirichlet indecompozabili, care nu sînt asociaţi cu întregii indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al doilea, dar care sînt divizori proprii ai întregilor lui Gauss ce sînt produse de întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al doilea. Vom numi aceşti întregi,întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea. Aceşti întregi ai lui Dirichlet există în unele corpuri relativ pătratice $\Re(i, \sqrt{\delta})$, iar în altele nu există. Atunci cînd există, unicitatea descompunerii în factori indecompozabili nu are loc, iar atunci cînd nu există această unicitate are loc. Întregii indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea nu pot fi niciodată denumiţi întregi primi.

Atunci cînd întregii indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea există, întregii indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al doilea nu pot fi denumiţi întregi primi ci dimpotrivă, aceştia din urmă devin întregi primi atunci cînd întregii indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea nu există.

2. În cele ce urmează ne vor fi utile cîteva proprietăţi ale întregilor lui Dirichlet. Aceste proprietăţi vor fi exprimate în teoremele din acest paragraf.

T e o r e m a 1. *Există întregi ai lui Dirichlet indecompozabili. Orice întreg* Ω *al lui Dirichlet cu* $N_a(\Omega) > 1$ *admite ca divizor cel puţin un întreg* μ *al lui Dirichlet cu* $N_a(\mu) > 1$ *şi, în particular, divizorul* μ *al lui* Ω *cu cea mai mică normă absolută dintre toate normele absolute, mai mari ca* 1, *ale tuturor divizorilor lui* Ω *este indecompozabil.*

Demonstraţia ca şi formularea acestei teoreme este rezultatul adaptării la întregii lui Dirichlet a celor spuse în [3] *) pentru întregii raţionali sau în [3] **) pentru întregii pătratici. Considerăm mulţimea $\mathfrak{M}$ a normelor absolute, mai mari ca 1, ale tuturor divizorilor lui Ω. Această mulţime nu este vidă, deoarece $N_a(\Omega) \in \mathfrak{M}$ datorită faptului că $N_a(\Omega) > 1$. iar Ω este divizorul lui Ω. Mulţimea $\mathfrak{M}$ fiind formată din numere naturale, în această mulţime există un număr natural mai mic decît toţi cei care aparţin lui $\mathfrak{M}$. Fie $N_a(\mu)$ acest număr natural. Dacă μ nu este indecompozabil, atunci el are un divizor propriu ϑ, deci $N_a(\vartheta) > 1$. Însă, ϑ divizînd pe μ divide şi pe Ω, deci $N_a(\vartheta) \in \mathfrak{M}$ ceea ce este contradictoriu deoarece $N_a(\vartheta) < N_a(\mu)$, deci μ este un întreg al lui Dirichlet indecompozabil.

T e o r e m a 2. *Orice întreg* Ω *al lui Dirichlet, pentru care* $N_a(\Omega) > 1$, *se poate reprezenta sub forma*

$$\Omega = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r,$$

unde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ *sînt întregi ai lui Dirichlet indecompozabili.*

Demonstraţia şi formularea acestei teoreme sînt rezultatul adaptării la întregii lui Dirichlet a celor spuse în [3] ***) pentru întregii raţionali.

*) p. 10.
**) p. 341
***) p. 11–12.

Datorită teoremei precedente, Ω admite cel puțin un divizor al lui Dirichlet indecompozabil; fie acesta μ_1, atunci

$$\Omega = \mu_1 \Omega'.$$

Ω' fiind un întreg al lui Dirichlet putem scrie

$$\Omega' = \mu_2 \Omega'',$$

cu μ_2 un întreg al lui Dirichlet indecompozabil. Deci putem scrie

$$\Omega = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r \Omega^{(r)}.$$

Însă

$$N_a(\Omega) = N_a(\mu_1) N_a(\mu_2) \ldots N_a(\mu_r) N_a(\Omega^{(r)}).$$

Deoarece $N_a(\Omega)$ este un întreg natural, $N_a(\Omega)$ are un număr finit de divizori, care sînt întregi naturali diferiți de 1, deci există un rang r astfel încît $N_a \Omega^{(r)} = 1$. Schimbînd notațiile, vom nota cu μ_r pe $\mu_r \Omega^{(r)}$ și teorema este demonstrată.

T e o r e m a 3. *Dacă produsul a doi întregi Ω_1 și Ω_2 ai lui Dirichlet este un întreg al lui Gauss, atunci există un întreg $\Gamma = \sigma + \tau\theta$ al lui Dirichlet și doi întregi z_1 și z_2 ai lui Gauss astfel încît $\Omega_1 = z_1\Gamma$ și $\Omega_2 = z_2\Gamma^*$, σ și τ fiind primi între ei.*

Demonstrație. Această proprietate este demonstrată în [8] pentru întregii pătratici. Mai întîi să arătăm că un întreg $\sigma + \tau\theta$ al lui Dirichlet poate fi pus și sub forma $\sigma' + \tau'\theta^*$ cu σ' și τ' întregi ai lui Gauss. Într-adevăr, θ fiind un întreg al lui Dirichlet, verifică ecuația $\theta^2 - h\theta - k = 0$, cu h și k întregi ai lui Gauss, deci $\theta + \theta^* = h$ și atunci $\sigma + \tau\theta = \sigma + \tau(h - \theta^*) = (\sigma + \tau h) + (-\tau)\theta^* = \sigma' + \tau'\theta^*$, unde $\sigma' = \sigma + \tau h$ și $\tau' = -\tau$ sînt întregi ai lui Gauss. Deci putem scrie $\Omega_1 = \sigma_1 + \tau_1\theta$, $\Omega_2 = \sigma_2 + \tau_2\theta^*$ și atunci

$$\Omega_1\Omega_2 = \sigma_1\sigma_2 - k\tau_1\tau_2 + h\sigma_1\tau_2 + (\sigma_2\tau_1 - \sigma_1\tau_2)\theta.$$

Produsul $\Omega_1\Omega_2$ fiind un întreg al lui Gauss, trebuie ca

$$\sigma_2\tau_1 - \sigma_1\tau_2 = 0.$$

Dacă z_1 este cel mai mare divizor comun al lui σ_1 și τ_1, atunci $\sigma_1 = z_1\sigma$ $\tau_1 = z_1\tau$ și deci

$$\sigma_2\tau - \sigma\tau_2 = 0.$$

Prin urmare $\sigma_2 = z_2\sigma$, $\tau_2 = z_2\tau$, deoarece σ și τ sînt primi între ei. Deci cu $\Gamma = \sigma + \tau\theta$ avem $\Omega_1 = z_1\Gamma$ și $\Omega_2 = z_2\Gamma^*$.

În această lucrare ne va fi utilă proprietatea întregilor lui Dirichlet de a se separa în clase de resturi. Vom prezenta această proprietate sub forma în care o vom utiliza în demonstrațiile noastre; o clasă de resturi este formată din întregii lui Dirichlet de forma

$$\Omega_1 + \Omega_2\Omega$$

atunci cînd Ω_1 și Ω sînt întregi ai lui Dirichlet dați, iar Ω_2 parcurge inelul întregilor lui Dirichlet din care fac parte Ω_1 și Ω. Doi întregi ai lui Dirichlet

Ω' și Ω'' care fac parte din aceeași clasă de resturi se spune că sînt *congruenți modulo* Ω și acest lucru se scrie astfel

$$\Omega' \equiv \Omega'' \pmod{\Omega}.$$

Dacă se ia cîte un reprezentant din fiecare clasă de resturi se formează o mulțime $\mathfrak{M}$, care se numește *sistem complet de resturi modulo* Ω.

Clasele de resturi, astfel formate, nu au elemente în comun, deoarece dacă elementul $\Omega_1 + \Omega'_2\Omega$ al unei clase ar fi aparținut unei alte clase, atunci el ar mai putea fi scris sub forma $\Omega_3 + \Omega''_2\Omega$ fără ca Ω_3 să poată fi scris sub forma $\Omega_1 + \Omega''_2\Omega$. Dar atunci

$$\Omega_1 + \Omega'_2\Omega = \Omega_3 + \Omega''_2\Omega$$

și deci

$$\Omega_3 = \Omega_1 + (\Omega'_2 - \Omega''_2)\,\Omega,$$

ceea ce este contradictoriu.

Reunind toate clasele de resturi se recapătă inelul întregilor lui Dirichlet.

Din cele de mai sus se vede că sistemul complet de resturi $\mathfrak{M}$ modulo Ω are următoarele proprietăți:

a) Orice întreg al lui Dirichlet este congruent modulo Ω cu un element al mulțimii $\mathfrak{M}$.

b) Două elemente oarecare ale mulțimii $\mathfrak{M}$ nu sînt congruente modulo Ω.

Vom demonstra, acum, teorema următoare.

T e o r e m a 4. *Mulțimea* $\mathfrak{M}$ *are un număr finit de elemente, egal cu* $N_a(\Omega)$, *iar reprezentanții* $\Omega_1 = \sigma_1 + \tau_1\theta$ *ai claselor de resturi pot fi aleși astfel ca* σ_1 *și* τ_1 *să fie reprezentanții claselor de resturi, în inelul întregilor lui Gauss, modulo* $\frac{N_r(\Omega)}{D}$, *respectiv modulo* D, *pentru care sînt verificate relațiile* $N(\sigma_1) < \frac{N_a(\Omega)}{N(D)}$ *și* $N(\tau_1) < N(D)$, *unde* D *este cel mai mare divizor comun al lui* σ *și* τ *din expresia lui* $\Omega = \sigma + \tau\theta$.

Demonstrație. Fie $\Omega' = \sigma' + \tau'\theta$ un întreg al lui Dirichlet. Deoarece τ' și D sînt întregi ai lui Gauss putem scrie că $\tau' = zD + \tau_1$ cu $N(\tau_1) < N(D)$, unde z și τ_1 sînt întregi ai lui Gauss, deci

$$\Omega' = \sigma' + \tau_1\theta + zD\theta.$$

Întregul D al lui Gauss fiind cel mai mare divizor comun al lui σ și τ, există doi întregi z_1 și z_2 ai lui Gauss astfel încît

$$D = z_1\sigma + z_2\tau,$$

deci

$$\Omega' = \sigma' + \tau_1\theta + (zz_1\sigma + zz_2\tau)\,\theta + [zz_1\tau\theta^2 - zz_1\tau\,(h\theta + k)],$$

deoarece θ verifică ecuația de gradul al doilea $\theta^2 - h\theta - k = 0$, unde h și k sînt întregi ai lui Gauss. Prin urmare,

$$\Omega' = \sigma' - \tau zz_1k - \sigma(zz_2 - zz_1h) + \tau_1\theta + (zz_2 - zz_1h + zz_1\theta)\,(\sigma + \tau\theta).$$

Deoarece $\frac{N_r(\Omega)}{D}$ este un întreg al lui Gauss, putem scrie

$$\sigma' - \tau z z_1 k - \sigma(z z_2 - z z_1 h) = Z\frac{N_r(\Omega)}{D} + \sigma_1$$

cu $N(\sigma_1) < \frac{N_a(\Omega)}{N(D)}$, deci

$$\Omega' = \sigma_1 + \tau_1\theta + (z z_2 - z z_1 h + z z_1\theta + Z\frac{\Omega^*}{D})\,\Omega.$$

Aşadar

$$\Omega' \equiv \Omega_1 \pmod{\Omega},$$

unde $\Omega_1 = \sigma_1 + \tau_1\theta$, σ_1 şi τ_1 putînd fi aleşi drept reprezentanţii claselor de resturi, în inelul întregilor lui Gauss, modulo $\frac{N_r(\Omega)}{D}$ respectiv modulo D pentru care sînt verificate relaţiile $N(\sigma_1) < \frac{N_a(D)}{N(D)}$ şi $N(\tau_1) < N(D)$. Să notăm cu $\mathfrak{M}'$ mulţimea formată din întregii Ω_1 ai lui Dirichlet. Din cele de mai sus şi din proprietatea *a*) rezultă că

$$\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}.$$

Să arătăm, acum, că două elemente oarecare ale mulţimii $\mathfrak{M}'$ nu sînt congruente modulo Ω. Cu aceasta vom dovedi că

$$\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$$

şi deci

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}.$$

Vom presupune că există doi întregi Ω_1' şi Ω_1'' ai lui Dirichlet care fac parte din mulţimea M' şi că

$$\Omega_1' \equiv \Omega_1'' \pmod{\Omega}.$$

Dacă $\Omega_1' = \sigma_1' + \tau_1'\,\theta$ şi $\Omega_1'' = \sigma_1'' + \tau_1''\theta$, atunci

$$\sigma_1' - \sigma_1'' + (\tau_1' - \tau_1'')\theta \equiv 0 \pmod{\Omega},$$

deci

$$\sigma_1' - \sigma_1'' + (\tau_1' - \tau_1'')\,\theta \equiv 0 \pmod{D},$$

aşadar, vezi observaţia de la sfîrşitul demonstraţiei,

$$\tau_1' - \tau_1'' \equiv 0 \pmod{D}.$$

Deci

$$\tau_1' = \tau_1'',$$

deoarece în caz contrar τ_1' și τ_1'' ar fi, în inelul întregilor lui Gauss, doi reprezentanți ai claselor de resturi modulo D pentru care se verifică relația $\tau_1' \equiv \tau_1''$ (mod D) ceea ce este contradictoriu. Deci

$$\sigma_1' - \sigma_1'' \equiv 0 \pmod{\Omega}.$$

Așadar

$$\sigma_1' - \sigma''_1 = \Omega\Lambda,$$

Λ fiind întreg al lui Dirichlet. Conform teoremei 3 există un întreg Γ al lui Dirichlet și doi întregi z_1 și z_2 ai lui Gauss, astfel încît

$$\Omega = z_1\Gamma \quad \text{și} \quad \Lambda = z_2\Gamma^\star.$$

Dar, $\Omega = D(\sigma'' + \tau''\theta)$, iar dacă $\Gamma = \sigma''' + \tau'''\theta$ avem

$$D(\sigma'' + \tau''\theta) = z_1(\sigma''' + \tau'''\theta)$$

deci

$$\begin{cases} D\ \sigma'' = z_1\sigma''', \\ D\ \tau'' = z_1\tau'''. \end{cases}$$

Deoarece σ'' și τ'' sînt primi între ei, rezultă că z_1 divide pe D; dar și σ''' e prim cu τ''' conform teoremei 3, deci D divide pe z_1. Așadar

$$z_1 = Du,$$

u fiind o unitate în inelul întregilor lui Gauss, deci putem scrie

$$\sigma_1' - \sigma_1'' = \Omega\frac{z_2\Gamma^\star}{z_1}z_1 = z_2\bar{u}\frac{N_r(\Omega)}{D},$$

sau

$$\sigma_1' - \sigma_1'' \equiv 0\left(\text{mod}\ \frac{N_r(\Omega)}{D}\right).$$

Prin același raționament, cu care am dovedit că $\tau_1' = \tau_1''$, dovedim că

$$\sigma_1' = \sigma_1''$$

deci doi întregi Ω_1' și Ω_1'' din $\mathfrak{M}'$ nu pot fi congruenți modulo Ω. Cu aceasta am dovedit că $\mathfrak{M}'$ este un sistem complet de resturi modulo Ω. Numărul claselor de resturi modulo $\frac{N_r(\Omega)}{D}$ fiind egal cu $\frac{N_a(\Omega)}{N(D)}$ și în fiecare din această clasă fiind posibil de ales cîte un reprezentant σ_1 astfel încît $N(\sigma_1) < \frac{N_a(\Omega)}{N(D)}$, ca urmare a valabilității teoremei de împărțire întreagă în inelul întregilor lui Gauss și, de asemenea, deoarece numărul claselor de resturi modulo D este egal cu $N(D)$, iar în fiecare din aceste clase fiind posibil de ales cîte un reprezentant τ_1 astfel încît $N(\tau_1) < N(D)$ rezultă că elementele mulțimii $\mathfrak{M}'$ sînt în număr finit, egal cu $\frac{N_a(\Omega)}{N(D)} \cdot N(D) = N_a(\Omega)$.

Observație. În cursul acestei demonstrații am folosit următoarea proprietate:

Condiția necesară și suficientă ca doi întregi ai lui Dirichlet $\Omega_1 = \sigma_1 + \tau_1\theta$, $\Omega_2 = \sigma_2 + \tau_2\theta$ să fie egali este

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2, \\ \tau_1 = \tau_2. \end{cases}$$

Am admis această proprietate fără demonstrație, care de altfel este foarte simplă.

Corolar. *Dacă* $\Omega = \sigma + \tau\theta$ *este întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul întîi, atunci orice întreg* Ω' *al lui Dirichlet este congruent modulo* Ω *cu un întreg al lui Gauss* σ_1, *ales dintre reprezentanții claselor de resturi modulo* $N_r(\Omega)$, *și care verifică relația* $N(\sigma_1) < N_a(\Omega)$.

Într-adevăr, dacă $\Omega = \sigma + \tau\theta$ este un întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul întîi, atunci cel mai mare divizor comun D al lui σ și τ este o unitate în inelul întregilor lui Gauss, deoarece dacă n-ar fi, atunci $\sigma = D\sigma'$ și $\tau = D\tau'$ și deci

$$\Omega = D(\sigma' + \tau'\theta).$$

D nefiind o unitate în inelul întregilor lui Gauss, nu poate fi o unitat nici în inelul întregilor lui Dirichlet, căci dacă ar fi atunci $N_r(D) = D^2 = \pm 1, \pm i$, ceea ce este contradictoriu, deci Ω fiind întreg indecompozabil al lui Dirichlet trebuie ca $\sigma' + \tau'\theta$ să fie o unitate în inelul întregilor lui Dirichlet. În acest caz, însă, Ω nu poate fi divizor propriu al unui întreg prim al lui Gauss, deoarece Ω este asociat cu un întreg al lui Gauss, iar întregii primi ai lui Gauss nu au ca divizori proprii întregi ai lui Gauss. Deci D este o unitate în inelul întregilor lui Gauss, deci $N(D) = 1$. Atunci Ω' fiind un întreg al lui Gauss, conform teoremei 4 avem

$$\Omega' \equiv \sigma_1 + \tau_1\theta \pmod{\Omega}$$

cu $N(\sigma_1) < N_a(\Omega)$ și $N(\tau_1) < 1$, deci $N(\tau_1) = 0$ de unde $\tau_1 = 0$.

3. Înainte de a obține procedeele cu ajutorul cărora să decidem dacă într-un corp relativ pătratic $\mathfrak{R}(i, \sqrt{\delta})$ descompunerea în factori indecompozabili este unică sau nu, vom stabili relația care există între descompunerea întregilor lui Gauss în factori indecompozabili ai lui Dirichlet și descompunerea însăși a întregilor lui Dirichlet în aceiași factori. Relația pe care o căutăm este dată de teorema următoare

Teorema 5. *Dacă descompunerea întregilor lui Gauss în factori indecompozabili ai lui Dirichlet, în cazul cînd se face abstracție de ordinea factorilor și de factorii asociați este unică, atunci întregii lui Dirichlet, în cazul cînd se face abstracție de aceleași lucruri, se descompun unic în factori indecompozabili ai lui Dirichlet și reciproc.*

Demonstrație. Să admitem că întregul Ω al lui Dirichlet are următoarele două descompuneri în factori indecompozabili ai lui Dirichlet:

$$\Omega = \mu_1\mu_2 \cdots \mu_r,$$
$$\Omega = \mu_1'\mu_2' \cdots \mu_s'.$$

Atunci pentru întregul lui Gauss $\Omega\Omega^*$ obținem

$$\mu_1\mu_2 \dots \mu_r \mu_1^* \mu_2^* \dots \mu_r^* = \mu_1' \mu_2' \dots \mu_s' \mu_1'^* \mu_2'^* \dots \mu_s'^*.$$

Conform presupunerii, făcută în legătură cu întregii lui Gauss, rezultă că

$$s = r.$$

Deci

$$\mu_1\mu_2 \dots \mu_r \mu_1^* \mu_2^* \dots \mu_r^* = \mu_1' \mu_2' \dots \mu_r' \mu_1'^* \mu_2'^* \dots \mu_r'^* \tag{1}$$

și mai putem scrie și relația

$$\mu_1\mu_2 \dots \mu_r \mu_1'^* \mu_2'^* \dots \mu_r'^* = \mu_1' \mu_2' \dots \mu_r' \mu_1^* \mu_2^* \dots \mu_r^*. \tag{2}$$

Atît în (1) cît și în (2), am exprimat întregul $\Omega\Omega^*$ al lui Gauss în mai multe moduri. Deoarece aduitem că întregii lui Gauss se descompun unic în factori indecompozabili ai lui Dirichlet, din (1) rezultă că μ_1' trebuie să fie asociat cel puțin cu unul dintre întregii μ_i $(i = 1, \dots, r)$ sau cel puțin cu unul dintre μ_j^* $(j = 1, \dots, r)$. Admitem că μ_1' nu este asociat cu nici unul dintre μ_i $(i = 1, \dots, r)$ și, eventual schimbînd notațiile, vom presupune că μ_1' este asociat cu μ_1^*. În același timp din (2) rezultă că μ_1' este asociat sau cu $\mu_1'^*$ sau cu cel puțin unul dintre întregii $\mu_k'^*$ $(k = 2, \dots, r)$ care nu este asociat cu $\mu_1'^*$. Schimbînd eventual notațiile, putem admite că $\mu_2'^*$ nu este asociat cu $\mu_1'^*$ și că μ_1' este asociat cu $\mu_2'^*$. Trebuie deci să considerăm sau

$$\begin{cases} \mu_1' = \eta' \mu_1^* \\ \mu_1' = \eta'' \mu_1'^* \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \mu_1' = \eta' \mu_1^* \\ \mu_2'^* = \eta''' \mu_1', \end{cases}$$

dacă $\mu_2'^*$ nu este asociat cu $\mu_1'^*$; aici η', η'' și η''' sînt unități în inelul întregilor lui Dirichlet. Dacă

$$\begin{cases} \mu_1' = \eta' \mu_1^{*'} \\ \mu_1' = \eta'' \mu_1'^*, \end{cases}$$

atunci

$$\mu_1' = \eta'' \mu_1'^* = \eta'' (\eta' \mu_1^*)^* = \eta'' \eta'^* \mu_1,$$

iar dacă

$$\begin{cases} \mu_1' = \eta' \mu_1^* \\ \mu_2'^* = \eta''' \mu_1', \end{cases}$$

atunci

$$\mu_2' = (\mu_2'^*)^* = (\eta''' \mu_1')^* = \eta'''^* \mu_1'^* = \eta'''^* (\eta' \mu_1^*)^* = \eta'''^* \eta'^* \mu_1,$$

deci sau nu e adevărat că μ_1' nu este asociat cu nici unul dintre μ_i $(i = 1, \ldots, r)$ sau în cazul cînd μ_1' nu este asociat cu nici unul dintre întregii μ $(i = 1, \ldots, r)$, atunci putem găsi printre μ_k' $(k = 2, \ldots, r)$ cel puțin unul care să fie asociat cu unul dintre μ_i $(i = 1, \ldots, r)$. Schimbînd notațiile, dacă e necesar, putem presupune că μ_1' este asociat cu μ_1, deci

$$\mu_1' = \eta_1 \mu_1,$$

cu η_1 o unitate în inelul întregilor lui Dirichlet, deci

$$\mu_1'^* = \eta_1^* \mu_1^*,$$

iar egalitățile (1) și (2) devin

$$\mu_1\mu_2 \ldots \mu_r \mu_1^* \mu_2^* \ldots \mu_r^* = \eta_1 \mu_1 \mu_2' \ldots \mu_r' \eta_1^* \mu_1^* \mu_2'^* \ldots \mu_r'^* \tag{1'}$$

$$\mu_1\mu_2 \ldots \mu_r \eta_1^* \mu_1^* \mu_2'^* \ldots \mu_r'^* = \eta_1 \mu_1 \mu_2' \ldots \mu_r' \mu_1^* \mu_2^* \ldots \mu_r^* \tag{2'}$$

Simplificînd cu întregul lui Gauss $\mu_1\mu_1^*$ obținem întregii lui Gauss

$$\mu_2 \ldots \mu_r \mu_2^* \ldots \mu_r^* = \eta_1 \eta_1^* \mu_2' \ldots \mu_r' \mu_2'^* \ldots \mu_r'^*, \tag{1''}$$

$$\eta_1^* \mu_2 \ldots \mu_r \mu_2'^* \ldots \mu_r'^* = \eta_1 \mu_2' \ldots \mu_r' \mu_2^* \ldots \mu_r^*. \tag{2''}$$

Relațiile (1'') și (2'') sînt similare relațiilor (1) și (2) și deaceea repetînd raționamentul făcut pentru a dovedi că μ_1' este asociat cu μ_1, vom dovedi că μ_2' este asociat cu μ_2 ..., că μ_{r-1}' este asociat cu μ_{r-1}. Atunci însă putem scrie

$$\Omega = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_{r-1}\mu_r = \eta_1 \ldots \eta_{r-1} \mu_1 \ldots \mu_{r-1} \mu_r'.$$

Simplificînd cu $\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{r-1}$ rezultă că μ_r' este asociat cu μ_r. Reciproca acestei teoreme este imediată dacă ținem seama de faptul că întregii lui Gauss sînt în același timp și întregi ai lui Dirichlet.

Datorită acestei teoreme trebuie să cercetăm modalitățile de descompunere a întregilor lui Gauss în produse de întregi indecompozabili ai lui Dirichlet. Următoarele teoreme rezolvă această chestiune.

T e o r e m a 6. *Orice întreg prim π al lui Gauss este sau un întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul al doilea sau se poate reprezenta sub forma*

$$\pi = \varepsilon \Omega \Omega^*,$$

unde Ω și Ω^* sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul întîi iar ε este o unitate în inelul întregilor lui Gauss.

Demonstrație. Să presupunem că descompunerea întregului prim π al lui Gauss în factori indecompozabili ai lui Dirichlet este de forma

$$\pi = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_r.$$

Dacă π este un întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul al doilea, atunci produsul $\mu_1\mu_2 \ldots \mu_r$ trebuie să fie format dintr-un singur factor.

Dacă π are ca divizori proprii întregi ai lui Dirichlet, atunci μ_i ($i = 1, \ldots, r$) sînt întregi ai lui Dirichlet de genul întîi. Conform teoremei 3 putem scrie

$$\begin{cases} \mu_1 = z_1\Omega, \\ \mu_2 \ldots \mu_r = z_2\Omega^*. \end{cases}$$

Dacă $\Omega = \sigma + \tau\theta$, din teorema 3 rezultă că σ și τ sînt primi între ei, iar μ_1 fiind întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul întîi, rezultă, din demonstrația corolarului teoremei 4 că z_1 este o unitate în inelul întregilor lui Gauss. Deci Ω este un întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul întîi, deci și Ω^* este un întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul întîi (vezi paragraful 1). Întregul prim π se scrie acum

$$\pi = z_1 z_2 \Omega\Omega^*,$$

deci z_2 este o unitate în inelul întregilor lui Gauss, deoarece în caz contrar întregul z_2 al lui Gauss ar fi divizor propriu întregului π al lui Gauss ceea ce nu e posibil. Punînd $\varepsilon = z_1 z_2$ obținem reprezentarea căutată.

Teorema 7. *Dacă un întreg indecompozabil Ω al lui Dirichlet de genul întîi divide un produs $\alpha\beta$ de doi întregi ai lui Dirichlet, atunci Ω divide neapărat unul din factori.*

Demonstrație. Fie

$$\alpha\beta \equiv 0 \pmod{\Omega}.$$

Conform corolarului teoremei 4 putem scrie

$$\alpha \equiv \sigma' \pmod{\Omega} \quad \text{și} \quad \beta \equiv \sigma'' \pmod{\Omega},$$

unde σ' și σ'' sînt întregi ai lui Gauss. Deci

$$\sigma'\sigma'' \equiv 0 \pmod{\Omega}.$$

Conform teoremei 3 avem

$$\sigma'\sigma'' \equiv 0 \pmod{N_r(\Omega)}.$$

Conform teoremei 6, $N_r(\Omega)$ este un întreg prim al lui Gauss, deci sau

$$\sigma' \equiv 0 \pmod{N_r(\Omega)}$$

sau

$$\sigma'' \equiv 0 \pmod{N_r(\Omega)},$$

deci sau

$$\alpha \equiv \sigma' \equiv 0 \pmod{\Omega}$$

sau

$$\beta \equiv \sigma'' \equiv 0 \pmod{\Omega}.$$

Observație. Această teoremă permite să denumim întregii indecompozabili ai lui Dirichlet de genul întîi drept întregi primi chiar și atunci cînd în corpul relativ pătratic $\Re(i, \sqrt{\delta})$ descompunerea unică a întregilor în factori indecompozabili nu are loc.

Teorema 8. *Reprezentarea unui întreg prim al lui Gauss sub forma*

$$\pi = \varepsilon \Omega \Omega^*,$$

unde Ω *și* Ω^* *sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul întîi, iar* ε *este o unitate în inelul întregilor lui Gauss este unică atunci cînd se face abstracție de ordinea factorilor și de factorii asociați.*

Demonstrație. Să presupunem că întregul prim π al lui Gauss mai admite și următoarea descompunere

$$\pi = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k,$$

unde μ_i $(i = 1, \dots, k)$ sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul întîi. Deoarece

$$\pi = \varepsilon \Omega \Omega^* = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k,$$

rezultă că

$$\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k \equiv 0 \pmod{\Omega}.$$

Conform teoremei 7 și schimbînd, eventual, notațiile vom avea

$$\mu_1 \equiv 0 \pmod{\Omega},$$

deci $\mu_1 = \Omega \eta_1$, unde η_1 este o unitate în inelul întregilor lui Dirichlet, pentru că în caz contrar μ_1 nu ar fi indecompozabil. Dar atunci putem scrie și

$$\Omega = \eta'_1 \mu_1,$$

unde η'_1 este o unitate în inelul întregilor lui Dirichlet. Obținem

$$\pi = \varepsilon \eta' \mu_1 \Omega^* = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k,$$

deci

$$\mu_2 \dots \mu_k \equiv 0 \pmod{\Omega^*}.$$

Repetînd raționamentul de mai sus, putem scrie

$$\Omega = \eta'_2 \mu_2,$$

unde η'_2 este o unitate în inelul întregilor lui Dirichlet, deci

$$\varepsilon \eta'_1 \eta'_2 = \mu_3 \dots \mu_k.$$

Această egalitate nu poate avea loc deoarece

$$N_a(\varepsilon) N_a(\eta'_1) N_a(\eta'_2) = 1 = N_a(\mu_3) \dots N_a(\mu_k) > 1.$$

Așadar, dacă π se mai descompune și în alt mod decît $\pi = \varepsilon \Omega \Omega^*$, atunci în această descompunere intră numai doi factori indecompozabili ai lui Dirichlet de genul întîi și care sînt asociați respectiv cu Ω și Ω^*, deci reprezentarea $\pi = \varepsilon \Omega \Omega^*$ este unică.

Teorema 9. *Dacă întregul* $z = \pi_1 \dots \pi_t$ *al lui Gauss, unde* $\pi_1, \dots, \pi_t$ *sînt întregi primi ai lui Gauss, admite următoarea descompunere în factori indecompozabili* α_i $(i = 1, \dots, r)$ *ai lui Dirichlet*

$$z = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$$

și dacă $\pi_1 = \varepsilon_1 \Omega_1 \Omega_1^*, \ldots, \pi_s = \varepsilon_s \Omega_s \Omega_s^*$, $s \leqslant t$, *unde* $\Omega_1, \Omega_1^*, \ldots, \Omega_s, \Omega_s^*$ *sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul întîi, iar* $\varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_s$ *sînt unități în inelul întregilor lui Gauss, atunci* α_1 *este asociat cu* Ω_1, α_2 *este asociat cu* Ω_1^*, α_3 *este asociat cu* $\Omega_2, \ldots, \alpha_{2s-1}$ *este asociat cu* Ω_s, α_{2s} *este asociat cu* Ω_s^*, *iar* $2s \leqslant r$.

Demonstrație. Avem

$$z = \varepsilon_1 \Omega_1 \Omega_1^* \ldots \varepsilon_s \Omega_s \Omega_s^* \pi_{s+1} \ldots \pi_t = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r$$

atunci

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r \equiv 0 \pmod{\Omega_1}.$$

De aici încolo demonstrația nu diferă de cea dată teoremei 8.

Teorema 10. *Orice întreg al lui Gauss* $z = \pi_1 \ldots \pi_t$, *unde nici unul dintre întregii primi* π_i $(i = 1, \ldots, t)$ *ai lui Gauss nu este întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul al doilea se poate reprezenta sub forma*

$$z = \varepsilon \Omega_1 \Omega_1^* \ldots \Omega_t \Omega_t^*,$$

unde $\varepsilon_1 \Omega_1 \Omega_1^* = \pi_1, \ldots, \varepsilon_t \Omega_t \Omega_t^* = \pi_t$, $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_t$, *iar această reprezentare este unică atunci cînd se face abstracție de ordinea factorilor și de factorii asociați.*

Această teoremă este o consecință a teoremei 9 în cazul cînd $s = t$.

Rolul deosebit pe care-l au întregii indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea iese în evidență în:

Teorema 11. *Descompunerea întregilor lui Dirichlet în factori indecompozabili ai lui Dirichlet, atunci cînd se face abstracție de ordinea factorilor și de factorii asociați, este unică dacă și numai dacă nu există întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea.*

Demonstrație. Dacă nu există întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea, atunci conform teoremelor 8, 9 și 10 rezultă că întregii lui Gauss se descompun unic în factori indecompozabili ai lui Dirichlet și deci conform teoremei 5 întregii lui Dirichlet se descompun unic în factori indecompozabili ai lui Dirichlet. Dacă descompunerea întregilor lui Dirichlet în factori indecompozabili este unică, atunci nu există întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea, deoarece dacă ar exista, atunci, conform definiției lor ar exista relații de forma

$$\pi_1 \ldots \pi_t = \alpha_1 \ldots \alpha_r,$$

unde $\pi_1, \ldots, \pi_t$ sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al doilea, iar $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea și deci ar exista întregul lui Dirichlet $\Omega = \pi_1 \ldots \pi_t = \alpha_1 \ldots \alpha_r$, care nu se descompune unic în factori indecompozabili ai lui Dirichlet, ceea ce este contradictoriu.

4. Pentru a obține exemple de corpuri relativ pătratice $\Re(i, \sqrt{\delta})$ în care are loc unicitatea descompunerii în factori indecompozabili vom căuta să obținem condiții echivalente cu condițiile din teorema 11, dar în care să intre explicit întregul δ al lui Gauss. Următoarele teoreme sînt echivalente cu teorema 11.

Teorema 12. *Descompunerea întregilor lui Dirichlet în factori indecompozabili ai lui Dirichlet atunci cînd se face abstracție de ordinea factorilor și de factorii asociați, este unică dacă și numai dacă nu există relații de forma*

$$N_r(\Omega) = \Omega\Omega^* = \pi_1\pi_2 \dots \pi_s,$$

unde Ω *și* Ω^* *sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea, iar* π_i $(i = 1, \dots, s)$ *sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al doilea.*

Demonstrație. Dacă nu există relații de forma descrisă în enunțul teoremei, atunci nu există întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea, căci dacă aceștia există, atunci există întregi ai lui Gauss de forma $\pi_1\pi_2 \dots \pi_t$, unde π_i $(i = 1, \dots, t)$ sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al doilea, astfel încît

$$\pi_1\pi_2 \dots \pi_t = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_r,$$

unde α_j $(j = 1, \dots, r)$ sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea, conform definiției acestor întregi. Conform teoremei 3 putem scrie

$$\begin{cases} \alpha_1 = z_1\Omega, \\ \alpha_2 \dots \alpha_r = z_2\Omega^*. \end{cases}$$

Dacă z_1 nu este o unitate în inelul întregilor lui Gauss, atunci z_1 nu poate fi nici o unitate în inelul întregilor lui Dirichlet, deoarece dacă ar fi, atunci $N_r(z_1) = z_1^2 = \pm 1, \pm i$ ceea ce este contradictoriu, deci α_1 fiind întreg indecompozabil al lui Dirichlet trebuie ca Ω să fie o unitate în inelul întregilor lui Dirichlet. Aceasta nu este posibil, deoarece întregii indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea nu sînt asociați cu întregi ai lui Gauss, deci z_s este o unitate în inelul întregilor lui Gauss și deci Ω și la rîndul său Ω^* sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea (vezi paragraful 1). Atunci

$$\pi_1\pi_2 \dots \pi_t = z_1z_2\Omega\Omega^*$$

și deoarece z_1z_2 este un întreg al lui Gauss, z_1z_2 divide pe $\pi_1\pi_2 \dots \pi_t$ și deci schimbînd eventual notațiile, putem scrie

$$z_1z_2 = \pi_{s+1} \dots \pi_t,$$

deci dacă există întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea, există și relații de forma

$$\Omega\Omega^* = \pi_1\pi_2 \dots \pi_s,$$

descrise în enunțul teoremei. Dacă astfel de relații nu există, atunci, conform teoremei 11, unicitatea descompunerii în factori indecompozabili are loc în corpurile relativ pătratice $\Re(i, \sqrt{\delta})$. Dacă această unicitate are loc, atunci, conform teoremei 11, nu există întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea și deci nu există relații de forma celor descrise în enunțul teoremei.

Teorema 13. *În corpul relativ pătratic* $\Re(i, \sqrt{\delta})$ *descompunerea întregilor lui Dirichlet în factori indecompozabili ai lui Dirichlet, atunci cînd se face abstracție de ordinea factorilor și de factorii asociați, este unică dacă și numai dacă întregii primi ai lui Gauss, divizori ai expresiilor*

$$x^2 - \delta,$$

unde x *este întreg al lui Gauss cu*

$$N(x) \leqslant \sqrt{N(\delta)},$$

nu sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al doilea. Dacă $\delta \equiv 1 \pmod 4$ *sau* $\delta \equiv 3 \pmod 4$, *iar* 4 *divide numărul* $x^2 - \delta$ *și dacă* $\delta \equiv 1 + 2i \pmod 4$ *sau* $\delta \equiv 3 + 2i \pmod 4$, *iar* 2 *divide numărul* $x^2 - \delta$, *atunci se separă mai întîi factorul* 4 *respectiv* 2 *și se consideră drept divizori ai numărului* $x^2 - \delta$ *ceilalți factori primi ai lui Gauss ai numărului* $x^2 - \delta$.

Demonstrație. Dacă există întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea, atunci, conform teoremelor 11 și 12, există o relație

$$\Omega\,\Omega^* = \pi_1\,\pi_2 \ldots \pi_s,$$

unde Ω și Ω^* sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea, iar $\pi_1, \ldots, \pi_s$ sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al doilea. Dacă

$$\Omega = \sigma + \tau\theta,$$

atunci

$$\Omega\,\Omega^* = \begin{cases} \frac{1}{4}[(2\sigma+\tau)^2 - \delta\tau^2] & \text{dacă } \delta \equiv 1 \pmod 4 \\ \frac{1}{4}[(2\sigma+i\tau)^2 - \delta\tau^2] & \text{dacă } \delta \equiv 3 \pmod 4 \\ \frac{1}{2i}[\{(1+i)\sigma+\tau\}^2 - \delta\tau^2] & \text{dacă } \begin{cases} \delta \equiv 1 + 2i \pmod 4 \\ \delta \equiv 3 + 2i \pmod 4 \end{cases} \\ \sigma^2 - \delta\tau^2 & \text{în celelalte cazuri,} \end{cases}$$

δ fiind întreg al lui Gauss, care nu are factori pătrate perfecte. Relația

$$\Omega\,\Omega^* = \pi_1\,\pi_2 \ldots \pi_s,$$

se poate transcrie astfel

$$\begin{aligned} (2\sigma+\tau)^2 - \delta\tau^2 &= 4\,\pi_1\,\pi_2 \ldots \pi_s && \text{dacă } \delta \equiv 1 \pmod 4 \\ (2\sigma+i\tau)^2 - \delta\tau^2 &= 4\,\pi_1\,\pi_2 \ldots \pi_s && \text{dacă } \delta \equiv 3 \pmod 4 \\ (\{1+i\}\sigma+\tau)^2 - \delta\tau^2 &= 2i\,\pi_1\,\pi_2 \ldots \pi_s && \text{dacă } \begin{cases} \delta \equiv 1 + 2i \pmod 4 \\ \delta \equiv 3 + 2i \pmod 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sigma^2 - \delta\tau^2 = \pi_1\,\pi_2 \ldots \pi_s \text{ în celelalte cazuri.}$$

Dacă notăm cu X expresiile $2\sigma + \tau$, $2\sigma + i\tau$, $(1 + i)\sigma + \tau$, σ, după caz, obținem

$$X^2 \equiv \delta\tau^2 \pmod{\pi_1'}$$

π_1' fiind unul oarecare dintre întregii π_i' $(i = 1, \ldots, s)$. Întregul lui Gauss τ este prim cu π_1', deoarece în caz contrar nici σ nu ar fi prim cu π_1', ceea ce nu este posibil, σ și τ fiind primi între ei, deoarece Ω este întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul al treilea. Deci δ este rest pătratic modul π_1', deci există un întreg x_1 al lui Gauss astfel încît

$$x_1^2 \equiv \delta \pmod{\pi_s'}, \quad N(x_1) \leqslant \frac{1}{2} N(\pi_1').$$

Într-adevăr, dacă $X^2 \equiv \delta\tau^2 \pmod{\pi_1'}$, iar τ este prim cu π_1', putem găsi un întreg al lui Gauss X_1 astfel ca $X_1^2 \equiv \delta \pmod{\pi_1'}$, dar atunci putem găsi un întreg χ al lui Gauss astfel ca $\frac{X_1}{\pi_1'} - \chi$ să aibă partea reală și imaginară care nu depășesc, în valoare absolută, pe $\frac{1}{2}$ [9]*), deci

$$N(X_1 - \chi\pi_1') = N(\pi_1') N\left(\frac{X_1}{\pi_1'} - \chi\right) \leqslant \frac{1}{2} N(\pi_1'),$$

deci vom lua $x_1 = X_1 - \chi\pi_1'$. Observăm că

$$|x_1^2 - \delta| = |x_1^2 + (-\delta)| \leqslant |x_1|^2 + |\delta|,$$

deci

$$N(x_1^2 - \delta) \leqslant (N(x_1) + \sqrt{N(\delta)})^2 = [N(x_1)]^2 + 2N(x_1)\sqrt{N(\delta)} + N(\delta).$$

Scriind că

$$x_1^2 - \delta = \pi_1' h_1$$

și ținînd seama de faptul că

$$N(x_1) \leqslant N(\pi_1') - N(x_1),$$

obținem

$$N(\pi_1') N(h_1) = N(x_1^2 - \delta) \leqslant (N(\pi_1') - N(x_1)^2)) + 2N(x_1)\sqrt{N(\delta)} + N(\delta) =$$

$$= [N(\pi_1')]^2 + [\,[N(x_1)]^2 + 2N(x_1)\sqrt{N(\delta)} + N(\delta) - 2N(\pi_1) N(x_1)].$$

Dacă

$$[N(x_1)]^2 + 2N(x_1)\sqrt{N(\delta)} + N(\delta) - 2N(\pi_1') N(x_1) < 0,$$

*) p. 296–297.

atunci

$$N(\pi_1')\,N(h_1) < [N(\pi_1')]^2$$

sau

$$N(h_1) < N(\pi_1').$$

Nu putem avea $N(h_1) = 1$, deoarece atunci, datorită relației $x_1^2 - \delta = \pi_1' h_1$, π_1' nu ar fi întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul al doilea. Deci există cel puțin un întreg prim π'_2 al lui Gauss cu $N(\pi_2') < N(\pi_1')$, care divide pe h_1 și care este întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul al doilea, deoarece în cazul cînd nici un divizor prim al lui h_1 nu ar fi întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul al doilea, atunci, conform teoremei 9, nici π_1' nu ar fi întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul al doilea. Există deci un întreg x_2 al lui Gauss, astfel încît

$$x_2^2 \equiv \delta \pmod{\pi_2'},\quad N(x_2) \leqslant \frac{1}{2} N(\pi_2').$$

Dacă

$$[N(x_2)]^2 + 2N(x_2)\sqrt{N(\delta)} + N(\delta) - 2N(\pi_2')\,N(x_2) < 0,$$

atunci există un întreg indecompozabil π_3' al lui Dirichlet de genul al doilea și un întreg x_3 al lui Gauss, astfel încît

$$N(\pi_3') < N(\pi_2'),$$

$$x_3^2 \equiv \delta \pmod{\pi_3'},\quad N(x_3) \leqslant \frac{1}{2} N(\pi_3').$$

Raționamentul nu poate fi repetat idefinit, deoarece șirul de numere naturale

$$N(\pi_1') > N(\pi_2') > N(\pi_3') > \ldots$$

nu poate fi infinit, deci există un întreg indecompozabil π_n' al lui Dirichlet de genul al doilea și un întreg x_n al lui Gauss pentru care

$$x_n^2 \equiv \delta \pmod{\pi_n'},\quad N(x_n) \leqslant \frac{1}{2} N(\pi_n'),$$

astfel încît

$$[N(x_n)]^2 + 2N(x_n)\sqrt{N(\delta)} + N(\delta) - 2N(\pi_n')\,N(x_n) \geqslant 0$$

sau

$$[N(x_n)]^2 + 2N(x_n)\sqrt{N(\delta)} + N(\delta) \geqslant 4\,[N(x_n)]^2.$$

Așadar

$$3\,[N(x_n)]^2 - 2\sqrt{N(\delta)}\,N(x_n) - N(\delta) \leqslant 0.$$

Această inegalitate este echivalentă cu

$$-\frac{\sqrt{N(\delta)}}{3} \leqslant N(x_n) \leqslant \sqrt{N(\delta)}.$$

Deoarece $N(x_n) \geqslant 0$, vom lua în considerație numai $N(x_n) \leqslant \sqrt{N(\delta)}$. Deci, dacă există întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea atunci există divizori ai expresiilor $x^2 - \delta$ cu $N(x) \leqslant \sqrt{N(\delta)}$, care sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al doilea, deci dacă nu există astfel de divizori ai expresiilor $x^2 - \delta$ cu $N(x) \leqslant \sqrt{N(\delta)}$, atunci nu pot exista nici întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea și atunci, conform teoremei 11, în corpul relativ pătratic $\Re(i, \sqrt{\delta})$ are loc unicitatea descompunerii în factori indecompozabili. Reciproc, dacă această unicitate are loc în corpul relativ pătratic $\Re(i, \sqrt{\delta})$, atunci, conform teoremei 11, nu există întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea și atunci nu există nici expresii $x^2 - \delta$ cu $N(x) \leqslant \sqrt{N(\delta)}$ ai căror divizori sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al doilea, deoarece în cazul cînd acești divizori ar exista atunci, conform teoremelor 9 și 12, ar exista și întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al treilea.

5. Vom alcătui, acum, cu ajutorul teoremei 13, tabloul nr. 1 care va cuprinde toate corpurile relativ pătratice $\Re(i, \sqrt{\delta})$ în care are loc unicitatea descompunerii în factori indecompozabili, pentru $N(\delta) \leqslant 100$. Prezența în acest tablou a cel puțin unui corp relativ pătratic $\Re(i, \sqrt{\delta})$ constituie o demonstrație a existenței corpurilor relativ pătratice $\Re(i, \sqrt{\delta})$ în care are loc unicitatea descompunerii în factori indecompozabili, iar faptul că nu pentru orice δ cu $N(\delta) \leqslant 100$ această unicitate este valabilă, dovedește că există și corpuri relativ pătratice $\Re(i, \sqrt{\delta})$ în care nu are loc unicitatea descompunerii în factori indecompozabili.

Mai întîi, vom alcătui tabloul nr. 1 astfel ca să cuprindă toți întregii lui Gauss δ care verifică inegalitatea

$$N(\delta) \leqslant 100.$$

În tabloul nr. 1, în prima coloană sînt înscrise doar acele cifre cuprinse între 0 și 100 care pot reprezenta norma unui întreg al lui Gauss. Astfel, în această coloană lipsește cifra 3, pentru că nu există nici un întreg al lui Gauss δ pentru care să avem $N(\delta) = 3$.

Atunci cînd vom alcătui expresiile de forma $x^2 - \delta$ cu x și δ întregi ai lui Gauss, iar $N(x) \leqslant \sqrt{N(\delta)}$, vom lua pentru δ numai valorile înscrise în coloanele 2. . . 6, deoarece coloana a 7-a cuprinde întregii lui Gauss, soluții ale ecuațiilor $N(\delta) = k$, $0 \leqslant k \leqslant 100$, care conțin factori pătrate perfecte cu norma mai mare decît unu. Nu am suprimat coloana a 7-a din tabloul nr. 1, deoarece tabloul nr. 1 ne dă nu numai toate soluțiile inegalității $N(\delta) \leqslant 100$, ci pentru un δ dat, ne dă și toate soluțiile inegalității $N(x) \leqslant \sqrt{N(\delta)}$; pentru aceasta e suficient să înlocuim în tabloul nr. 1 pe δ cu x. Deoarece

Tabloul nr. 1

$N(\delta)$	$\delta \equiv 1 \pmod 4$	$\delta \equiv 3 \pmod 4$	$\delta \equiv 1+2i \pmod 4$	$\delta \equiv 3+2i \pmod 4$	δ	δ
0						0
1					$i,\quad -i$ $1,\quad -1$	
2					$1+i,\quad 1-i$ $-1+i,\quad -1-i$	
4						$2,\quad -2$ $2i,\quad -2i$
5			$1+2i,\quad 1-2i$	$-1-2i,\quad -1+2i$	$-2+i,\quad 2-i$ $2+i,\quad -2-i$	
8						$2+2i,\quad 2-2i$ $-2+2i,\quad -2-2i$
9	-3	3			$3i,\quad -3i$	
10					$1+3i,\quad 1-3i$ $-1-3i,\quad -1+3i$ $-3+i,\quad 3+i$ $3-i,\quad -3-i$	
13					$2+3i,\quad 2-3i$ $-2-3i,\quad -2+3i$ $-3+2i,\quad 3+2i$ $3-2i,\quad -3-2i$	
16						$4,\quad -4$ $4i,\quad -4i$
17	$1+4i,\ 1-4i$	$-1-4i,\ -1+4i,$			$-4+i,\quad 4+i$ $4-i,\quad -4-i$	
18					$3+3i,\quad 3-3i$ $-3+3i,\quad -3-3i$	
20						$2+4i,\quad 2-4i$ $-2-4i,\quad -2+4i$ $-4+2i,\quad 4+2i$ $4-2i,\quad -4-2i$
25	5	-5			$5i,\quad -5i$	$3+4i,\quad 3-4i$ $-3-4i,\quad -3+4i$ $-4+3i,\quad 4+3i$ $4-3i,\quad -4-3i$
26					$1+5i,\quad 1-5i$ $-1-5i,\quad -1+5i$ $-5+i,\quad 5+i$ $5-i,\quad -5-i$	

Tabloul nr. 1 (continuare)

$N(\delta)$	$\delta \equiv 1 \pmod 4$	$\delta \equiv 3 \pmod 4$	$\delta \equiv 1 + 2i \pmod 4$	$\delta \equiv 3 + 2i \pmod 4$	δ	δ
29			$5+2i$, $5-2i$	$-5+2i$, $-5-2i$	$2+5i$, $2-5i$ $-2-5i$, $-2+5i$	
32						$4+4i$, $4-4i$ $-4+4i$, $-4-4i$
34					$3+5i$, $3-5i$ $-3-5i$, $-3+5i$ $-5+3i$, $5+3i$ $5-3i$, $-5-3i$	
36						6, -6 $6i$, $-6i$
37			$1+6i$, $1-6i$	$-1-6i$, $-1+6i$	$-6+i$, $6+i$ $6-i$, $-6-i$	
40						$2+6i$, $2-6i$ $-2-6i$, $-2+6i$ $-6+2i$, $6+2i$ $6-2i$, $-6-2i$
41					$4+5i$, $4-5i$ $-4-5i$, $-4+5i$	
	$5-4i$, $5+4i$	$-5+4i$, $-5-4i$				
45			$-3-6i$, $-3+6i$	$3+6i$, $3-6i$	$-6+3i$, $6+3i$ $6-3i$, $-6-3i$	
49					$7i$, $-7i$	
	-7	7				
50					$5+5i$, $5-5i$ $-5-5i$, $-5+5i$	$1+7i$, $1-7i$ $-1-7i$, $-1+7i$ $-7+i$, $7+i$ $7-i$, $-7-i$
52						$4+6i$, $4-6i$ $-4-6i$, $-4+6i$ $-6+4i$, $6+4i$ $6-4i$, $-6-4i$
53					$2+7i$, $2-7i$ $-2-7i$, $-2+7i$	
			$-7+2i$, $-7-2i$	$7+2i$, $7-2i$		

Tabloul nr. 1 (continuare)

$N(\delta)$	$\delta \equiv 1 \pmod 4$	$\delta \equiv 3 \pmod 4$	$\delta \equiv 1 + 2i \pmod 4$	$\delta \equiv 3 + 2i \pmod 4$	δ	δ
58					$-7+3i,\quad 7+3i$ $7-3i,\quad -7-3i$	
					$3+7i,\quad -3-7i$ $3-7i,\quad -3+7i$	
61					$-6+5i,\quad -6-5i$ $6-5i,\quad 6+5i$	
			$5+6i,\quad 5-6i$	$-5+6i,\quad -5-6i$		
64						$8,\quad -8$ $8i,\quad -8i$
65					$4+7i,\quad 4-7i$ $-4-7i,\quad -4+7i$ $-8+i,\quad 8+i$ $8-i,\quad -8-i$	
	$1+8i,\quad 1-8i$ $-7+4i,\quad -7-4i$	$-1-8i,\quad -1+8i$ $7+4i,\quad 7-4i$				
68						$2+8i,\quad 2-8i$ $-2-8i,\quad -2+8i$ $-8+2i,\quad 8+2i$ $8-2i,\quad -8-2i$
72						$6+6i,\quad 6-6i$ $-6-6i,\quad -6+6i$
73	$-3-8i,\quad -3+8i$	$3+8i,\quad 3-8i$			$-8+3i,\quad -8-3i$ $8-3i,\quad 8+3i$	
74					$5+7i,\quad 5-7i$ $-5-7i,\quad -5+7i$ $-7+5i,\quad 7+5i$ $7-5i,\quad -7-5i$	
80						$4+8i,\quad 4-8i$ $-4-8i,\quad -4+8i$ $-8+4i,\quad 8+4i$ $8-4i,\quad -8-4i$
81						$9,\quad -9$ $9i,\quad -9i$
82					$1+9i,\quad 1-9i$ $-1-9i,\quad -1+9i$ $-9+i,\quad 9+i$ $9-i,\quad -9-i$	

Tabloul nr. 1 (continuare)

$N(\delta)$	$\delta \equiv 1 \pmod 4$	$\delta \equiv 3 \pmod 4$	$\delta \equiv 1+2i \pmod 4$	$\delta \equiv 3+2i \pmod 4$	δ	δ
85			$9+2i,\quad 9-2i$	$-9+2i,\quad -9-2i$	$6+7i,\quad 6-7i$ $-6-7i,\quad -6+7i$	
			$-7-6i,\quad -7+6i$	$7+6i,\quad 7-6i$	$-2-9i,\quad -2+9i$ $2+9i,\quad 2-9i$	
89	$5+8i,\quad 5-8i$	$-5+8i,\quad -5-8i$			$-8+5i,\quad -8-5i$ $8-5i,\quad 8+5i$	
90					$3+9i,\quad 3-9i$ $-3-9i,\quad -3+9i$ $-9+3i,\quad 9+3i$ $9-3i,\quad -9-3i$	
97	$9+4i,\quad 9-4i$	$-9-4i,\quad -9+4i$			$4+9i,\quad 4-9i$ $-4-9i,\quad -4+9i$	
98					$7+7i,\quad 7-7i$ $-7+7i,\quad -7-7i$	
100						$10,\quad -10$ $10i,\quad -10i$ $6+8i,\quad -6-8i$ $6-8i,\quad -6+8i$ $-8+6i,\quad 8+6i$ $8-6i,\quad -8-6i$

considerăm doar întregii δ ai lui Gauss pentru care $N(\delta) \leqslant 100$, atunci trebuie să luăm în considerație numai întregii x ai lui Gauss pentru care $N(x) \leqslant 10$. Cu ajutorul tabloului nr. 1 vom alcătui tabloul nr. 2 care va cuprinde toți întregii lui Gauss x^2 pentru care avem $N(x) \leqslant 10$.

Tabloul nr. 2

$N(x)$	0	1	2	4	5	8	9	10
x^2	0	1	$2i$	4	$-3+4i$	$8i$	9	$-8+6i$
		-1	$-2i$	-4	$-3-4i$	$-8i$	-9	$-8-6i$
					$3-4i$			$8-6i$
					$3+4i$			$8+6i$

În tabloul nr. 1 în coloanele 2. . . 6 sînt înscrise valorile lui δ pentru care în corpurile relativ pătratice $\Re(i, \sqrt{\delta})$ are loc unicitatea descompunerii în factori indecompozabili; aceste valori ale lui δ sînt înscrise în acele linii în stînga cărora nu se află triunghiul înnegrit. Pentru valorile lui δ înscrise în liniile în stînga cărora se află triunghiul înnegrit, nu are loc unicitatea descompunerii în factori indecompozabili în corpurile relativ pătratice $\Re(i, \sqrt{\delta})$.

Modul în care am obținut rezultatele din tabloul nr. 1 rezultă din următoarele exemple:

Exemplul 1. Fie $\delta = -5-7i$, $N(\delta) = 25 + 49 = 74$, $N(x) \leqslant \leqslant \sqrt{N(\delta)} = 8, \ldots$ Conform teoremei 13 și utilizînd tabloul nr. 2, vom forma expresiile $x^2 - \delta$:

$$0 + 5 + 7i = 5 + 7i = (1 + i)(6 + i), \tag{1}$$

$$1 + 5 + 7i = 6 + 7i = (1 + 2i)(4 - i), \tag{2}$$

$$-1 + 5 + 7i = 4 + 7i = i(1 - 2i)(3 + 2i), \tag{3}$$

$$2i + 5 + 7i = 5 + 9i = (1 + i)(7 + 2i), \tag{4}$$

$$-2i + 5 + 7i = 5(1 + i) = (1 + i)(1 + 2i)(1 - 2i), \tag{5}$$

$$4 + 5 + 7i = 9 + 7i = i(1 + i)(1 - 2i)(3 - 2i), \tag{6}$$

$$-4 + 5 + 7i = 1 + 7i = -i(1 + i)(1 + 2i)^2, \tag{7}$$

$$-3 + 4i + 5 + 7i = 2 + 11i = -i(1 - 2i)^3, \tag{8}$$

$$-3 - 4i + 5 + 7i = 2 + 3i = i(3 - 2i), \tag{9}$$

$$3 - 4i + 5 + 7i = 8 + 3i, \tag{10}$$

$$3 + 4i + 5 + 7i = 8 + 11i = (1 + 2i)(6 - i), \tag{11}$$

$$8i + 5 + 7i = 5(1 + 3i) = i(1 + i)(1 + 2i)(1 - 2i)^2, \tag{12}$$

$$-8i + 5 + 7i = 5 + i = (1 + i)(3 - 2i). \tag{13}$$

Întregii primi ai lui Gauss, divizori ai expresiilor $x^2 + 5 + 7i$ cu $N(x) \leqslant \sqrt{N(-5-7i)}$, după cum se vede din calculele de mai sus, sînt: $1 + i$, $6 + i$, $1 + 2i$, $4 - i$, $1 - 2i$, $3 + 2i$, $7 + 2i$, $3 - 2i$, $8 + 3i$, $6 - i$. Deoarece expresiile (9) și (10) sînt de forma descrisă în teorema 6 rezultă că întregii primi ai lui Gauss $3 - 2i$ și $8 + 3i$ nu sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al doilea. Deoarece $3 - 2i$ se scrie sub forma dată în teorema 6, din expresia (13), conform teoremelor 9,7 și 6 rezultă că $1 + i$ nu este întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul al doilea. Repetînd raționamentul făcut pentru $1 + i$ și avînd în vedere expresiile (1) și (4) rezultă că nici $6 + i$ și $7 + 2i$ nu sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al doilea. Avînd în vedere expresia (6) și repetînd de două ori raționamentul de mai sus, obținem că și $1 - 2i$ nu este întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul al doilea. Aplicînd rezultatele de mai sus expresiilor (3) și (5) și apoi, ținînd seama și de noile rezultate, dacă ne vom referi la expresiile (2) și (11) vom ajunge la concluzia că niciun întreg prim al lui Gauss, divizor al expresiilor $x^2 +$

$+ 5 + 7i$ cu $N(x) \leqslant \sqrt{N(-5-7i)}$ nu este întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul al doilea, deci în corpul relativ pătratic $\Re(i, \sqrt{-5-7i})$ are loc unicitatea descompunerii în factori indecompozabili.

Teorema 14. *Dacă în corpul relativ pătratic* $\Re(i, \sqrt{\delta})$ *are loc unicitatea descompunerii în factori indecompozabili, atunci această unicitate are loc și în corpurile* $\Re(i, \sqrt{\eta\delta})$, $\Re(i, \sqrt{\eta\bar{\delta}})$, *unde* $\eta = \pm 1$, *iar* $\bar{\delta}$ *este conjugatul complex al lui* δ.

Demonstrație. Dacă $N(x) = k \leqslant \sqrt{N(\delta)}$, atunci printre expresiile $x^2 - \delta$ cu $N(x) \leqslant \sqrt{N(\delta)}$ se află și $(\varepsilon x)^2 - \delta$ precum și $(\bar{x})^2 - \delta$, $(\varepsilon \bar{x})^2 - \delta$, deoarece odată cu x și întregii lui Gauss εx, $\bar{x}$, $\varepsilon\bar{x}$ cu $\varepsilon = \pm i$ sînt soluții ale ecuației $N(x) = k$. Însă, $(\varepsilon x)^2 - \delta = \eta x^2 - \delta = \eta(x^2 - \eta\delta)$, $(\bar{x})^2 - \delta = \overline{(x^2 - \bar{\delta})}$, $(\varepsilon\bar{x})^2 - \delta = \eta(\bar{x})^2 - \delta = \eta(\bar{x})^2 - \eta\delta) = \eta(x^2 - \eta\bar{\delta})$, deci lista expresiilor $x^2 - \delta$ cu $N(x) \leqslant \sqrt{N(\delta)}$ pentru cazul cînd în locul lui δ se pune $\eta\delta$ sau $\eta\bar{\delta}$ cu $\eta = \pm 1$ se obține din lista expresiilor $x^2 - \delta$ cu $N(x) \leqslant \sqrt{N(\delta)}$, alcătuită pentru δ, prin intermediul operațiilor indicate mai sus, deci dacă pentru δ divizorii expresiilor $x^2 - \delta$ cu $N(x) \leqslant \sqrt{N(\delta)}$ nu sînt întregi indecompozabili ai lui Dirichlet de genul al doilea, aceeași concluzie este valabilă și pentru divizorii expresiilor $x^2 - \delta$ atunci cînd în locul lui δ se pune $\eta\delta$ sau $\eta\bar{\delta}$.

Observație. Utilizînd teorema 14 și știind că în corpul relativ pătratic $\Re(i, \sqrt{-5-7i})$ are loc unicitatea descompunerii în factori indecompozabili, am dovedit că și în corpurile relativ pătratice $\Re(i, \sqrt{\delta})$ cu $\delta = -(-5-7i) = 5 + 7i$, $\delta = -5 + 7i$, $\delta = -(-5 + 7i) = 5 - 7i$ are loc unicitatea descompunerii în factori indecompozabili.

Exemplul 2. Fie $\delta = -3$, $N(\delta) = 9$, $N(x) \leqslant \sqrt{N(\delta)} = 3$. Conform teoremei 13 și utilizînd tabloul nr. 2, vom forma expresiile $x^2 - \delta$:

$$0 + 3 = 3 \tag{1}$$

$$1 + 3 = 4, \tag{2}$$

$$-1 + 3 = 2 = -i(1+i)^2, \tag{3}$$

$$2i + 3 = 3 + 2i, \tag{4}$$

$$-2i + 3 = 3 - 2i. \tag{5}$$

Expresiile (1), (4) și (5), conform teoremei 6, ne arată că $3{,}3 + 2i$ și $3 - 2i$ nu sînt întregi indecompozabili al lui Dirichlet de genul al doilea, dar pentru ca $1 + i$ să nu fie întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul al doilea ar trebui, conform teoremei 6, să avem

$$1 + i = \varepsilon \frac{1}{4}[(2\sigma + \tau)^2 + 3\tau^2],$$

ε fiind o unitate în inelul întregilor lui Gauss, deci trebuie să avem

$$(2\sigma + \tau)^2 \equiv 4(1+i)\bar{\varepsilon} \pmod 3.$$

În [9]*) Dirichlet asociază congruenței

$$x^2 \equiv \alpha + \beta i \pmod{a},$$

unde a este întreg natural prim de forma $4m+3$, simbolul lui Legendre $\left[\frac{\alpha+\beta i}{a}\right]$ și dovedește că

$$\left[\frac{\alpha+\beta i}{a}\right] = \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{a}\right),$$

unde $\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{a}\right)$ este simbolul lui Legendre pentru întregii raționali. Deci

$$\left[\frac{4(1+i)\bar{\varepsilon}}{3}\right] = \left[\frac{2}{3}\right]^2\left[\frac{1+i}{3}\right]\left[\frac{\bar{\varepsilon}}{3}\right] = \left[\frac{1+i}{3}\right] = \left(\frac{2}{3}\right) = (-1)^{\frac{-3-1}{4}} = -1,$$

deci este imposibil de rezolvat congruența

$$(2\sigma+\tau)^2 \equiv 4(1+i)\bar{\varepsilon} \pmod{3}$$

și cu atît mai mult e imposibil ca

$$1+i = \varepsilon\frac{1}{4}[(2\sigma+\tau)^2 + 3\tau^2],$$

deci $1+i$ este, în corpul $\Re(i, \sqrt{-3})$, întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul al doilea și deci în corpul relativ pătratic $\Re(i, \sqrt{-3})$ nu are loc unicitatea descompunerii în factori indecompozabili.

Exemplul 3. Fie $\delta = -1-4i$, $N(\delta) = 17$, $N(x) \leqslant \sqrt{N(\delta)} = 4, \ldots$ Conform teoremei 13 și utilizînd tabloul nr. 2, vom forma expresiile $x^2 - \delta$:

$$0+1+4i = 1+4i, \tag{1}$$

$$1+1+4i = 2(1+2i) = -i(1+i)^2(1+2i), \tag{2}$$

$$-1+1+4i = 4i, \tag{3}$$

$$2i+1+4i = 1+6i, \tag{4}$$

$$-2i+1+4i = 1+2i, \tag{5}$$

$$4+1+4i = 5+4i, \tag{6}$$

$$-4+1+4i = -3+4i = (1+2i)^2. \tag{7}$$

Din expresiile de mai sus, prin utilizarea teoremelor cunoscute din această lucrare, nu rezultă că $1+i$ nu este întreg indecompozabil al lui Di-

*) p. 306–319

richlet de genul al doilea, deci vom căuta să vedem dacă putem pune pe $1 + i$ sub forma din teorema 6 :

$$1 + i = \varepsilon \frac{1}{4} [(2\sigma + i\tau)^2 + (1 + 4i)\tau^2],$$

ε fiind o unitate în inelul întregilor lui Gauss. Dacă $1 + i$ se poate pune sub forma de mai sus, atunci

$$(2\sigma + i\tau)^2 \equiv 4(1 + i)\overline{\varepsilon} \pmod{1 + 4i}.$$

În [9]*) Dirichlet asociază congruenței

$$x^2 \equiv \alpha + \beta i \bmod a + bi),$$

unde $a + bi$ este întreg prim al lui Gauss cu $b \equiv 0 \pmod 2$, simbolul lui Legendre $\left[\frac{\alpha + \beta i}{a + bi}\right]$ și dovedește că

$$\left[\frac{\alpha + \beta i}{a + bi}\right] = \left(\frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2}\right),$$

unde $\left(\frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2}\right)$ este simbolul lui Legendre pentru întregii raționali. Deci

$$\left[\frac{4(1 + i)\overline{\varepsilon}}{1 + 4i}\right] = \left[\frac{2}{1 + 4i}\right]^2 \left[\frac{1 + i}{1 + 4i}\right]\left[\frac{\overline{\varepsilon}}{1 + 4i}\right] = \left(\frac{1 + 4}{17}\right)\left(\frac{\pm 4}{17}\right) \text{ sau } \left(\frac{1 + 4}{17}\right)\left(\frac{\pm 1}{17}\right)$$

după cum $\overline{\varepsilon} = \pm i$ sau $\overline{\varepsilon} = \pm 1$. Însă $\left(\frac{\pm 4}{17}\right) = \left(\frac{\pm 1}{17}\right)\left(\frac{2}{17}\right)^2 = \left(\frac{\pm 1}{17}\right)$, iar

$\left(\frac{1}{17}\right) = 1$, $\left(\frac{-1}{17}\right) = (-1)^{\frac{17-1}{2}} = 1$ deci

$$\left[\frac{4(1 + i)\overline{\varepsilon}}{1 + 4i}\right] = \left(\frac{5}{17}\right) = (-1)^{\frac{5-1}{2}\frac{17-1}{2}}\left(\frac{17}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) = (-1)^{\frac{5-1}{4}} = -1,$$

deci este imposibil de rezolvat congruența

$$(2\sigma + i\tau)^2 \equiv 4(1 + i)\overline{\varepsilon} \pmod{1 + 4i}$$

și cu atît mai mult e imposibil ca $1 + i$ să fie pus sub forma din teorema 6 deci $1 + i$ este, în corpul $\Re(i, \sqrt{-1 - 4i})$, întreg indecompozabil al lui Dirichlet de genul al doilea și deci în corpul relativ pătratic $\Re(i, \sqrt{-1 - 4i})$ nu are loc unicitatea descompunerii în factori indecompozabili.

*) p. 306–319.

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ В КОЛЬЦАХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ДИРИХЛЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В этой статье доказано существование относительно квадратичных полей Дирихле, целые которых однозначно представляются как произведения несложных целых чисел Дирихле, и существование относительно квадратичных полей Дирихле, содержащих целые числа, которые неоднозначно разлагаются на несложные множители. Для доказательства несложные целые числа Дирихле были разделены на три категории:

а) Несложные целые числа Дирихле первого рода — собственные делители простых чисел Гаусса.

б) Несложные целые числа Дирихле второго рода — простые целые числа Гаусса, для которых никакое целое число Дирихле не является собственным делителем.

в) Несложные целые числа Дирихле третьего рода, не ассоциированные с несложными целыми числами Дирихле второго рода,—собственные делители целых чисел Гаусса, являющиеся произведениями простых чисел Гаусса, определяемыми в б).

Несложные целые числа Дирихле первого рода являются простыми числами при любом относительно квадратичном поле Дирихле, которому они принадлежат.

Решение задачи однозначности разложения целых чисел Дирихле на несложные множители получено в силу того, что эта однозначность имеет место тогда и только тогда, когда несложные целые числа Дирихле третьего рода не существуют.

По существу эта статья опирается на теорему.

Теорема 5. *Если разложение целых чисел Гаусса на несложные множители Дирихле, с точностью до порядка и до ассоциации сомножителей, является однозначным, то целые числа Дирихле разлагаются однозначно, с точностью до порядка и до ассоциации сомножителей, на несложные множители Дирихле и обратно.*

SUR L'UNICITÉ DE LA DÉCOMPOSITION EN FACTEURS PREMIERS DANS LES ANNEAUX DES ENTIERS DE DIRICHLET

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, l'auteur démontre l'existence des corps relativement quadratiques de Dirichlet dont les entiers s'expriment d'une manière unique par des produits d'entiers indécomposables de Dirichlet ; il établit également l'existence des corps relativement quadratiques de Dirichlet qui contiennent des entiers qui ne se décomposent pas d'une manière unique en facteurs indécomposables. Pour en obtenir ce fait, les entiers indécomposables de Dirichelet ont été répartis en trois catégories :

a) Entiers indécomposables de Dirichlet du premier genre, qui sont les diviseurs propres des entiers premiers de Gauss.

b) Entiers indécomposables de Dirichlet du second genre, qui sont des entiers premiers de Gauss, n'admettant pas d'entiers de Dirichlet comme diviseurs propres.

c) Entiers indécomposables de Dirichlet du troisième genre, non associés à ceux du second genre, mais diviseurs propres des entiers de Gauss, qui se présentent comme des produits d'entiers premiers de Gauss mentionnés en *b*).

Les entiers indécomposables de Dirichlet du premier genre sont premiers, quel que soit le corps relativement quadratique de Dirichlet auquel ils appartiennent.

Le problème de l'unicité de la décomposition des entiers de Dirichlet en facteurs indécomposables est résolu par le fait que cette unicité n'a lieu que si, et seulement s'il n'existe pas d'entiers indécomposables de Dirichlet, du troisième genre.

En essence, tout ce travail est fondé sur le théorème 5, dont l'énoncé est le suivant :

Si la décomposition des entiers de Gauss en facteurs indécomposables de Dirichlet, — au cas où l'on fait abstraction de l'ordre des facteurs et des facteurs associés, — est unique, les entiers de Dirichelet, —au cas où l'on fait abstraction des mêmes—se décomposent d'une manière unique en facteurs indécomposables de Dirichlet, et inversement.

BIBLIOGRAFIE

1. Constantin P. Popovici, *Asupra determinării unei baze a întregilor corpului relativ pătratic al lui Dirichlet.* Revista Universităţii C. I. Parhon şi a Politehnicii, Bucureşti, 1954, nr. 4—5, p. 47.
2. — *Asupra unicităţii descompunerii în factori primi în inelele de întregi pătratici.* Bul. Mat. al Soc. Şt. Mat. Fiz. din R.P.R., t. 1 (49), nr. 1, 1957, p. 99.
3. H. Hasse, *Lecţii po teorii cisel.* Moscova, 1953.
4. Gr. C. Moisil, *Introducere în algebră. I. Inele şi ideale* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1954, vol. I.
5. R. Dedekind, *Sur la théorie des nombres entiers algébriques.* Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, Paris, 1876, t. 11, p. 278.
6. J. Sommer, *Introduction à la théorie des nombres algébriques.* Hermann, Paris, 1911.
7. J. Sochocki, *Zasada największego wspólnego dzielnika w n zastosowaniu do teoryi podzielności liczb algebraicznych.* Prace matem. figzyczn, t. IV, p. 95.
8. Gr. C. Moisil, *Introducere în algebră I. Inele şi ideale* Vol. II (după manuscrisul autorului).
9. Lejeune G. Dirichlet, *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes* Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlin, 1842, vol. 24, caietul IV, p. 291.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VIII, nr. 1—2, 1957

CONTRIBUŢII LA O ANALIZĂ INFINITEZIMALĂ BIDIMENSIONALĂ *)

DE

EUGEN V. DOBRESCU

Capitolul I

Semicontinuitatea într-o analiză pluridimensională a lui K. Bögel **)

1. E necesar, pentru înţelegerea celor ce urmează, a explica notaţiile utilizate de D. K. B ö g e l [1], [2] în memoriile sale şi de a reaminti cîteva notaţii utilizate de acest autor.

Se înseamnă cu $X\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $A\ (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B\ (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ puncte ale spaţiului euclidian cu n-dimensiuni ; cu X_r, A_r, B_r, ... proiecţiile ortogonale ale lui X, A, B, ... pe un subspaţiu de coordonate cu r-dimensiuni ; cu $X - X_r$, $A - A_r$, $B - B_r$, ... proiecţiile lui X, A, B, ... pe subspaţiul de $n - r$ — dimensiuni, ortogonal primului. Prin $(A_r,\ B - B_r)$ se va înţelege punctul dedus din B printr-o translaţie paralelă cu subspaţiul cu r — dimensiuni, căruia îi aparţine A_r şi B_r, aşa fel ca B_r să coincidă cu A_r. Convenim să punem $(A_0,\ B - B_0) = B$.

Rezultă că intervalul cu n-dimensiuni $(A_r,\ B - B_r\ ;\ B_r,\ A - A_r)$ este tot intervalul $(A\ ;\ B)$, dar posedă alt punct iniţial şi alt punct final.

Fie un paralelipiped n-dimensional cu 2^n vîrfuri. Dacă A, B sînt două vîrfuri opuse, orice alt vîrf este dat conform notaţiei de mai sus sub forma $(A_r,\ B - B_r)$, $r = 1,2,\ldots,n$.

Notăm un interval cu r dimensiuni, într-un spaţiu cu n-dimensiuni prin $(A_r,\ B_r\ P - P_r)$ din care reiese că x_r ia valori în intervalul $(A_r,\ B_r)$ cînd $X - x_r$ iar valoarea fixă $P - P_r$.

Oricărei funcţii de punct $f(x)$ i se ataşează o funcţie de interval

$$\Delta_n f(A,B) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r f(A_r,\ B - B_r)$$

---

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică, în şedinţa din 3 noiembrie, 1956.

**) Rezultatele acestei lucrări au fost susţinute de noi pentru obţinerea titlului de Doctor în ştiinţele matematice la Universitatea „C. I. Parhon" din Bucureşti, februarie 1949.

care se numește diferență n-dimensională a lui f relativă la intervalul $(A\ ;\ B)$. Suma Σ se referă la cele 2^n vîrfuri ale paralelipipedului $(A\ ;\ B)$.

2. Dacă funcția $\Delta_n f(A\ ;\ X)$ tinde la zero cînd X tinde către A, se spune că $f(x)$ este global - continuă în punctul A [1], [2], [3], [4].

Pentru simplificarea calculelor, în cele ce urmează, vom considera spațiul cu două dimensiuni.

3. *Definiția 1.* Vom spune că funcția $f(x)$ are o margine globală superioară în domeniul (D) cînd se poate găsi un număr ΔM cu următoarele două proprietăți.

a) Oricare ar fi $X \in (D)$, există două puncte $\overline{X}$ și $\underline{X}$, aparținînd la drepte paralele cu axele de coordonate trecînd prin X, astfel încît

$$f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(X) < \Delta M + \varepsilon$$

oricare ar fi ε pozitiv.

b) Oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde cel puțin un punct $X \in (D)$ și două puncte $\overline{X}$, $\underline{X}$, aparținînd la drepte paralele cu axele decoordonate trecînd prin X, astfel încît

$$f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(X) > \Delta M - \varepsilon.$$

Definiția 2. Vom spune că $f(X)$ are o margine globală inferioară în domeniul (D), dacă există un număr Δm cu următoarele două proprietăți :

a) Oricare ar fi $X \in (D)$, există două puncte $\overline{X}$, $\underline{X}$, aparținînd la drepte paralele cu axele de coordonate trecînd prin X atsfel încît

$$f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(X) < \Delta m - \varepsilon$$

oricare ar fi ε pozitiv.

b) Oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde cel puțin un $X \in (D)$ și două puncte $\overline{X}$, $\underline{X}$, aparținînd la drepte paralele cu axele trecînd prin X astfel încît

$$f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(X) < \Delta m + \varepsilon.$$

Dacă o funcție admite o margine globală superioară și o margine globală inferioară în domeniul (D) vom spune că admite o margine globală în domeniul (D).

4. Teorema 1. *O funcție ce admite o margine, admite o margine globală.*

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $|f(X)| \leqslant M$ atunci

$$|f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(X)| \leqslant |f(\overline{X})| + |f(\underline{X})| + |f(X)| \leqslant 3M.$$

5. Teorema 2. *Orice funcție uniform global continuă într-un interval închis, admite o margine globală în acest interval.*

Demonstrație. Fie A un punct fix și X un punct arbitrar (fig. 1).

$$\Delta f(A\ ;\ X) = \sum \Delta\ f(x_i,\ x_{i+1})$$

pentru că Δ e o funcție aditivă de interval.

Sau

$$f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(X) = f(A) - \sum \Delta f(x_i,\ x_{i+1}),$$

de unde

$$|f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(\underline{X})| \leqslant |f(A)| - \sum |\Delta f(x_i,\ x_{i+1})|.$$

Dar $f(x)$ fiind uniform global continuă și notînd cu n, numărul intervalelor în care poate fi împărțit $(A\ ;\ X)$ astfel ca într-un interval parțial oscilația globală a funcției să nu depășească un număr pozitiv dat, avem

$$|f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(X)| \leqslant |f(A)| + n\varepsilon,$$

de unde rezultă teorema enunțată.

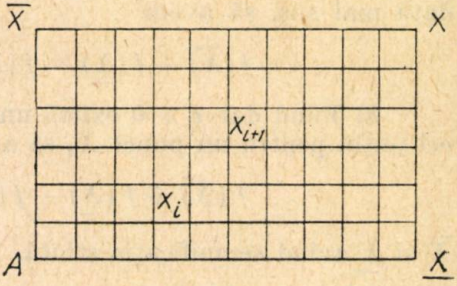


Fig. 1

6. Să notăm respectiv, marginea globală superioară și marginea globală inferioară a lui f în (D) cu

$$\Delta M(f\ ;\ D); \quad \Delta m(f\ ;\ D).$$

Se vede imediat că dacă

$$D' \subset D$$

avem

$$M(f\ ;\ D') \leqslant M(f\ ;\ D),$$
$$m(f\ ;\ D') \geqslant m(f\ ;\ D).$$

7. Fie $f(X)$ o funcție de punct, definită în domeniul (D) al spațiului cu două dimensiuni și P un punct aparținînd lui (D). Să considerăm un cerc (C_1) de rază r_1 și centru P.

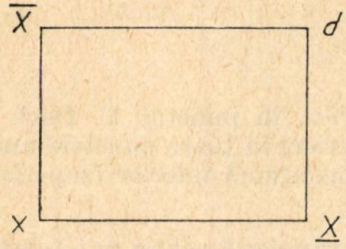


Fig. 2

Dacă $X \in (C_1)$ să însemnăm cu ΔM_1 marginea superioară a expresiei

$$f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(X).$$

Fie șirul de numere pozitive tinzînd către zero

$$r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3 \geqslant \ldots \geqslant r_n \geqslant \ldots$$

și cercurile

$$(C_1),\ (C_2), \ldots\ (C_n), \ldots$$

de centru P și rază r_n și șirul

$$\Delta M_1 \geqslant \Delta M_2 \geqslant \ldots \geqslant \Delta M_n \geqslant \ldots$$

de margini superioare corespondente.

Să însemnăm cu $\Delta M\,(f;\,P)$ limita inferioară a lui ΔM și să convenim a numi acest număr maximal global al lui f în punctul P.

8. Analog se definește minimul global al lui f în P și se notează cu $\Delta m\,(f;\,P)$.

9. Proprietățile fundamentale ale numărului $\Delta M\,(f;\,P)$ sînt:

a) Fiind dat $\varepsilon > 0$ există un număr r, astfel încît oricare ar fi X aparținînd cercului de centru P și de rază r, $\overline{X}$ și $\underline{X}$ avînd semnificațiile date mai sus, să avem

$$f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(X) < \Delta M\,(f;\,P) + \varepsilon$$

b) Fiind dat $\varepsilon > 0$ există un cerc de rază r și de centru P în care, cel puțin pentru un punct X, să avem

$$f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(X) > \Delta\, M\,(f;\,P) - \varepsilon,$$

$\overline{X}$ și $\underline{X}$ avînd semnificația știută.

10. Dacă $\Delta\, M\,(f;\,D)$ este marginea globală superioară a lui f în (D) și $\Delta\, M\,(f;\,P)$ maximul global al lui f în P și dacă $P \in (D)$ avem

$$\Delta M\,(f;\,P) \leqslant \Delta\, M\,(f;\,D).$$

Se pot da proprietăți analoge pentru minimul global al lui f în P; dacă $P \in (D)$ avem

$$\Delta m\,(f;\,P) \geqslant \Delta m\,(f;\,D).$$

11. Atragem atenția asupra cazului particular important în care

$$f(P) = \Delta M\,(f;\,P).$$

Vom spune în acest caz că funcția $f\,(P)$ este *global semicontinuă superior* în punctul P.

Dacă o funcție $f\,(P)$ satisface relația

$$f(P) = \Delta m\,(f;\,P)$$

vom spune că este *global semicontinuă inferior*, în punctul P. Dacă o funcție este global semicontinuă inferior (superior) în toate punctele unui domeniu (D), vom spune că este global semicontinuă inferior (superior) în domeniul (D).

12. Teorema 3. *Condiția necesară și suficientă pentru ca o funcție să fie global semicontinuă superior în punctul P este ca oricărui $\varepsilon > 0$ dat să-i corespundă un $\eta\,(\varepsilon)$ astfel încît pentru*

$$|X - P| < \eta$$

să avem

$$\Delta f\,(X);\,P) > \varepsilon.$$

Demonstrație. Într-adevăr, dacă

$$\Delta f(X;\ P) > \varepsilon \text{ pentru orice } |X - P| < \eta$$

avem

$$f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(X) - f(P) < -\varepsilon$$

sau

$$f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(X) < f(P) - \varepsilon \leqslant \Delta M(f;\ P).$$

Invers, dacă

$$f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(X) \leqslant \Delta\ M(f;\ P),$$

adică

$$f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(X) < f(P) + \varepsilon$$

sau

$$-[f(X) + f(P) - f(\overline{X}) - f(\underline{X})] < \varepsilon$$

deci

$$\Delta f(X;\ P) > \varepsilon.$$

Printr-un raționament analog se demonstrează

13. T e o r e m a 4. *Condiția necesară și sufitcentă pentru ca o funcție să fie globală semicontinuă inferior în punctul P este ca oricărui* $\varepsilon > 0$ *dat să-i corespundă un* $\eta\ (\varepsilon)$ *astfel încît pentru*

$$|X - P| < \eta$$

să avem

$$\Delta f(X;\ P) < \varepsilon.$$

14. T e o r e m a 5. *O funcție în același timp inferior și superior global semicontinuă în punctul P, este o funcție global continuă în punctul P.*

Demonstrație. Într-adevăr, pentru

$$|X - P| < \eta\,(\varepsilon)$$

rezultă

$$\Delta f(X;\ P) > \varepsilon$$

și

$$\Delta f(X;\ P) < \varepsilon.$$

Deci

$$|\Delta f(X;\ P)| < \varepsilon$$

Îndată ce $|X - P| < \eta$.

15. T e o r e m a 6. *Dacă funcția de punct* $f(X)$ *definită în domeniul* (D) *este global semicontinuă superior, atunci mulțimea punctelor* $\{X\}$ *petru care*

$$f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(X) \leqslant \alpha \qquad (1)$$

oricare ar fi α, iar $\overline{X}$ și $\underline{X}$ fiind două puncte aparținînd la drepte paralele cu axele de coordonate, trecînd prin X, este închisă. (fig. 3).

Într-adevăr, fie P un punct de acumulare al mulțimei $\{X\}$.

Să presupunem că avem

$$f(\overline{P}) + f(\underline{P}) - f(P) > \alpha. \tag{2}$$

Funcția f fiind global semicontinuă superior în punctul P, avem

$$\Delta f(X; P) > -\varepsilon$$

oricare ar fi ε pozitiv. Deci

$$f(\overline{P}) + f(\underline{P}) - f(P) < f(X) + \varepsilon =$$

$$\Delta M(f; X) + \varepsilon.$$

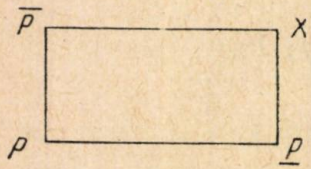


Fig. 3

Pe de altă parte din inegalitatea (1), rezultă $\Delta M(f; X) \leqslant \alpha$.

Prin urmare vom avea

$$f(\overline{P}) + f(\underline{P}) - f(P) \leqslant \alpha + \varepsilon, \text{ oricare ar fi } \varepsilon,$$

de unde contrazicerea ipotezei (2).

16. Teorema 7. *Dacă funcția de punct $f(X)$, definită în domeniul (D), este global semicontinuă inferior, atunci mulțimea punctelor X pentru care avem*

$$f(\overline{X}) + f(\underline{X}) - f(X) \geqslant \alpha$$

oricare ar fi α, iar $\overline{X}$ și $\underline{X}$ fiind două puncte aparținînd la drepte paralele cu axele, trecînd prin X, este închisă.

17. Se poate demonstra imediat că:
Suma a două funcții superior (inferior) global semicontinue este o funcție superior (inferior) global semicontinuă; dacă $f(X)$ este superior (inferior) global semicontinuă atunci $-f(X)$ este inferior (superior) global semicontinuă; diferența între o funcție superior (inferior) global semicontinuă și o funcție inferior (superior) global semicontinuă este o funcție superor (inferior) global semicontinuă.

18. Funcția

$$y = \Delta M(f; X)$$

constituie un exemplu de funcție global semicontinuă superior, iar

$$y = \Delta m(f; X)$$

constituie un exemplu de funcție global semicontinuă inferior.

19. Fie

$$\Delta\omega(f; P) = \Delta M(f; P) - \Delta m(f; P).$$

Vom numi acest număr oscilație globală a lui f în punctul P. $\Delta\omega\,(f\,;\,X)$ fiind o funcție global semicontinuă superior, putem enunța pentru această funcție teorema 7.

20. Fie $f\,(X)$ o funcție oarecare. Să luăm un punct arbitrar P și un cerc de centru P și raza ρ. În cerc funcția $f\,(X)$ are o oscilație globală determinată. Cînd facem pe P să varieze, $\Delta\omega$ poate fi considerată ca o funcție de valorile pozitive ale lui ρ. Pentru $\rho = 0$ atribuim lui $\Delta\omega$ valoarea oscilației globală în punctul P. Să considerăm acum un număr pozitiv λ. Deoarece $\Delta\omega$ este o funcție nedescrescătoare de ρ, atunci există un număr r perfect determinat, astfel încît

$$\text{pentru } \rho \neq r \text{ să avem } \Delta\omega\,(\rho) \leqslant \lambda\,;$$

$$\text{pentru } \rho \neq r \text{ să avem } \Delta\omega\,(\rho) \leqslant \lambda \text{ sau } \Delta\omega\,(\rho) \geqslant \lambda.$$

Putem defini numărul r ca limita superioară a numerelor ρ, pentru care avem

$$\Delta\omega\,(\rho) < \lambda.$$

Dacă λ este un număr fix, pozitiv, determinat pentru P variind, r devine o funcție de punctul P.

Demonstrația continuității acestei funcții fiind în întregime analogă cu aceea dată de R. B a i r e [5], [6], în cazul oscilației unei funcții nu o mai facem.

21. Fiind dată o funcție $f\,(X)$, noi am definit că $\Delta\omega\,(f\,;\,X)$ este oscilația globală a lui f în orice punct. Fie (D) un domeniu oarecare. Să notăm cu λ maximul lui $\Delta\omega$ în acest domeniu și să luăm un număr λ' superior lui λ. Pentru că în orice punct avem $\Delta\omega < \lambda'$ funcția r corespunzătoare lui λ' are în orice punct o valoare pozitivă, niciodată nulă, deci minimul său în domeniul (D) este un număr pozitiv. De aici se deduce imediat

T e o r e m a 8. *Dacă λ' este un număr superior maximului lui $\Delta\omega$ în domeniul (D), există un număr pozitiv α astfel încît în toate cercurile de raze egale sau inferioare lui α, oscilația funcției $f\,(X)$ este cel mult egală cu λ'.*

22. T e o r e m a 9. *O funcție global semicontinuă superior poate fi descompusă într-o funcție inferior semicontinuă în sensul obișnuit Baire, plus două funcții parțial constante în raport cu fiecare variabilă x_1, x_2; x_1, x_2 fiind coordonatele unui punct X.*

Demonstrație. Avem identitatea evidentă

$$f\,(X) = f\,(A) + \Delta f\,(a\,;\,X) + f\,(\overline{X}) - f\,(A) + f\,(X) - f\,(A).$$

În ipoteza

$$\Delta f\,(A\,;\,X) \geqslant \varepsilon \text{ pentru } |\,X - A\,| < \eta\,(\varepsilon)$$

rezultă că funcția

$$y\,(X) = f\,(A) + \Delta f\,(A\,;\,X)$$

este inferior semicontinuă.

Celelalte două diferențe sînt parțial constante cel puțin în raport cu o variabilă x_1, x_2.

23. Teorema 10. *O funcție inferior global semicontinuă poate fi descompusă într-o funcție superior semicontinuă și în două funcții parțial constante în raport cu variabilele* x_1, x_2. Demonstrația este analogă teoremei 9.

24. Teorema 11. *O funcție ce se poate descompune într-o sumă avînd ca termeni funcția*

$g(X)$ { — *superior semicontinuă după cele două direcții paralele cu axele*; — *inferior semicontinuă după orice altă direcție*; *și alte două funcții parțial constante în raport cu variabilele* x_1, x_2 *este superior global semicontinuă.*

Demonstrație. Să presupunem $f(X) = g(X) + \sum_{\nu=1}^{2} g_\nu (X - x_\nu)$.

Se vede ușor că funcția $f(X)$ este global semicontinuă superior deoarece

$$\Delta g(A; X) = g(X) - g(A) + g(A) - g(\overline{X}) + g(A) - g(\underline{X})$$

care în virtutea proprietăților date lui $g(X)$ este pozitivă sau nulă.

Pe de altă parte

$$\Delta f(A; X) = \Delta g(A; X) + \Sigma \Delta g_\nu(A; X) = \Delta g(A; X)$$

căci

$$\sum \Delta g_\nu(A; X) = \sum \Delta_1 g_\nu(A'; X) - \sum \Delta_1 g_\nu(A; X') = 0,$$

unde, dacă se consideră două laturi ale intervalului $(A; X)$ perpendiculare pe axa variabilei x_2, prima trecînd prin A și a doua prin X, atunci X' este opusul lui A pe prima latură, iar A' opusul lui X pe a doua.

Deci

$$\Delta f(A; X) \geqslant \varepsilon.$$

25. La fel se demonstrează:

Teorema 12. *O funcție ce se poate descompune într-o sumă avînd ca termen funcția*

$g(X)$ { — *inferior semicontinuă după cele două direcții paralele cu axele*; — *superior semicontinuă după orice altă direcție*; *și două funcții parțial constante în raport cu variabilele* x_1, x_2 *este global semicontinuă inferior.*

26. Drept corespondente a teoremei I din [3] a acad. Miron Nicolescu, vom da următoarele teoreme

Teorema 13. *Dacă* $f(X)$ *este global semicontinuă superior în* $(A; B)$, expresia

$$\omega(X_\nu) = \Delta_1 f(A - a_\nu; B - b_\nu / x_\nu)$$

este o funcție inferior semicontinuă în $(a_\nu; b_\nu)$,

Demonstrație. În virtutea teoremei 9 avem

$$f(X) = g(X) + \sum_{\nu=1}^{2} g(X - x_\nu).$$

Se deduce imediat

$$\Delta_1 f(A - a_\nu ; B - b_\nu / x_\nu) = \Delta_1 g(A - a_\nu ; B - b_\nu / x_\nu) +$$
$$+ \Delta_1 g_\nu (A - a_\nu ; B - b_\nu / x_\nu)$$

Dar

$$\Delta_1 g_\nu (A - a_\nu ; B - b_\nu / x_\nu) = 0$$

și

$$\Delta_1 g(A - a_\nu ; B - b_\nu / x_\nu)$$

este inferior semicontinuă.

La fel se demonstrează și

T e o r e m a 14. *Dacă* $f(X)$ *este inferior global semicontinuă în* $(A ; B)$ *expresia*

$$\omega(X_\nu) = \Delta_1 f(A - a_\nu ; B - b_\nu / x_\nu)$$

este o funcție superior semicontinuă.

27. Drept corespondente ale teoremei II din [3] a acad. M i r o n N i c o l e s c u vom da teoremele:

T e o r e m a 15. *Dacă pentru o funcție global semicontinuă superior în* $(A ; B)$ *avem*

$$\Delta f(A ; B) \geqslant 0 \tag{3}$$

atunci oricărui punct $A' \in (A ; B)$ *putem face să-i corespundă un interval* $(A' ; B') \in (A ; B)$, *astfel încît*

$$\Delta f(A' ; B') \leqslant 0.$$

Demonstrație. Fie A' un punct și funcția de x_1

$$F^1(X_1) = \Delta_1 f(A - a_\nu ; B - b_\nu / x_\nu);$$

avem relația

$$\Delta f(A ; B) = \Delta_1 f(A - a_\nu ; B - b_\nu / b_\nu) - \Delta_1 f(A - a_\nu ; B - b_\nu / a_\nu) \tag{4}$$

Funcția $F^1(x_1)$ este inferior semicontinuă (teorema 13). Deci există un punct $x_1'' \in (a ; b)$ astfel încît

$$F^1(x_1') \leqslant F^1(x_1''). \tag{5}$$

Să considerăm dreptele

$$x_1 = x_1', \quad x_1 = x_1''$$

care intersectează dreptunghiul $(A ; B)$ după un dreptunghi $(A^1 ; B^1)$. Însă, în virtutea lui (4) și (5) avem

$$\Delta f(A^1 ; B^1) \leqslant 0.$$

Să considerăm acum funcția

$$F^{(2)}(x_2) = \Delta_1 f(A^1 - a_\nu ; B - b_\nu / x_\nu).$$

Există un punct în $(A ; B)$ astfel încît

$$F^2(x_2') \leqslant F^2(x_2''). \tag{6}$$

Dreptele

$$x_1 = x_2' ; x_1 = x_2''$$

intersectează în dreptunghiul $(A^1 ; B^1)$ intervalul $(A^2 ; B^2)$ așa că ținînd seama de (6) putem scrie

$$\Delta f(A^2 ; B^2) \leqslant 0$$

și așa mai departe. După n operații ajungem la intervalul $(A^n ; B^n$ astfel că

$$\Delta f(A^n ; B^n) \leqslant 0.$$

Din construcție avem $A^n \equiv A'$ ceea ce demonstrează teorema. La fel se poate demonstra

Teorema 16. *Dacă pentru o funcție inferior global semicontinuă în* $(A ; B)$, *avem*

$$\Delta f(A ; B) \leqslant 0$$

atunci tuturor punctelor $A' \in (A ; B)$ *le corespunde un interval* $(A' ; B') \subset (A ; B)$ *așa ca* $\Delta f(A' ; B') \geqslant 0$.

28. Drept corespondentă ale aplicațiilor date de acad. Miron Nicolescu teoremei I din [3] dăm : Să considerăm un punct P fix în intervalul $(A ; B)$ și funcția

$$\chi(X) = \Delta f(P ; X).$$

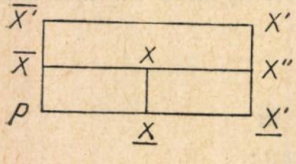


Fig. 4

Dacă funcția f este superior (inferior) global semicontinuă în $(A ; B)$, funcția $\chi(X)$ este inferior (superior) semicontinuă în $(A ; B)$.

Într-adevăr, dacă f este superior global semicontinuă în $(A ; B)$, $\Delta f(A ; B) \geqslant \varepsilon$ pentru $|B - A| < \eta(\varepsilon)$.

Fie X' un punct din vecinătatea lui X, avem

$$\Delta f(P ; X') = \Delta f(P ; X) + \Delta f(X ; X'') + \Delta f(\overline{X} ; X').$$

Dar

$$\Delta f(X ; X'') \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Delta f(\overline{X} ; X') \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ îndată ce } |X' - X| < \eta(\varepsilon)$$

funcția fiind global semicontinuă superior în (A ; B). Avem

$$\chi(X') - \chi(X) = \Delta f(P ; X') - \Delta f(P ; X) \geqslant \varepsilon$$

adică $\chi(X)$ este semicontinuă inferior în punctul X. La fel se demonstrează cînd $f(X)$ este inferior global semicontinuă.

29. În memoriul [2], K. Bögel atașează unei funcții de X definită în $(A; B)$ o funcție de interval $\int f(U; V)$. Se demonstrează imediat că toate integralele $\int f(P; X)$ ale unei funcții superior (inferior) global semicontinuă în $(A; B)$ sînt inferior (superior) semicontinuă în acest interval.

Capitolul II

Serii duble

1. La o serie dublă

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m^n$$

noțiunea de convergență nu se impune în mod unic, ca în cazul seriilor simple, datorită procesului de însumare. Înainte de a introduce procesul nostru de însumare, vom reaminti o convergență a șirurilor duble introduse de acad. Miron Nicolescu.

Să considerăm tabloul

$$\begin{array}{|llllll}
a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n & \dots \\
a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_3^n & \dots \\
a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^n & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Un astfel de tablou acad. Miron Nicolescu [7], [8] îl numește global convergent dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, p și q avem

$$a_{m+q}^{n+q} - a_{m+p}^{n} - a_{m}^{n+q} + a_{m}^{n} \Big| < \varepsilon$$

pentru $m \geqslant M(\varepsilon)$, $n \geqslant N(\varepsilon)$; el mai numește tabloul global monotom, un tablou pentru care expresia

$$a_{m+p}^{n+q} - a_{m+p}^{n} - a_{m}^{n+q} + a_{m}^{n}$$

păstrează un semn constant, oricare ar fi indicii.

Un asemenea tablou noi l-am numit tablou global mărginit [9] dacă oricare ar fi m și n le corespund cel puțin un p și un q astfel ca

$$\left| a_{m+p}^{n} + a_{m}^{n+q} - a_{m+p}^{n+q} \right| < M.$$

Proprietățile acestei convergențe date de noi, analoge celor ale convergenței clasice pentru șirurile simple, fac să ni se pară această convergență mai aproape de structura șirurilor simple.

2. Vom introduce acum pentru seriile duble o noțiune de convergență mai largă decît aceea a lui Princsheim și care ni se pare o extensiune naturală a convergenței lui Cauchy pentru seriile simple.

Fie seria dublă

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_j^i. \tag{1}$$

Să notăm

$$u_m^n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_j^i. \tag{2}$$

Dacă șirul dublu (2) este global convergent, vom spune că seria (1) este global convergentă.

Conform definiției global convergenței unui șir, $\varepsilon > 0$ fiind dat, putem face să-i corespundă două numere naturale M și N, așa ca pentru $m \geqslant M$ și $n \geqslant M$ să avem

$$\left| u_m^n - u_{m+p}^n - u_m^{n+q} + u_{m+p}^{n+q} \right| < \varepsilon \tag{3}$$

oricare ar fi întregii p și q.

Dar diferența (3) se mai poate scrie sub forma

$$u_m^n - u_{m+p}^n - u_m^{n+q} + u_{m+p}^{n+q} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_j^i - \sum_{i=1}^{n+q}\sum_{j=1}^{m} a_j^i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m+p} a_j^i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n+q}\sum_{j=1}^{m+p} a_j^i = \sum_{i=n}^{n+q}\sum_{j=m}^{m+p} a_j^i$$

și avem deci condiția:

Pentru ca seria dublă de termeni generali a_j^i să fie global convergentă e necesar și suficient ca oricărui $\varepsilon > 0$ dat, să-i corespundă două numere naturale M și N așa ca îndată ce $m \geqslant M$ și $n \geqslant N$ să avem

$$\left| \sum_{i=1}^{n+q}\sum_{j=1}^{m+p} a_j^i \right| < \varepsilon. \tag{4}$$

3. Cu ajutorul acestei condiții de global convergență regula lui Abel pentru seriile simple se traduce la cele duble în *Regulă*. Seria dublă

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_j^i \varepsilon_j^i \tag{5}$$

converge global dacă:

1°. suma

$$\left| \sum_{i=n}^{n+q}\sum_{j=m}^{m+p} a_j^i \right|$$

este mărginită oricare ar fi m, n, p și q;

2°. seriile

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \varepsilon_n^m - \varepsilon_{n+1}^m \right| \text{ și } \sum_{m=1}^{\infty} \left| \varepsilon_n^m - \varepsilon_n^{m+1} \right|$$

converg;

3°. seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \varepsilon_n^{m+1} - \varepsilon_{n+1}^m - \varepsilon_n^{m+1} + \varepsilon_n^m \right|$$

converge global;

4°. $\lim\limits_{n,\, m \to \infty} \varepsilon_n^m = 0$

Să punem

$$U_p^q = \sum_{i=n}^{n+q} \sum_{j=m}^{m+p} a_j^i .$$

Prin ipoteză avem oricare ar fi p și q,

$$| U_p^q | < A,$$

A fiind o constantă.

Avem atunci

$$\sum_{i=n}^{n+q} \sum_{j=m}^{m+p} a_j^i \varepsilon_j^i = \varepsilon_n^m U_0^0 + \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_n^{m+i} \times (U_1^0 - U_{i-1}^0) + \sum_{j=1}^{q} \varepsilon_{n+j}^m (U_0^j - U_0^{j-1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \varepsilon_{m+i}^{n+j} (U_i^j - U_{i-1}^j - U_i^{j-1} + U_{i-1}^{j-1}) = \varepsilon_m^n U_0^0 + \sum_{i=1}^{p} U_1^0 (\varepsilon_{m+1}^n - \varepsilon_{m+i+1}^n) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} U_0^j (\varepsilon_m^{n+j} - \varepsilon_m^{n+j+1}) + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} U_i^j (\varepsilon_{m+i}^{n+j} - \varepsilon_{m+i+1}^{n+j} - \varepsilon_{m+i}^{n+j+1} - \varepsilon_{m+i+1}^{j+n+1}).$$

Conform ipotezei avem

$$\left| \sum_{i=m}^{m+p} \sum_{j=n}^{n+q} a_i^j \varepsilon_i^j \right| \leqslant A \varepsilon_m^n + A \sum_{i=1}^{p} | \varepsilon_{m+i}^n - \varepsilon_{m+i+1}^n | +$$

$$+ A \sum_{j=1}^{q} | \varepsilon_m^{n+j} - \varepsilon_m^{n+j+1} | + A \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} | \varepsilon_{m+i}^{n+j} - \varepsilon_{m+i+1}^{n+j} - \varepsilon_{m+i}^{n+j+1} + \varepsilon_{m+i+1}^{n+j+1} |$$

Tot prin ipoteză însă

$$\sum_{j=1}^{p} | \varepsilon_m^{n+j} - \varepsilon_m^{m+j+1} | < \frac{\eta}{4A}$$

îndată ce $m \geqslant M_1, n \geqslant N_1$;

$$\sum_{i=1}^{p} | \varepsilon_{m+i}^n - \varepsilon_{m+i+1}^n | < \frac{\eta}{4A}$$

îndată ce $m \geqslant M_2, n \geqslant N_2$;

$$\sum_{j=1}^{q} | \varepsilon_m^{n+j} - \varepsilon_m^{n+j+1} | < \frac{\eta}{4A} \text{ și } \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} | \varepsilon_{m-i}^{a+j} - \varepsilon_{m+i+1}^{n+j} - \varepsilon_{m+i}^{a+j+1} + \varepsilon_{m+i+1}^{a+j+1} | < \frac{\eta}{4A}$$

îndată ce $m \geqslant M_3$, $n \geqslant N_3$;

$$| \varepsilon_m^n | < \frac{\eta}{4A}$$

îndată ce $m \geqslant M_4$, $n \geqslant N_4$.
Începînd de la

$$m \geqslant \max (M_1\ M_2\ M_3\ M_4)$$

$$m \geqslant \max (N_1\ N_2\ N_3\ N_4)$$

avem

$$\left| \sum_{i=m}^{m+p} \sum_{j=n}^{n+q} a_i^j\ \varepsilon_i^j \right| < A \frac{\eta}{A} = \eta$$

oricît de mic ar fi η, ceea ce demonstrează regula noastră.

4. *Caz particular.* Dacă ε_m^n sînt numere pozitive monoton descrescătoare pentru m crescător sau n crescător și tinzînd către zero, condițiile 2°, 3° și 4° sînt realizate și seria converge global. Într-adevăr

$$| \varepsilon_m^n - \varepsilon_m^{n+1} | = \varepsilon_m^a - \varepsilon_m^{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{p} | \varepsilon_{m+i}^n - \varepsilon_{m+i+1}^n | = \varepsilon_{m+1}^n - \varepsilon_{m+p+1}^n \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{q} | \varepsilon_m^{n+j} - \varepsilon_m^{n+j+1} | = \varepsilon_m^{n+1} - \varepsilon_m^{n+q+1} \tag{7}$$

și încă

$$| \varepsilon_{m+1}^{n+i} - \varepsilon_{m+1}^n - \varepsilon_m^{a+1} + \varepsilon_m^n | = \varepsilon_m^{n+1} - \varepsilon_m^n - \varepsilon_{m+1}^{n+1} + \varepsilon_{m+1}^n \tag{8}$$

iar

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} | \varepsilon_{m+i}^{n+j} - \varepsilon_{m+i+1}^{n+j} - \varepsilon_{m+i}^{a+j+1} + \varepsilon_{m+i+1}^{n+j+1} | = \varepsilon_{m+1}^{a+q} - \varepsilon_{m+1}^{n+1} - \varepsilon_{m+p}^{n+q} + \varepsilon_{m+p}^{n+1}.$$

Însă expresiile (6) ș (7) tind către zero și deci respectiv seriile

$$\sum_{m=1}^{\infty} | \varepsilon_m^n - \varepsilon_{m+1}^n | \text{ și } \sum_{n=1}^{\infty} | \varepsilon_m^n - \varepsilon_m^{n+1} |$$

converg, iar faptul că expresia (8) tinde către zero exprimă global convergența seriei duble

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} | \varepsilon_m^n - \varepsilon_{m+1}^n - \varepsilon_m^{n+1} + \varepsilon_{m+1}^{n+1} |,$$

5. *Exemplul 1.* Fie

$$a_i^j = f(i) + g(j), \tag{9}$$

unde $f(i)$ și $g(j)$ sînt două funcții aditive oarecare. Vom arăta că seria $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_i^j$ este global convergentă.

Într-adevăr

$$\sum_{i=m}^{m+p}\sum_{j=n}^{n+q} a_i^j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i^j - \sum_{i=1}^{m+p}\sum_{j=1}^{n} a_i^j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+q} a_i^j + \sum_{i+1}^{m+p}\sum_{j=1}^{n+q} a_i^j. \tag{10}$$

Dar

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i^j = F(m) + G(n), \qquad \text{unde } F = \sum_{i=1}^{m} f \text{ și } G = \sum_{j=1}^{n} g(j)$$

$$\sum_{i=1}^{m+p}\sum_{j=1}^{n} a_i^j = F(m+p) + G(n) = F(m) + F(p) + G(n)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+q} a_i^j = F(m) + G(n+q) = F(m) + G(n) + G(q)$$

$$\sum_{i=1}^{m+p}\sum_{j=1}^{n+q} a_i^j = F(m+p) + G(n+q) = F(m) + F(p) + G(n) + G(q)$$

și relația (7) devine

$$\sum_{i=m}^{m+p}\sum_{j=n}^{n+q} a_i^j = 0$$

ceea ce demonstrează global convergența seriei $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_i^j$.

6. *Exemplul 2.* Seria dublă

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \cos mx e^{inx}\, \varepsilon_m^n, \tag{11}$$

unde ε_m^n sînt niște numere descrescătoare pentru m sau n constant și tinzînd către zero, este global convergentă.

Avem

$$\sum_{r=m}^{m+p}\sum_{s=n}^{n+q} \cos rx e^{isx} = \sum_{r=m}^{m+p} \cos rx \sum_{s=n}^{n+q} e^{isx} =$$

$$= \frac{\sin(m + p/2)\cdot\cos(p + l/2)}{\sin x/2} \cdot \frac{e^{inx}(e^{i(q+1)x} - 1)}{e^{ix} - 1}$$

deci

$$\left|\sum_{r=m}^{m+p}\sum_{s=n}^{n+q}\cos rxe^{isx}\right| \leqslant \frac{2}{\sin^2 x/2}$$

adică expresia $\sum_{r=m}^{m+p}\sum_{r=n}^{n+q}\cos rxe^{isx}$ e mărginită și condițiile cazului particular ale regulei noastre fiind îndeplinite seria (11) este global convergentă

7. *Exemplul 3.* Seria dublă

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin mxe^{inx}\,\varepsilon_m^n$$

unde ε_m^n sînt aceleași ca în exemplul precedent converge global. Demonstrația este analogă celei de la exemplul 2.

8. Vom numi serie absolut global convergentă seria $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_i^j$ pentru care $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_j^i|$ converge global.

9. Să presupunem că termenii seriei duble $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}u_i^j$ au modulele inferioare sau egale termenilor unei serii global convergente cu termeni pozitivi $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}v_i^j$, îndată ce $m \geqslant m_0$ și $n \geqslant n_0$.
Avem deci $|u_m^n| \leqslant v_m^n$ sau

$$\left|\sum_{i=m}^{m+p}\sum_{j=n}^{n+q}u_i^j\right| \leqslant \sum_{i=m}^{m+p}\sum_{j=n}^{n+q}|v_i^j| \leqslant \sum_{i=m}^{m+p}\sum_{j=n}^{n+q}v_i^j \leqslant \varepsilon.$$

În particular dacă se ia $v_m^n = |u_m^n|$ avem următorul rezultat: O serie dublă absolut global convergentă e global convergentă.

Serii cu termeni pozitivi

10. Seria dublă de termeni generali

$$a_m^n = k^{m/n} + h(m,n),\ k < 1,$$

unde $h(m,n)$ este suma a două funcții aditive respectiv de m,n este global convergentă.
Într-adevăr, avem

$$\sum_{i=m}^{m+p}\sum_{j=n}^{n+q}a_i^j = \sum_{i=m}^{m+p}\sum_{j=n}^{p+q}[k^{i/j} + h(i,j)] = \sum_{i=m}^{m+p}\sum_{j=n}^{n+q}k^{i/j} + \sum_{t=m}^{m+p}\sum_{j+n}^{n+q}h(i,j)$$

dar

$$\sum_{i=m}^{m+p}\sum_{i=n}^{n+q}k^{i/j} < \varepsilon$$

seria $k^{m/n}$ fiind convergentă, deci global convergentă și $\sum_{i=m}^{m+p} \sum_{j=n}^{n+q} h(i, j) = 0$

conform exemplului 1
deci

$$\sum_{i=m}^{m+p} \sum_{j=n}^{n+q} a_i^j < \varepsilon.$$

Criteriul 1 de global convergență

11. Dacă o serie dublă cu termeni pozitivi are toți termenii săi respectivi mai mici sau cel puțin egali cu cei ai unei serii global convergente atunci această serie este global convergentă. Demonstrația este aproape evidentă.

12. Dacă o serie cu termeni pozitivi are toți termenii săi mai mari sau egali cu cei ai unei serii duble cu termeni pozitivi global divergente, atunci această serie este global divergentă. Rezultatul tot atît de evident.

13. Se poate enunța același rezultat în felul următor : Fie două serii duble cu termeni pozitivi

$$\sum \sum u_m^n \qquad (U)$$

$$\sum \sum v_m^n \qquad (V)$$

Dacă seria (V) este global convergentă și dacă de la un anumit rang avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$ atunci și seria (U) este global convergentă ; dacă seria (V) este global divergentă și dacă de la un anumit rang avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

atunci seria (U) este global divergentă.
Sau dacă restrîngem toate acestea într-un singur rezultat obținem :

Fiind dată o serie dublă cu termeni pozitivi de caracter cunoscut, acesta se poate lua ca termen de comparație și obținem două propoziții ce permit în anumite cazuri de a se afirma global convergența sau global divergența unei alte serii duble cu termeni pozitivi, după cum se compară termenii însăși ai acelor două serii sau raportul a doi termeni consecutivi.

14. Cea mai simplă serie ce se poate lua ca termen de comparație este aceea dată la paragraful 10, care am arătat că este global convergentă pentru $k < 1$, și care se poate vedea ușor că este global divergentă pentru $k > 1$.

15. *Criteriul 2 de divergență globală.* Fie seria

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_i^j,$$

dacă se poate găsi o funcție $h\,(m,n)$ suma a două funcții aditive respectiv de m și n, astfel ca

$$L = \overline{\lim_{m,\,n\to\infty}} \sqrt[m]{[u_m^n - h\,(m,n)]^n} < 1$$

seria este global convergentă, pe cînd dacă $L > 1$ seria este global divergentă.
Rezultat imediat din comparația cu seria de la 14.

16. *Criteriul 3 de convergență globală.* Dacă se poate găsi o funcție $h\,(m,n)$, suma a două funcții respectiv de m,n, aditive, așa fel ca

$$\overline{\lim_{n,\,m\to\infty}} \frac{u_{m+1}^n - h\,(m+1,\,n)}{u_m^n - h\,(m,\,n)} = L$$

și dacă $L < 1$ seria $\sum\sum u_m^n$ este global convergentă, iar dacă $L > 1$ seria este divergentă.
Într-adevăr, în cazul $L < 1$, avem

$$\frac{u_{m+1}^n - h\,(m+1,\,n)}{u_m^n - h\,(m,n)} < K < 1$$

sau

$$\frac{u_2^1 - h\,(2,1)}{u_2^1 - h\,(1,1)} \times \frac{u_3^1 - h\,(3,1)}{u_2^1 - h\,(2,1)} \times \ldots \times \frac{u_{m+1}^1 - h\,(m+1,1)}{u_m^1 - h\,(m,\,1)} \times$$

$$\times \frac{u_{m+1}^2 - h\,(m+1,2)}{u_{m+1}^1 - h\,(m+1,1)} \times \frac{u_{m+1}^3 - h\,(m+1,3)}{u_{m+1}^1 - h\,(m+1.1)} \times \frac{u_{m+1}^4 - h\,(m+1,4)}{u_{m+1}^2 - h\,(m+1,2)} \times \ldots \times$$

$$\times \frac{u_{m+1}^n - h\,(m+1,\,n)}{u_{m+1}^{n-1} - h\,(m+1,\,n-1)} < K^{m+n-1}$$

sau

$$u_{m+1}^n - h\,(m+1,\,n) < K^{m+n-1}[\,u_1^1 - h\,(1,1)\,] < K'^{m+n-1},\ K' < 1.$$

Deci

$$u_{m+1}^n < K'^{m+n-1} - h\,(m+1,\,n).$$

Seria din dreapta inegalității fiind global convergentă, criteriul 1 de convergență arată global convergența seriei noastre. Cazul $L > 1$ se tratează analog.

Schimbînd rolul lui m cu n deducem :
Dacă se poate găsi o funcție $h\,(m,n)$, sumă a două funcții aditive de m, și n în așa fel ca

$$\overline{\lim_{n,\,m\to\infty}} \frac{u_m^{n+1} - h\,(m,\,n+1)}{u_m^n - h\,(m,\,n)} = L$$

și dacă $L < 1$ seria $\sum\sum u_m^n$ este global convergentă, iar dacă $L > 1$ seria este global divergentă.

17. *Exemplul 1*

Fie seria

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt[n]{\left[\frac{1}{m.\,n}\right]^m}+(m+n)\right]. \tag{1}$$

Aceasta este global convergentă. Într-adevăr, fie

$$h\,(m,n) = m + n.$$

Avem

$$u_m^n - h\,(m,n) = \sqrt[n]{\left[\frac{1}{mn}\right]^m}$$

$$\left[u_m^n - h\,(m,\,n)\right]^{n/m} = \frac{1}{mn}$$

și

$$\lim_{m,\,n\to\infty}\left[u_m^n - h\,(m,\,n)\right]^{n/m} = 0 < 1.$$

Deducem din criteriul 2 de global convergență că seria (1) este global convergentă.

18. *Exemplul 2*

Seria dublă

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 + m\cdot m!\,n! + n\cdot m!\,n!}{m!\;n!}$$

este global convergentă.

Demonstrația se face luînd $h\,(m,n) = m + n$ și aplicînd criteriul 3 de global convergență.

Capitolul III

Șiruri de funcții

1. Să considerăm un șir de funcții

$$f_1\,(X),\ f_2\,(X),\ \ldots\ f_n\,(X),\ \ldots \tag{1}$$

de punctul X definite într-un interval închis din spațiul cu două dimensiuni, global continue în acest interval. Să presupunem acest șir uniform conver-

gent în intervalul considerat către o funcție $f(X)$. Adică, $\varepsilon > 0$ fiind dat îi corespunde un număr natural N, așa fel ca

$$|f(X) - f_n(X)| < \frac{\varepsilon}{5} \tag{2}$$

îndată ce $n \geqslant N$, oricare ar fi punctul X în intervalul considerat.

Acad. Miron Nicolescu [7] a demonstrat că funcția $f(X)$ este și ea global continuă în acest interval, deci uniform global continuă. Adică, există un δ astfel încît

$$|\Delta f(\overline{XX'})| < \frac{\varepsilon}{5}$$

îndată ce $\overline{XX'} < \delta'$. (3)

Dar, din (2) dedcem

$$\begin{aligned} |f(X) - f_n(X)| &< \frac{\varepsilon}{5}, \\ |f(\bar{X}) - f_n(\bar{X})| &< \frac{\varepsilon}{5}, \\ |f(\underline{X}) - f_n(\underline{X})| &< \frac{\varepsilon}{5}, \\ |f(X') - f_n(X')| &< \frac{\varepsilon}{5}. \end{aligned} \tag{4}$$

Din identitatea

$$\Delta f_n(XX') = [f_n(X) - f(X)] - [f_n(\bar{X}) - f(\bar{X})] - [f_n(\underline{X}) - f(\underline{X})] + \\ + [f_n(X') - f(X')] - \Delta f(XX')$$

deducem, ținînd seama de (3) și (4) îndată ce $\overline{XX'} < \delta'$, $n \geqslant N$

$$|\Delta f(XX')| < \varepsilon.$$

Să fixăm valoarea lui N. Funcțiile

$$f_1(X),\ f_2(X),\ \ldots,\ f_{N-1}(X)$$

sînt global continue în intervalul considerat. Pentru fiecare f_i $(i = 1,2,\ \ldots,\ N-1)$ există un δ_i așa încît

$$|\Delta f_i(XX')| < \varepsilon$$

îndată ce $XX' < \delta_i$.

Dacă

$$\delta = \min(\delta',\ \delta_i)$$

avem pentru $\overline{XX'} < \delta \mid \Delta f_n(XX') \mid < \varepsilon$ oricare ar fi n. Vom spune în acest caz că funcțiile șirului sînt egal global continue. Am obținut deci

T e o r e m a 1. *Termenii unui șir uniform convergent, de funcții global continue într-un interval dat sînt funcții egal global continue în acest interval.*

2. Ca reciprocă a teoremei 1 dăm

T e o r e m a 2. *Din orice șir de funcții egal global continue și egal mărginite într-un interval dat se poate extrage un șir uniform convergent de funcții de interval.*

Fie $\{f_n(X)\}$ șirul de funcții egal global continue și să notăm $f_n(I) = \Delta f_n(XX')$. Dar

$$f_n(X) = \alpha_n(X) + \beta_n(X + X_1) + \gamma_n(X - X_2),$$

unde $\alpha_n(X)$ este un șir de funcții egal continue. Conform teoremei lui Arzela putem extrage un șir uniform convergent $\alpha_{p_i}(X)_{p_i}$ către o funcție $\alpha(X)$. Avem deci și

$$\alpha_{p_i}(I) \rightrightarrows \alpha(I).$$

Dar

$$f_{p_i}(I) = \alpha_{p_i}(I).$$

Deci

$$f_{p_i}(I) \rightrightarrows \alpha(I).$$

3. T e o r e m a 3. *Un șir uniform convergent de funcții superioare semicontinue tinde către o funcție superior semicontinuă.*

Demonstrație. Fie

$$f_1(X), f_2(X), \ldots, f_n(X), \to f(X)$$

un șir uniform convergent de funcții superior semicontinue. Avem, deci $\varepsilon > 0$ fiind dat, un $N(\varepsilon)$ așa încît

$$\mid f_n(X) - f(X) \mid < \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru $n \geqslant N(\varepsilon)$ oricare ar fi X, adică

$$-\frac{\varepsilon}{2} < [f(X) - f(X_0)] - [f_n(X) - f_n(X_0)] < \frac{\varepsilon}{2}$$

deci și

$$\frac{-\varepsilon}{2} < \mid f(X) - f(X_0) \mid - \mid f_{N(\varepsilon)}(X) - f_{N(\varepsilon)}(X_0) \mid < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

sau luînd numai partea dreaptă a inegalității

$$f(X) - f(X_0) < [f_{N(\varepsilon)}(X) - f_{N(\varepsilon)}(X_0)] + \frac{\varepsilon}{2}$$

dar f_n fiind superior semicontinue $\varepsilon > 0$ fiind dat, îi corespunde un $\rho(\varepsilon, X_0, n)$ astfel încît pentru $\overline{XX_0} < \rho(\varepsilon, X_0 n)$ să avem

$$f_n(X) - f_n(X_0) < \varepsilon$$

Deci, $\varepsilon > 0$ fiind dat avem, pentru $\overline{XX_0} < \rho(\varepsilon, X_0, N_\varepsilon) = \rho(\varepsilon, X_0)$

$$f_{N(\varepsilon)}(X) - f_{N(\varepsilon)}(X_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Adică, $f(X) - f(X_0) < \varepsilon$ îndată ce $\overline{XX_0} < \rho(\varepsilon, X_0)$.

Analog se demonstrează luînd partea stîngă a inegalității (5).

Teorema 4. *Un șir uniform convergent de funcții inferior semicontinue tinde către o funcție inferior semicontinuă.*

4. Fie

$$f_1(X), f_2(X), \ldots f_n(X), \ldots$$

un șir de funcții superior semicontinue.

Spunem că funcțiile șirului sînt egal superior semicontinue, dacă $\varepsilon > 0$ fiind dat îi corespunde $\rho(\varepsilon, X_0)$ așa încît pentru

$$\overline{XX_0} < \rho(\varepsilon, X_0)$$

să avem

$$f_n(X) - f_n(X_0) < \varepsilon$$

oricare ar fi indicele n.

În mod analog dacă $\varepsilon > 0$ fiind dat îi corespunde un $\rho(\varepsilon, X_0)$ astfel încît pentru $\overline{XX_0} < \rho(\varepsilon, X_0)$ să avem $f_n(X) - f_n(X_0) > \varepsilon$ oricare ar fi indicele n, spunem că termenii șirului sînt funcții egal semicontinue inferior.

5. Teoria 5. *Un șir convergent de funcții egal semicontinue superior tinde către o funcție superior semicontinuă.*

Demonstrația. Fie

$$f_1(X), f_2(X), \ldots f_n(X) \to f(X).$$

Avem

$$\lim_{n \to \infty} f_n(X) = f(X)$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} [f_n(X) - f_n(X_0)] = f(X) - f(X_0). \tag{7}$$

Dar f_n sînt egal semicotinue superior. Deci, $\varepsilon > 0$ fiind dat îi corespunde un $\rho(\varepsilon, X_0)$ așa încît pentru $\overline{XX_0} < \rho(\varepsilon, X_0)$ să avem

$$f_n(X) - f_n(X_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

oricare ar fi n.

Fie X un anumit punct ales astfel încît $XX_0 < \rho(\varepsilon, X_0)$.
Atunci

$$f_{n(\varepsilon, X)}(X) - f_{n(\varepsilon, X)}(X_0) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Din (7) deducem

$$-\frac{\varepsilon}{2} < [f(X) - f(X_0)] + [f_{n(\varepsilon, X)}(X) - f_{n(\varepsilon, X)}(X_0)] < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

și luînd numai partea dreaptă a inegalității obținem

$$f(X) - f(X_0) < f_{n(\varepsilon, X)}(X) - f_{n(\varepsilon, X)}(X_0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

adică, ținînd seama de (8), avem

$$f(X) - f(X_0) < \varepsilon$$

îndată ce $\overline{XX_0} < \rho(\varepsilon, X_0)$.
Luînd partea stîngă a inegalității (9) avem

Teorema 6. *Un șir convergent de funcții egal semicontinue inferior are ca limită o funcție semicontinuă inferior.*

Teorema 7. *Termenii unui șir de funcții superior semicontinue care converg uniform sînt egal superior semicontinui.*

Demonstrație. Fie

$$f_1(X), f_2(X), \ldots f_n(X) \to f(X).$$

Avem

$$\lim_{n \to \infty} f_n(X) = f(X)$$

sau

$$\lim_{n \to \infty} [f_n(X) - f_n(X_0)] = f(X) - f(X_0)$$

sau

$$-\frac{\varepsilon}{2} < [f_n(X) - f_n(X_0)] - [f(X) - f(X_0)] < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru } n < N(\varepsilon). \tag{10}$$

Dubla inegalitate este variabilă evident pentru orice X. Luînd partea dreaptă a inegalității (10) avem

$$f_n(X) - f_n(X_0) < f(X) - F(X_0) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

Însă conform teoremei 1 $f(X)$ este superior semicontinuă, deci pentru

$$\overline{XX_0} < \rho(\varepsilon, X_0)$$

avem

$$f(X) - f(X_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deci inegalitatea (11) devine

$$f_n(X) - f_n(X_0) < \varepsilon \text{ pentru } n \geqslant N.$$

Considerînd pe N fix pentru

$$f_1(X),\ f_2(X),\ldots f_i(X),\ldots f_{N-1}(X)$$

și

$$\overline{XX_0} < \rho\ (\varepsilon,\ X_0,\ i) \text{ avem } f_i(X) - f_i(X_0) < \varepsilon.$$

Fie $\rho = \min\ (\rho',\ \rho_1,\ \rho_2,\ldots,\ \rho_{N-1})$

și avem pentru $\overline{XX_0} < \rho\ (\varepsilon,\ X_0)$, $f_n(X) - f_n(X_0), < \varepsilon$ oricare ar fi n.

Teorema 8. *Un șir de funcții global semicontinue superior uniform convergent, are ca limită o funcție globală semicontinuă superior.*

Demonstrație. Fie

$$f_1(X),\ f_2(X),\ldots f_n(X) \to f(X).$$

Avem deci

$$\lim_{n\to\infty} f_n(X) = f(X)$$

sau

$$\lim_{n\to\infty} \Delta f_n(XX_0) = \Delta f(XX_0)$$

deci

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \Delta f(XX_0) - \Delta f_{n(\varepsilon)}(XX_0) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{12}$$

sau luînd numai partea stîngă a inegalității precedente,

$$\Delta f(XX_0) > \Delta f_{n(\varepsilon)}(XX_0) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Dar f_n sînt superior global semicontinue. Deci

$$\Delta f_{n(\varepsilon)}(XX_0) > -\frac{\varepsilon}{2}$$

îndată ce

$$\overline{XX_0} < \rho\ [\varepsilon,\ n(\varepsilon),\ X] = \rho\ (\varepsilon, X_0)$$

și deci (13) devine

$$\Delta f(XX_0) > -\ \varepsilon \text{ îndată ce } \overline{XX_0} < \rho\ (\varepsilon, X_0)$$

ceea ce demonstrează teorema noastră.

Luînd partea stîngă a inegalității (12) se demonstrează în același mod

Teorema 9. *Un șir de funcții global semicontinue inferior uniform convergent, tinde către o funcție global semicontinuă inferior*

8. Fie

$$f_1(X),\ f_2(X),\ldots f_n(X),\ldots$$

un șir de funcții. Spunem că termenii șirului sînt funcții egal global semicontinue superior dacă

$$\Delta f_n(XX_0) > -\varepsilon$$

îndată ce

$$\overline{XX}_0 < \rho(\varepsilon, X_0)$$

oricare ar fi n.
În mod analog, dacă

$$\Delta f_n(XX_0) < \varepsilon$$

îndată ce

$$\overline{XX}_0 < \rho(\varepsilon, X_0)$$

oricare ar fi n, spunem că termenii șirului sînt funcții egal global semicontinue inferior.

9. Teorema 10. *Un șir convergent de funcții egal global semicontinue superior are ca limită o funcție global semicontinuă superior.*

Demonstrație. Într-adevăr, fie

$$f_1(X), f_2(X), \ldots f_n(X) \to f(X).$$

Deci avem

$$\lim_{n\to\infty} f_n(X) = f(X)$$

și

$$\lim_{n\to\infty} \Delta f_n(XX_0) = \Delta f(XX_0)$$

sau

$$-\frac{\varepsilon}{2} < |\Delta f(XX_0) - \Delta f_{n(\varepsilon, X)}(XX_0) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{14}$$

sau luînd partea stîngă a inegalității precedente,

$$\Delta f(XX_0) > \Delta f_{n(\varepsilon, X)}(XX_0) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

Funcțiile $f_n(X)$ fiind egal global superior semiconinue avem pentru $\overline{XX}_0 < \rho(\varepsilon, X_0)$

$$\Delta f_n(XX_0) > \frac{\varepsilon}{2}$$

și inegalitatea (15) pentru un I ce satisface la

$$\overline{XX}_0 < \rho(\varepsilon, X_0), \text{ devine } \Delta f(XX_0) > \varepsilon$$

ceea ce demonstrează teorema noastră.

Luînd partea dreaptă a inegalității duble (14) avem, printr-un procedeu de demonstrație analog,

Teorema 11. *Un șir convergent de funcții egal global semicontinue superior sînt funcții egal global semicontinue superior.*

10. Teorema 12. *Termenii unui șir uniform convergent de funcții global semicontinue superior sînt funcții egal global semicontinue superior.*

Demonstrație. Fie

$$f_1(X),\ f_2(X),\ \ldots f_n(X) \to f(X)$$

un șir uniform convergent de funcții global superior semicontinue.

Avem

$$\lim_{n\to\infty} f_n(X) = f(X)$$

și

$$\lim_{n\to\infty} \Delta f_n(XX_0) = \Delta f(XX_0)$$

sau

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \Delta f_n(XX_0) - \Delta f(XX_0) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{16}$$

sau

$$\Delta f_{n(\varepsilon)}(XX_0) > \Delta f(XX_0) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

Dar un șir uniform convergent de funcții global semicontinue superioare are ca limită o funcție global semicontinuă superiror.

Avem deci pentru $\overline{XX}_0 < \rho(\varepsilon, X_0)$

$$\Delta f(XX_0) > -\frac{\varepsilon}{2}$$

deci (17) devine

$$\Delta f_n(XX_0) > \varepsilon \text{ pentru } XX_0 < \rho(\varepsilon, X_0) \text{ și pentru } n \geqslant N(\varepsilon). \tag{18}$$

Să fixăm numărul N.

Funcțiile

$$f_1(X),\ f_2(X),\ \ldots f_i(X),\ \ldots f_{N-1}(X)$$

fiind global superior semicontinue, avem pentru $XX_0 < \rho_i(XX_0)$

$$\Delta f_i(XX_0) > -\varepsilon \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1). \tag{19}$$

Fie

$$\rho = \min(\rho', \rho_i)$$

și atunci (18) și (19) devin

$$\Delta f_n(XX_0) > -\varepsilon$$

îndată ce $\overline{XX}_0 < \rho(\varepsilon. X_0)$ oricare ar fi indicele n, ceea ce demonstrează teorema noastră.

Luînd partea dreaptă a inegalității (16), în mod analog se demonstrează și

Teorema 13. *Termenii unui șir uniform convergent de funcții global semicontinue inferior, sînt funcții egal global semicontinue inferior.*

11 Teoremele 1 și 2 dau împreună :

Un șir de funcții global continue, uniform convergent. are ca limită o funcție global continuă. Regăsind astfel o teoremă a acad. M i r o n N i c o l e s c u demonstrată pe altă cale.

12. Teoremele 3 și 4 dau împreună :

Un șir convergent de funcții egal global continue are ca limită o funcție global continuă.

13. Teoremele 5 și 6 dau împreună :

Termenii unui șir uniform convergent de funcții global continue sînt funcții egal global continue, rezultat găsit deja de noi pe altă cale la începutul acestui capitol.

К ВОПРОСУ О ДВУМЕРНОМ АНАЛИЗЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В первой главе «Полунепрерывность в двумерном анализе» К. Бегеля дается плоскость с данной системой осей координат и вводятся понятия, аналогичные понятиям об ограничении и полунепрерывности с учетом того, что интервал (AB) в двумерном пространстве является прямоугольником, а не сегментом.

Во второй главе «Двойные ряды» автор, исходя из

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_m$$

и образуя двойную последовательность

$$u_m^n = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_j^i$$

определяет понятия о схождении и дается критерий и численные примеры. Данные определения показывают, что определяемое схождение является наиболее естественным распространением понятия о схождении от простых рядов к двойным.

В третьей главе, исходя из полунепрерывных функций, в смысле Бэра, автор с помощью понятия о равной полунепрерывности дает достаточные условия, чтобы последовательность таких функций сходилась или не сходилась равномерно также к полунепрерывным функциям.

Затем эти условия применяются к полунепрерывным функциям, введенным автором.

CONTRIBUTION À UNE ANALYSE INFINITÉSIMALE BIDIMENSIONNELLE

(RÉSUMÉ)

Dans le premier chapitre „*La semi-continuité dans une analyse infinitésimale pluridimensionnelle de M. K. Bögel*", l'auteur introduit, en pre-

nant dans le plan un système d'axes de coordonnées, des notions équivalentes à celles de borne et semi-continuité, en tenant compte que dans l'espace à deux dimensions l'intervalle (A, B) est un rectangle et non pas un segment.

Dans le deuxième chapitre, *Les séries doubles*, en prenant le tableau

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m^n$$

et la suite double

$$u_m^n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_j^i$$

l'auteur introduit la notion de convergence globale, et donne des règles de convergence et des exemples numériques qui sont la preuve que la convergence globale est l'extension la plus naturelle de la notion de convergence des séries simples aux séries doubles.

Dans le troisième chapitre, l'auteur donne, à l'aide d'une notion d'égale semi-continuité, des conditions suffisantes, pour qu'une suite de fonctions semi-continues, selon Baire, tende vers une fonction semi-continue.

BIBLIOGRAFIE

1. K. Bögel, Journal für die Angewandte mathematik, 1934, vol. 170, p. 197
2. — Journal für die Angewandte mathematik, 1935, vol. 173, p. 5
3. M. Nicolescu, Comptes rendus de l'Académie des sciences de Roumanie, 1938, t. II, nr. 3.
4. — Revue mathématique de l'Union interbalcanique, 1940, t. III.
5. R. Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues*, Paris, 1905.
6. — *Sur les fonctions de variables réelles*. Thèse, 1899.
7. — *Sur les suites doubles*. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Roumanie, 1938, p. 238
8. — *Sur les suites doubles*. Bulletin Mathématique. Bucureşti, 1941, p. 53.
9. Eugen V. Dobrescu, *Sur les suites doubles*. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Roumanie, 1946, p. 13.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VIII, nr. 1—2, 1957

RELAŢII INTEGRALE CARE CARACTERIZEAZĂ SOLUŢIILE UNOR ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDIN FINIT SAU INFINIT*)

DE

MARCEL N. ROŞCULEŢ

1. *Rezultate anterioare.* Dăm cîteva din rezultatele care ne-au condus la această lucrare. O. Hölder în [1] demonstrează

Teorema H. *Fiind dată o funcţie $f(x)$ în intervalul închis $x_0 - r \leqslant x \leqslant x_0 + r$, avînd derivatele de ordinul întîi şi al doilea continue, există totdeauna un punct ξ în acest interval astfel încît să avem*

$$\left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right]_{x=\xi} = \frac{f(x_0 - r) + f(x_0 + r) - 2f(x_0)}{r^2}. \tag{1}$$

W. Blaschke, [2], pornind de la această teoremă şi căutînd s-o extindă la funcţii de mai multe variabile obţine

Teorema B_1. *Fie $f(x, y)$ o funcţie continuă împreună cu derivatele ei de ordinul întîi şi doi în interiorul cercului J*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant r^2$$

care ia în centrul cercului valoarea

$$f(x_0, y_0) = f_0$$

şi avînd ca valoare medie pe conturul C al lui J pe f_m dat de

$$f_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\, d\theta.$$

Există totdeauna un punct (ξ, η) în J astfel încît să avem

$$[\Delta f]_{\xi,\eta} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\xi,\eta} = 4\,\frac{f_m - f_0}{r^2}. \tag{2}$$

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 21 decembrie 1956.

Teorema B_2. *Fie funcția* $f(x, y)$, *continuă în cercul* J

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant r^2,$$

și fie $\Delta f(\xi, \eta)$, *unde* (ξ, η) *este un punct în interiorul acestui cerc. Valoarea expresiei*

$$\frac{4}{r^2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\, d\theta - f(x_0, y_0)\right] \tag{3}$$

este cuprinsă între marginea superioară și inferioară a lui $\Delta f(\xi, \eta)$ *în* J.

Teorema B_3. *Fie* $f(x, y)$ *o funcție continuă în cercul* J, *pentru care* Δf *există în* J *și este identic nul. Pentru orice punct* (ξ, η) *din* J *avem*

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{4}{\rho^2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi + \rho\cos\theta, \eta + \rho\sin\theta)\, d\theta - f(\xi, \eta)\right] = 0, \tag{4}$$

deci $f(x, y)$ *este o funcție armonică în* J *și are derivate continue de orice ordin.*

Stanislas Saks [3], mai tîrziu, folosește aceste rezultate pentru a obține

Teorema S_1. *Dacă* $u(x, y)$ *este continuă împreună cu derivatele sale parțiale de primul ordin în* (D), *și dacă pentru orice punct* (x, y) *din* D

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial u(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)}{\partial r}\right] d\theta = 0 \tag{5}$$

atunci $u(x, y)$ *este armonică în* (D), și

Teorema S_2. *Dacă funcția* $v(x, y)$ *este armonică și diferită de zero, în* (D), *dacă* $u(x, y)$ *este continuă în* (D) *împreună cu derivatele sale parțiale de primul ordin, și dacă pentru fiecare punct* (x, y) *din* (D)

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\left(v\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial v}{\partial r}\right) d\theta = 0 \tag{6}$$

unde $u = u(x + r\cos\theta,\ y + r\sin\theta)$, $v = v(x + r\cos\theta,\ y + r\sin\theta)$ *atunci* $u(x, y)$ *este armonică în* (D).

Prof. N. Ciorănescu [4] extinde teorema S_1 la funcțiile poliarmonice.

În spațiul E_n, cu n dimensiuni, fie (D) un domeniu, $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un punct din (D), $u(M)$ o funcție analitică în (D), Σ_n hipersfera cu centrul în origine și rază unitatea, $P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ un punct pe Σ_n și $d\sigma_n$ elementul de arie pe Σ_n. Avem

Teorema C. *Dacă pentru orice punct* M *al lui* (D), *funcția analitică* $u(M)$ *satisface la condiția*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r}\int_{\Sigma_n}\left[\frac{\partial^{2p-1} u(x_1 + r\xi_1, \ldots, x_n + r\xi_n)}{\partial r^{2p-1}}\right] d\sigma_n = 0 \tag{7}$$

atunci $u(M)$ este o funcție poliarmonică de ordinul p în (D).

Folosind apoi formulele de medie spațiale și periferice ale unei funcții

$$M_s[f(M);r] = f(M) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{2^n n!\,(2+\nu)\ldots(2n+\nu)} (\Delta^{(n)} f)_M$$

$$M_p[f(M);r] = f(M) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{2^n n!\,\nu\cdot(2+\nu)\ldots(2n-2+\nu)} (\Delta^{(n)} f)_M \qquad (8)$$

Prof. N. Ciorănescu obține, [5], formule de medie, corespunzătoare formulei lui Gauss, pentru funcțiile poliarmonice de ordinul 2, 3,....

Recent W. J. Tryitzinsky într-un memoriu de dimensiuni întinse, [6] și considerînd pe (4) ca un laplacian generalizat, folosind în loc de integrala lui Riemann, integrala în sensul lui A. Denjoy, reia problema determinării soluțiilor ecuației $\Delta F = f$ pentru clase mai generale de funcții.

Posibilitățile deschise de ultimile cercetări, făcute exclusiv pentru ecuația lui Laplace, ne-au îndemnat să întreprindem acest studiu lărgind în mod substanțial clasa ecuațiilor cu derivate parțiale, ale căror soluții satisfac o anumită relație integrală, destul de simplă. Cu ajutorul unei ponderi realizate de un polinom trigonometric, am arătat că putem determina clase de ecuații cu derivate parțiale de ordin superior pentru soluțiile cărora să avem

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int_{\Sigma_p} Q_s(\xi_1, \ldots, \xi_p) f(x_1 + r\xi_1, \ldots, x_p + r\xi_p)\, d\sigma_p = 0.$$

Trecînd din domeniul real în cel complex, unei ecuații cu derivate parțiale, omogenă sau nu, de ordin oarecare, am asociat un polinom Fourier $S_n(\theta_1, \ldots, \theta_p, r)$ astfel încît pentru soluțiile olomorfe în (D) ale ecuației să avem

$$\frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \ldots \int_0^{2\pi} S_n(\theta_1, \ldots, \theta_p, r)\, f[x_1 + re^{i\theta_1}, \ldots, x_s + re^{i\theta_p}]\, d\theta_p = 0.$$

Această relație separă în (D), din clasa funcțiilor olomorfe definite în (D), soluțiile olomorfe ale ecuației considerate.

Părăsind sensul clasic al acestor relații integrale, am fost conduși la ecuații cu derivate parțiale de ordin infinit, pentru soluțiile cărora am obținut relații care le caracterizează.

Revenind la variabile reale, am asociat unei curbe închise plane (sau unei varietăți închise cu $n-1$ dimensiuni din spațiul cu n dimensiuni) definită parametric prin două serii Fourier, o ecuație diferențială de ordin infinit, pentru soluțiile căreia avem o formulă de medie ponderată. Am studiat apoi cazul cînd ponderea este unitatea, adică avem formule de medie Gauss.

Am căutat să obținem formule de tip Green, pentru ecuațiile cu derivate parțiale obținute ca limite de integrale definite, extinzînd astfel teorema S_2.

2. Fie $f(x, y)$ o funcție definită într-un domeniu (D), avînd derivate parțiale pînă la ordinul $n+1$ și $Q_s(\sin\theta, \cos\theta)$ un polinom de gradul s în $\sin\theta, \cos\theta$:

$$Q_s(\sin\theta, \cos\theta) = a_0 + a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + \ldots$$
$$\ldots + \sin^{s-1}\theta\,(a_s\cos\theta + b_s\sin\theta) \tag{9}$$

cu a_i, b_i constante oarecare.

Să considerăm integrala definită

$$I(x, y; r) = \int_0^{2\pi} Q_s(\sin\theta, \cos\theta)\, f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)\, d\theta. \tag{10}$$

Dacă punem

$$f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta) = \sum_{m=0}^{n} \frac{r^m}{m!}\left[\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(m)} f(x, y) + r^{n+1} R_{n+1} =$$
$$= \sum_{h+k=0}^{n} \frac{1}{h!\,k!}\, r^{h+k}\cos^h\theta\,\sin^k\theta\,\frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k} f(x, y) + r^{n+1} R_{n+1},$$

unde R_{n+1} este mărginit în (D), iar r este ales astfel încît punctul $x + r\cos\theta$, $y + r\sin\theta$ să aparțină lui (D), integrala (10)se transformă în

$$I(x, y; r) = \sum_{h+k=0}^{n} A_{h,k}\, r^{h+k}\,\frac{\partial^{h+k} f}{\partial x^h \partial y^k} + r^{n+1}\,\overline{R}_{n+1},$$

unde

$$A_{h,k} = \frac{1}{h!\,k!}\int_0^{2\pi} Q_s(\sin\theta, \cos\theta)\cos^h\theta\,\sin^k\theta\,d\theta =$$
$$= \frac{1}{h!\,k!}\sum_{p=0}^{s}\left[a_p\int_0^{2\pi}\cos^{h+1}\theta\,\sin^{k+p-1}\theta\,d\theta + b_p\int_0^{2\pi}\sin^{k+p}\theta\,\cos^h\theta\,d\theta\right] =$$
$$= \frac{1}{h!\,k!}\sum_{p=0}^{s}\left[a_p M_{p,k,h} + b_p N_{p,k,h}\right]$$

cu

$$M_{p,h,k} = \delta_{h+1,\,k+p+1}\,\frac{(h+1)!\,(k+p-1)!}{2^{h+k+p-1}\left(\frac{h+1}{2}\right)!\left(\frac{k+p-1}{2}\right)!}\,\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{h+k+p+2}{2}\right)},$$

$$N_{p,h,k} = \delta_{k+p,h}\,\frac{(k+p)!\,h!}{2^{k+p+h-1}\left(\frac{k+p}{2}\right)!\left(\frac{h}{2}\right)!}\cdot\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{k+p+h+2}{2}\right)}, \tag{11}$$

unde $\delta_{i,j} = 1$ dacă i, j sînt amîndoi pari și $\delta_{i,j} = 0$, în orice altă situație.

Dacă a_i, b_i sînt arbitrare, totuși coeficienții $A_{h,k}$ nu sînt liniar independenți deoarece avem legăturile

$$A_{p,p} = k_p\,(A_{p+2,p} + A_{p,p+2}), \tag{12}$$

unde k_p este o constantă.

Se observă că însăși coeficienții $A_{i,j}$ $(i + j = p,$ const.) nu sînt liniar independenți ci numai doi pot fi considerați arbitrari, ceilalți fiind combinații liniare ale lor și ai celor de indici inferiori.

Putem însă dispune de constantele a_i, b_i pentru ca toți coeficienții $A_{h,k}$, să fie nuli pentru $h + k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, însă nu putem dispune de ele pentru ca $A_{h,k}$ $(h + k = n)$ să fie niște numere date dinainte, tocmai din cauza lui (12).

Tot din cauza relațiilor (12), care au particularitatea că leagă coeficienții $A_{i,j}$ de coeficienții $A_{k,l}$ pentru $k \geqslant i$, $l \geqslant j$, anulînd coeficienții de indici inferiori, nu anulăm simultan și pe ceilalți de indici superiori.

Se vede prin urmare că

$$\lim_{r\to 0}\frac{I(x,y;r)}{r^n} = \lambda_0\frac{\partial^n f}{\partial y^n} + \lambda_1\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-1}\partial x} + \ldots\,\lambda_{n-1}\frac{\partial^n f}{\partial y\,\partial x^{n-1}} + \lambda_n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \tag{13}$$

unde în membrul al doilea avem o ecuație diferențială ai cărei coeficienți depind de a_i, b_i, însă numai doi din ei pot fi arbitrari, ceilalți fiind combinația liniară a lor. Pentru soluțiile acestei ecuații avem

$$\lim_{r\to 0}\frac{I(x,y;r)}{r^n} = 0.$$

Dacă însă căutăm relații de tip Saks-Ciorănescu se vede imediat că dacă $E_n(f)$ este o ecuație cu derivate parțiale liniară, cu coeficienți constanți de ordinul n, oarecare,

$$E_n(f) = \mu_0\frac{\partial^n f}{\partial y^n} + \mu_1\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-1}\partial x} + \ldots\,\mu_{n-1}\frac{\partial^n f}{\partial y\,\partial x^{n-1}} + \mu_n\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \tag{14}$$

atunci se poate găsi totdeauna un polinom trigonometric $S(\theta)$ de gradul n cel puțin pentru care să avem

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_0^{2\pi} S(\theta)\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial r^{n-1}}f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)\,d\theta = E_n(f). \tag{15}$$

Într-adevăr, din expresiile lui $M_{p,h,r}$ și $N_{p,h,r}$ observăm că dacă M sînt diferite de zero, N sînt nuli și invers, deci coeficienții $A_{h,k}$ se exprimă sau numai cu ajutorul lui a_{2p}, b_{2p} sau numai cu ajutorul lui a_{2p+1}, b_{2p+1}. Cum în (14) rămîn numai derivatele de la $n-1$ în sus, este suficient să luăm în $S(\theta)$ toți coeficienții $a_i, b_i = 0$ pentru care $i \equiv n-1 \pmod 2$ pentru ca să obținem pe (14) oricare ar fi μ_i, coeficienții a_k, b_k de astădată putînd fi aleși în consecință.

Observațiile de mai sus ne conduc însă și la următorul rezultat:

Fiind dată o ecuație arbitrară (14) de ordinul n, i se poate asocia totdeauna un polinom trigonomteric de gradul n $S(\theta)$, și o ecuație cu derivate parțiale, neomogenă de gradul $n-2$ cel mult,

$$E_{n-2} = E_0^* + rE_1^* + \ldots + r^{n-2} E_{n-2}^*,$$

unde E_k^* sînt operatori diferențiali omogeni de ordinul k, în $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$, astfel încît să avem

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n}\left[\int_0^{2\pi} S(\theta) f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)\, d\theta - E_{n-2}(f)\right] = E_n(f). \qquad (15')$$

Din (15) obținem imediat teorema B_2 pentru cazul ecuației lui Laplace în două variabile.

3. Dacă luăm

$$S(\theta) = a_0 + a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + a_2\cos\theta\sin\theta + b_2\sin^2\theta,$$

avem

$$A_{0,0} = 2\pi a_0 + \pi b_2; \quad A_{1,0} = a_1\pi; \quad A_{0,1} = b_1\pi,$$

$$A_{2,0} = a_0\pi + b_2\frac{\pi}{4}; \quad A_{1,1} = \frac{\pi}{4}a_2; \quad A_{0,2} = a_0\pi + \frac{3}{4}b_2\pi.$$

Punînd condiția să avem $A_{1,0} = A_{0,1} = 0$ obținem $a_1 = b_1 = 0$, deci

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2}\left[\int_0^{2\pi} \frac{S(\theta)}{A_{0,0}} f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)\, d\theta - f(x,y)\right] = \qquad (16)$$

$$= k\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2h\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + (1-k)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

unde $k = \frac{4a_0 + b_2}{4(2a_0 + b_2)}$; $\quad h = \frac{a_2}{8(2a_0 + b_2)}$.

Dacă $h = 0$, deci $a_2 = 0$ și $k = \frac{1}{2}$, obținem teorema B_3.

Dacă $A_{0,0} = A_{0,1} = A_{1,0} = A_{1,1} = 0$ obținem

$$b_2 = -2a_0, \; a_1 = b_1 = a_2 = 0$$

și

$$A_{2,0} = \pi\left(a_0 - \frac{a_0}{2}\right) = \frac{\pi a_0}{2}, \quad A_{0,2} = \pi\left(a_0 - \frac{6}{4}a_0\right) = -\frac{\pi a_0}{2}$$

și avem pentru $a_0 \neq 0$

$$\lim_{r\to 0} \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta\, f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)\, d\theta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

deci pentru soluțiile ecuației coardei vibrante, derivabile pînă la ordinul trei inclusiv, avem

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta\, f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)\, d\theta = 0. \tag{17}$$

Dacă punem

$$S(\theta) = a_0 + a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + a_2\cos\theta\sin\theta + b_2\sin^2\theta + \ldots$$
$$\ldots + a_6\cos\theta\sin^5\theta + b_6\sin_6\theta$$

cu scopul de a determina ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul trei și patru, definite de relații de forma (13), avem

$$A_{0,0} = \pi\left[2a_0 + b_2 + \frac{3}{4}b_4 + \frac{5}{8}b_6\right], \quad A_{1,0} = \pi\left(a_1 + \frac{a_3}{4} + \frac{a_5}{8}\right),$$

$$A_{0,1} = \pi\left(b_1 + \frac{3}{4}b_3 + \frac{5}{8}b_5\right), \quad A_{2,0} = \pi\left(\frac{a_0}{2} + \frac{b_2}{8} + \frac{b_4}{16} + \frac{5}{128}b_6\right),$$

$$A_{1,1} = \pi\left(\frac{a_2}{4} + \frac{a_4}{8} + \frac{5}{64}a_6\right), \quad A_{0,2} = \pi\left(\frac{a_0}{2} + \frac{3}{8}b_2 + \frac{5}{16}b_4 + \frac{35}{128}b_6\right),$$

$$A_{3,0} = \pi\left(\frac{a_1}{8} + \frac{a_3}{48} + \frac{1}{128}a_5\right), \quad A_{2,1} = \pi\left(\frac{b_1}{8} + \frac{b_3}{16} + \frac{5}{128}b_5\right),$$

$$A_{1,2} = \pi\left(\frac{a_1}{8} + \frac{a_3}{16} + \frac{5}{128}a_5\right), \quad A_{0,3} = \pi\left(\frac{b_1}{8} + \frac{5}{48}b_3 + \frac{35}{384}b_5\right),$$

$$A_{4,0} = \pi\left(\frac{a_0}{32} + \frac{b_2}{192} + \frac{b_4}{512} + \frac{21}{1024}b_6\right), \quad A_{3,1} = \pi\left(\frac{a_2}{48} + \frac{a_4}{128} + \frac{a_6}{256}\right),$$

$$A_{2,2} = \pi\left(\frac{a_0}{16} + \frac{b_2}{32} + \frac{5b_4}{256} + \frac{7}{512}b_6\right), \quad A_{1,3} = \pi\left(\frac{a_2}{48} + \frac{5}{384}a_4 + \frac{7}{768}a_6\right),$$

$$A_{0,4} = \pi\left(\frac{a_0}{32} + \frac{5}{192}b_2 + \frac{5}{1536}b_4 + \frac{1}{1024}b_6\right).$$

Să căutăm ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul trei. Trebuie să avem $a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = b_2 = b_4 = b_6 = 0$ cît și condițiile suplimentare

$$a_1 + \frac{1}{4} a_3 + \frac{1}{8} a_5 = 0$$

$$b_1 + \frac{3}{4} b_3 + \frac{5}{8} b_5 = 0$$

deci

$$A_{3,0} = \frac{\pi}{192}(12\, a_1 + a_3); \qquad A_{2,1} = \frac{\pi}{64}(4b_1 + b_3);$$

$$A_{1,2} = \frac{\pi}{512}(44\, a_1 + 27\, a_3); \qquad A_{0,3} = -\frac{\pi}{192}(4b_1 + b_3).$$

Se vede imediat că, a_i, b_i pot fi aleși astfel încît ecuația

$$E_3 = A_{3,0}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + A_{2,1}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + A_{1,2}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + A_{0,3}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \tag{18}$$

să aibă coeficienții $A_{i,j}$ arbitrari, în afară de legătura

$$A_{0,3} = -3\, A_{2,1}$$

deci coeficienții ecuației depind de doi parametri arbitrari.

Pentru ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul patru avem

$$a_1 = a_3 = a_5 = b_1 = b_3 = b_5 = 0, \quad A_{0,0} = A_{2,0} = A_{1,1} = A_{2,2} = 0$$

sau

$$16\, a_0 + 8\, b_2 + 6\, b_4 + 5\, b_6 = 0,$$

$$8\, a_0 + 2\, b_2 + b_4 + \frac{5}{8} b_6 = 0,$$

$$2\, a_2 + a_4 + \frac{5}{8} a_6,$$

$$8\, a_0 + 6b_2 + 5b_4 + \frac{35}{8} b_6 = 0.$$

Putem lua pe a_0, a_2, a_6, b_6, arbitrari și avem

$$b_2 = -8\, a_0 + \frac{5}{16} b_6; \qquad a_4 = -2a_2 - \frac{5}{8} a_6$$

$$b_4 = 8\, a_0 - \frac{5}{4} b_6$$

deci

$$A_{4,0} = \frac{\pi}{192} a_0 + \frac{121\pi}{6144} b_6 ; \qquad A_{3,1} = \frac{\pi}{192} a_2 - \frac{\pi}{1024} a_6 ;$$

$$A_{3,2} = -\frac{6\pi}{192} a_0 - \frac{6\pi}{6144} b_6 ; \qquad A_{1,3} = -\frac{\pi}{192} a_2 + \frac{\pi}{1024} a_6 ;$$

$$A_{0,4} = -\frac{29\pi}{192} a_3 + \frac{31\pi}{6144} b_6 .$$

Se vede că

$$A_{3,1} = A_{1,3}$$

și

$$-6 A_{4,0} + 12 A_{0,4} = 59 A_{2,2}$$

deci ecuațiile de gradul patru sînt de forma

$$\lambda_0 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \lambda_1 \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} + \lambda_2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} - \lambda_1 \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} + \frac{1}{12}(59\ \lambda_2 + 6\ \lambda_0) \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0 \qquad (19)$$

și depinde tot de doi parametri arbitrari.

Reciproc, la o ecuație de forma (19) se poate asocia o pondere $S(\theta)$ astfel încît pentru orice soluție $f(x,y)$ a acesteia, derivabilă de cinci ori, să avem

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^4} \int_0^{2\pi} S(\theta) f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)\, d\theta = 0.$$

4. Fie acum o funcție $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ definită într-un domeniu (D) din spațiul cu p dimensiuni derivabilă de $n+1$ ori și $Q_s(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ un polinom de gradul s în coordonatele $(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ ale unui punct curent de pe sfera de rază unitate $\sum_p$, de ecuație

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_p^2 = 1.$$

Din cauza acestei legături, Q_s are forma

$$Q_s(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \overline{Q}_s(\xi_2, \ldots, \xi_p) + \xi_1 \overline{Q}_{s-1}(\xi_2, \ldots, \xi_p)$$

$\overline{Q}_s$ și $\overline{Q}_{s-1}$ fiind polinoame de gradul s și $s-1$ respectiv în $\xi_2, \ldots, \xi_p$ deci conținînd

$$C^s_{p+s-2} + C^{s-1}_{s+p-3}$$

constante arbitrare.

Putem dispune de gradul s cît și de aceste constante arbitrare pentru ca limita integralei

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{\Sigma_p} Q_s(\xi_1, \ldots, \xi_p) f(x_1 + r\xi_1 + x_2 + r\xi_2, \ldots, x_p + r\xi_p)\, d\sigma_p \qquad (20)$$

unde $d\sigma_p$ este elementul de arie pe Σ_p, iar r este astfel ca punctul M $(x_1 + r\,\xi_1, \ldots, x_p + r\,\xi_p)$ să aparțină lui (D), să se reducă la o ecuație cu derivate parțiale de ordinul n, omogenă, ai cărei coeficienți, constanți, depind de parametri introduși de polinomul Q_s.

Dacă r satisface condiția impusă putem scrie în (D)

$$f(x_1 + r\xi_1, \ldots, x_p + r\,\xi_p) = f(x_1, \ldots, x_p) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} \frac{r^m}{m!} \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \xi_p \frac{\partial}{\partial x_p} \right)^{(m)} f(x_1, \ldots, x_p) + r^{n+1} R_{n+1}$$

cu R_{n+1} mărginit în (D).

Coeficientul lui

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \ldots \partial x_p^{\beta_p}}, \qquad (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p = m) \tag{21}$$

din (20) este $A_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p}$ dat de

$$A_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p} = \frac{r^m}{\beta_1!\,\beta_2! \ldots \beta_p!} \int_{\Sigma_p} Q_s(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)\, \xi_1^{\beta_1} \xi_2^{\beta_2} \ldots \xi_p^{\beta_p}\, d\sigma_p \tag{22}$$

și ținînd seama că integrala

$$\int_{\Sigma_p} \xi_1^{\gamma_1} \xi_2^{\gamma_2} \ldots \xi_p^{\gamma_p}\, d\sigma_p$$

este nulă dacă cel puțin unul din numerele întregi γ_i este impar și are valoarea

$$\frac{\gamma_1!\,\gamma_2! \ldots \gamma_p!}{2^{\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_p-1} \left(\frac{\gamma_1}{2}\right)! \ldots \left(\frac{\gamma_p}{2}\right)!} \cdot \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_p+p}{2}\right)}$$

dacă toți γ_i sînt pari, avem

$$A_{\beta_1, \ldots, \beta_p} = \frac{r^m}{\Pi_1^p \beta_i!} \sum_{\gamma} \delta_{\beta_1+\gamma_1, \ldots, \beta_p+\gamma_p}\, A_{\gamma_1, \ldots, \gamma_p} \frac{\Pi_1^p (\beta_i + \gamma_i)!}{2^{\Sigma(\beta_i+\gamma_i)-1}\, \Pi_1^p \left(\frac{\beta_i+\gamma_i}{2}\right)!} \cdot \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\Sigma(\beta_i+\gamma_i)+p}{2}\right)}$$

unde $a_{\gamma_1, \ldots, \gamma_p}$ este coeficientul lui $\xi_1^{\gamma_1} \xi_2^{\gamma_2} \ldots \xi_p^{\gamma_p}$ din Q_s iar $\delta_{\beta_1+\gamma_1, \beta_2+\gamma_2, \ldots, \beta_p+\gamma_p}$ este egal cu unitatea dacă toți $\beta_i + \gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ sînt pari, și nul în caz contrar.

Putem obliga coeficienții $A_{\beta_1, \ldots, \beta_p}$ să fie nuli pentru

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p \leqslant n - 1$$

deoarece dispunem atît de s cît și de $a_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p}$ cu care $A_{\beta_1, \ldots, \beta_p}$ se exprimă liniar.

În plus există legături între coeficienții A_β, însă acestea sînt de gradul întîi și omogene, deci verificate de soluțiile $A_{\beta_1,\ldots,\beta_p} = 0$. Într-adevăr se vede că avem

$$A_{p,p,\ldots,p} = k\,[A_{p+2,p,\ldots,p} + A_{p,p+2,p,\ldots,p} + \ldots A_{p,p,\ldots,p,p+2}]. \qquad (23)$$

Ținînd seamă de aceste rezultate urmează că

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int_{\Sigma_p} Q_s(\xi_1, \cdots, \xi_p)\, f(x_1 + r\xi_1, \cdots, x_p + r\xi_p)\, d\sigma_p = E_n(f), \qquad (24)$$

unde $E_n(f)$ este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul n omogenă cu coeficienți constanți

$$E_n(f) = \sum_\alpha C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \frac{\partial^n U}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}}$$

cu $C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ funcții liniare de $a_{\gamma_1,\ldots,\gamma_p}$. Nu putem dispune însă de $a_{\gamma_1,\ldots,\gamma_p}$, pentru ca $C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ să fie niște numere date, din cauza legăturilor (23). Prin urmare ecuațiile $E_n(f)$ nu au toți coeficienți arbitrari.

Dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ este o soluție a ecuației $E_n(f)$, avem evident

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int_{\Sigma_p} Q_s(\xi_1, \ldots, \xi_p)\, f(x_1 + r\,\xi_1, \ldots, x_p + r\,\xi_p)\, d\sigma_p = 0$$

$f(x_1, \ldots, x_p)$ avînd derivate parțiale pînă la ordinul $n+1$ inclusiv în (D).

În baza unui raționament analog ca și pentru două variabile avem și

1°. Dacă $E_n(f)$ este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul n, omogenă, în coeficienți constanți, arbitrară, se poate găsi totdeauna o pondere $Q_s(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ astfel încît să avem

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \int_{\Sigma_p} Q_s(\xi_1, \ldots, \xi_p)\, \frac{\partial^{n-1} f(x_1 + r\xi_1, \ldots, x_p + r\,\xi_p)}{\partial r^{n-1}}\, d\sigma_p = E_n(f) \qquad (25)$$

și

2°. Dacă $E_n(f)$ este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul n, omogenă, cu coeficienți constanți, arbitrară, se poate găsi totdeauna o ecuație diferențială de ordinul $n-2$ cel mult, neomogenă,

$$E_{n-2} = E_0^* + r\,E_1^* + \ldots + r^{n-2} E_{n-2}^*$$

cu E_k^* un operator diferențial în $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}$, omogen, cu coeficienți constanți de ordinul k, și o pondere $Q_s(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ astfel încît să avem

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \left[\int_\Sigma Q_s(\xi_1, \ldots, \xi_p)\, f(x_1 + r\,\xi_1, \ldots, x_p + r\xi_p)\, d\sigma_p - E_{n-2}(f) \right] =$$

$$= E_n(f). \qquad (26)$$

5. Luînd

$$Q_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = a_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + b_1\xi_2\xi_3 + b_2\xi_3\xi_1 + b_3\xi_1\xi_2 + c_2\xi_2^2 + c_3\,\xi_3^2,$$

avem

$$A_{0,0,0} = \pi\left(4a_0 + \frac{4}{3}\,c_2 + \frac{4}{2}\,c_3\right);\quad A_{1,00} = \pi\frac{4}{3}a_1;\quad A_{0,1,0} = \pi\frac{4}{3}a_2$$

$$A_{0,0,1} = \pi\frac{4}{3}a_3;\quad A_{2,0,0} = \pi\left(\frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{15}\,c_2 + \frac{2}{15}\,c_3\right);$$

$$A_{0,2,0} = \pi\left(\frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{5}\,c_2 + \frac{2}{15}\,c_3\right);\quad A_{0,0,2} = \pi\left(\frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{15}\,c_2 + \frac{2}{5}\,c_3\right)$$

$$A_{1,1,0} = \pi\frac{4}{15}b_3;\quad A_{0,1,1} = \pi\frac{4}{15}\,b_1;\quad A_{1,0,1} = \pi\frac{4}{15}b_2$$

și se vede că putem dispune de coeficienții a_1, b_i, c_i astfel că în membrul al doilea în (26) să avem ecuația

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\Sigma_3} Q_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,f(x_1 + r\xi_1, x_2 + r\xi_2, x_3 + r\xi_3)\,d\sigma_3 =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

dacă luăm $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$, și

$$\frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{30}\,c_2 + \frac{1}{30}\,c_3 = 1,$$

$$\frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{10}\,c_2 + \frac{1}{30}\,c_3 = 1,$$

$$\frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{30}\,c_2 + \frac{1}{10}\,c_3 = -2.$$

Coeficientul -2 intervine din cauză că

$$A_{0,0,0} = A_{2,0,0} + A_{0,2,0} + A_{0,0,2} = 0.$$

În sfîrșit dacă punem

$$\frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{30}\,c_2 + \frac{1}{30}\,c_3 = \frac{1}{2}\lambda_1$$

$$\frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{10}\,c_2 + \frac{1}{30}\,c_3 = \frac{1}{2}\lambda_2$$

$$\frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{30}\,c_2 + \frac{1}{10}\,c_3 = \frac{1}{2}(1 - \lambda_1 - \lambda_2)$$

$$a_0 + \frac{1}{6}\,c_2 + \frac{1}{6}\,c_3 = 1$$

sistemul fiind compatibil, deoarece ultima ecuație este consecința celorlalte trei, avem

$$\lim_{r\to 0}\left[\frac{2}{4\pi r^2}\int_{\Sigma_p} Q_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3) f(x_1+r\xi_1, x_2+r\xi_2, x_3+r\xi_3)\, d\sigma_3 - f(x_1, x_2, x_3)\right]=$$

$$= \lambda_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \lambda_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - (\lambda_1+\lambda_2-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}. \tag{27}$$

6. Rezultatele paragrafelor precedente arată că polinomul $Q_s(\xi_1,\ldots,\xi_p)$ nu este determinat în mod unic, deoarece, fiind determinat gradul minim s, orice polinom de grad superior lui s,

$$Q_{s'} = Q_s + R_s,$$

conduce la aceeași ecuație cu derivate parțiale. Prin urmare, este natural să considerăm în locul lui $Q_s(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ o serie uniform convergentă pe $\sum_p$. Apare însă imediat dificultatea calculării coeficienților, deoarece sîntem conduși la sisteme de ecuații cu o infinitate de variabile.

Putem să procedăm însă în modul următor;

Fie $f(x, y)$ o funcție de două variabile complexe x, y, olomorfă în domeniul D (format din două domenii D' și D'' situate respectiv, în planele lui x și y), $S(\theta, \varphi)$ o serie Fourier complexă

$$S(\theta,\varphi) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \gamma_{m,n}\, e^{im\theta+in\varphi} \tag{28}$$

uniform convergentă pentru $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ și să considerăm integrala dublă

$$I(x, y; r) = \frac{1}{4\pi^2}\int_5^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} S(\theta,\varphi) f(x+re^{i\theta}, y+re^{i\varphi})\, d\theta.$$

Ținînd seama de dezvoltarea în serie Taylor a lui $f(x, y)$, dezvoltare posibilă dacă r este suficient de mic astfel ca cercurile de centre x, y și rază r să fie conținute în D' respectiv D'' avem

$$\begin{aligned} I(x,y;r) = \gamma_{0,0} f(x,y) + \frac{r}{1!}\left(\gamma_{-1,0}\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_{0,-1}\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) + \ldots \\ \ldots + \frac{r^k}{k!}\left[\gamma_{-k,0}\frac{\partial^k}{\partial x^k} + \gamma_{-k+1,-1} C_k^1 \frac{\partial^k}{\partial x^{k-1}\partial y} + \ldots\right. \\ \left. \ldots \gamma_{-1,-k+1} C_k^{k-1}\frac{\partial^k}{\partial x\,\partial y^{k-1}} + \gamma_{0,-k}\frac{\partial^k}{\partial y^k}\right] f(x,y) + \ldots \end{aligned} \tag{29}$$

Se vede imediat că avem următorul rezultat:

Oricare ar fi ecuația cu derivate parțiale

$$\alpha_0\frac{\partial^n}{\partial x^n} + \alpha_1\frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial y} + \ldots + \alpha_{n-1}\frac{\partial^n}{\partial x\,\partial y^{n-1}} + \alpha_n\frac{\partial^n}{\partial y^n} = 0 \tag{30}$$

Se poate determina totdeauna un polinom trigonometric $S_n(\theta, \varphi)$ astfel încît să avem pentru soluțiile ecuației (30)

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} S_n(\theta, \varphi) f(x + r e^{i\theta}, y + r e^{i\varphi}) d\theta = 0. \tag{31}$$

Polinomul $S_n(\theta, \varphi)$ are expresia

$$S_n(\theta, \varphi) = \sum_{p=0}^{n} \frac{p!\,(n-p)!}{n!} \alpha_p \cdot \exp\left[i(p-n)\theta - ip\varphi \right], (i = \sqrt{-1}).$$

Evident, există și alte ponderi $S(\theta, \varphi)$ pentru care integralele de tipul (31) să fie nule. Într-adevăr, nu avem decît să luăm pentru $S(\theta, \varphi)$ pe

$$S(\theta, \varphi) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} e^{i(m\theta + n\varphi)}$$

pentru ca să avem în (31) identic nul oricare ar fi funcția olomorfă $f(x, y)$ în D.

Specificul relației (31), deci și al ponderii $S_k(\theta, \varphi)$ este următorul: din mulțimea funcțiilor olomorfe $(\mathfrak{M})$ definite în (D) relația (31) separă funcțiile olomorfe, soluții ale ecuației (30), de toate celelalte funcții ce aparțin lui $(\mathfrak{M})$. Într-adevăr, numai pentru soluțiile ecuației (30) avem relația (31) după cum tot numai pentru soluțiile ecuației (30) avem și

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \overline{S}_n(\theta, \varphi) f(x + re^{i\theta}, y + re^{i\varphi}) d\theta$$

cu

$$\overline{S}_n = 1 + S_n.$$

7. Rezultatul obținut pentru ecuația omogenă (30) poate fi extins pentru o ecuație neomogenă de gradul n

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} \alpha_{k,p} \frac{\partial^p}{\partial x^{p-k} \partial y^k} = 0 \tag{32}$$

de astădată însă polinomul trigonometric $S(\theta, \varphi)$ depinde și de r.

Într-adevăr, dacă luăm pentru $S(\theta, \varphi, r)$ expresia

$$S_n(\theta, \varphi, r) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} \frac{k!(p-k)!}{r^p} \alpha_{k,p} \cdot \exp\left[i(k-p)\theta - ik\varphi \right]$$

atunci pentru soluțiile ecuației (32) avem, oricare ar fi $r \neq 0$,

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} S_n(\theta, \varphi, r) f(x + re^{i\theta}, y + re^{i\varphi}) d\varphi = 0.$$

8. Putem obține rezultate analoge pentru o ecuație cu derivate parțiale într-un număr oarecare de variabile, omogenă sau neomogenă.

Fie ecuația cu derivate parțiale

$$\sum_{p=0}^{n} \alpha_{m_1, m_2, \ldots, m_s} \frac{\partial^p}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_s^{m_s}} = 0, \; m_1 + m_2 + \ldots + m_s = p \tag{33}$$

cu coeficienți constanți și neomogenă de gradul n. Dacă

$$S_n(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, r) = \sum_{p=0}^{n} \frac{m_1 ! \, m_2 ! \ldots m_s !}{r^p} \alpha_{m_1, m_2, \ldots, m_s} \exp \omega$$

cu

$$\omega = -i (m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2 + \ldots + m_s \theta_s), \quad i = \sqrt{-1}$$

atunci pentru orice soluție olomorfă $f(x_1, \ldots, x_s)$ a ecuației (33) avem

$$\frac{1}{(2\pi)^s} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \ldots \int_0^{2\pi} S_n(\theta_1, \ldots, \theta_s, r) f(x_1 + re^{i\theta_1}, \ldots, x_s + re^{i\theta_s}) \, d\theta_s = 0 \tag{34}$$

oricare ar fi $r \neq 0$ astfel ca punctul $x_1 + re^{i\theta_1}, \ldots, x_s + re^{i\theta_s}$ să nu iasă din domeniul de olomorfie (D) al lui $f(x_1, \ldots, x_s)$.

Relația (34) separă din mulțimea funcțiilor $f(x_1, \ldots, x_s)$ olomorfe în (D). soluțiile olomorfe în (D) ale ecuației (33).

9. Putem da și o altă semnificație rezultatelor precedente. Fie $f(x,y)$ o funcție olomorfă în domeniul (D), de două variabile complexe x, y, $S(\theta)$ o serie Fourier complexă

$$S(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{in\theta}$$

uniform convergentă în intervalul $(0,2\pi)$ și să considerăm integrala

$$I(x, y; r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\theta) f(x + re^{i\theta}, y + re^{-i\theta}) \, d\theta. \tag{35}$$

Ținînd seama de dezvoltarea în serie Taylor a lui $f(x, y)$, dezvoltare posibilă dacă r este astfel încît punctul $(x + re^{i\theta}, y + re^{-i\theta})$ să aparțină lui (D) pentru $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, avem

$$I(x, y; r) = \gamma_0 f(x, y) + \frac{r}{1!}\left(\gamma_1 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_{-1} \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x, y) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{r^k}{k!}\left[\gamma_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} + \gamma_{k-2} C_k^1 \frac{\partial^k}{\partial y^{k-1} \partial x} + \ldots + \gamma_{-k+2} C_k^{k-1} \frac{\partial^k}{\partial y \, \partial x^{k-1}} + \right. \tag{36}$$

$$\left. + \gamma_{-k} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\right] f(x, y) + \ldots$$

Dacă dăm lui r o valoare constantă r_0 atunci pentru soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale de ordin infinit, cu coeficienți constanți,

$$E_\infty(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_0^k}{k!} \sum_{p=0}^{k} \gamma_{k-2p} C_k^p \frac{\partial^k f(x,y)}{\partial y^{k-p} \partial x^p} = 0 \tag{37}$$

avem, pentru orice punct (x, y) din (D), astfel ca $(x + r_0 e^{i\theta}, y + r_0 e^{-i\theta}) \in (D)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ și $r_0 = \text{const}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\theta) f(x + r_0 e^{i\theta}, y + r_0 e^{-i\theta}) \, d\theta = 0. \tag{38}$$

Prin urmare, funcțiile analitice $f(x, y)$ în (D) care verifică ecuația (38) sînt soluții ale ecuației de ordin infinit (37). Putem arăta că, reciproc, soluțiile olomorfe în (D) ale ecuației (37) verifică în domeniul (D'), cu (D') în (D), și astfel ca pentru $(x, y) \in (D')$, $(x + r_0 e^{i\theta}, y + r_0 e^{-i\theta}) \in (D)$, relația funcțională (38).

Fie, așadar, o serie $S(\theta)$ uniform convergentă în intervalul $(0,2\pi)$

$$S(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{in\theta}$$

cu suma $S(\theta)$, și ecuația diferențială infinită (37) cu aceiași coeficienți γ_n. Să arătăm că o funcție olomorfă $f(x, y)$ soluție a ecuației (37), deci

$$E_\infty(f) = 0$$

cu seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_0^k}{k!} \sum_{p=0}^{k} \left| \gamma_{k-2p} \right| \left| C_k^p \right| \left| \frac{\partial^k f(x,y)}{\partial y^{k-p} \partial x^p} \right| < \infty$$

verifică ecuația funcțională (38).

Dacă înlocuim în (37) pe γ_p cu expresiile lor

$$\gamma_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\theta) e^{-ip\theta} d\theta$$

avem

$$E_\infty(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_0^k}{k!} \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_k^p \frac{\partial^k f(x,y)}{\partial y^{k-p} \partial x^p} S(\theta) e^{(2p-k)i\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\theta) f(x, y) \, d\theta + \frac{r_0}{1!} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\theta) \left[e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial y} + e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial x} \right] f(x, y) \, d\theta + \ldots$$

$$\ldots + \frac{r_0^k}{k!} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\theta) \left[e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial y} + e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial x} \right]^{(k)} f(x, y) \, d\theta + \ldots$$

și intervertind operația de însumare cu aceea de integrare, avem

$$E_\infty(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\theta) f(x + r_0 e^{i\theta}, y + r_0 e^{-i\theta})\, d\theta = 0.$$

Putem spune prin urmare că relația (38) caracterizează soluțiile olomorfe ale ecuației (37).

10. *Ecuații cu derivate parțiale de ordin infinit.* În paragraful precedent am fost conduși la o ecuație cu derivate parțiale de ordin infinit cu coeficienți constanți. Introducerea ecuațiilor diferențiale de ordin infinit nu are un aspect formal. Obiectul acestui paragraf este de a considera cîteva ecuații diferențiale de ordin infinit, care pot fi integrate arătîndu-se astfel că deobicei astfel de ecuații admit ca soluții clase de funcții mai generale decît ecuațiile de ordin finit.

a) O ecuație diferențială infinită simplă este ecuația obținută din seria lui Taylor

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

Într-adevăr, dacă punem $x = a$, $f(a) = y$, $f^{(n)}(a) = y^{(n)}$, $f(b) = B$ (const.) obținem

$$y - \frac{x-b}{1!} y' + \frac{(x-b)^2}{2!} y'' + \ldots + (-1)^n \frac{(x-b)^n}{n!} y^{(n)} + \ldots = B \qquad (39)$$

ecuație care ne propunem s-o integrăm. Să observăm că ecuația

$$y - \frac{x-b}{1!} y' = 0 \qquad (40)$$

admite soluția

$$y = A_1 (x-a).$$

Tot astfel ecuația

$$y - \frac{(x-b)}{1!} y' + \frac{(x-b)^2}{2!} y'' = 0 \qquad (41)$$

admite integrala generală

$$y = A_1 (x-a) + A_2 (x-a)^2.$$

Să arătăm acum că ecuația

$$y - \frac{(x-b)}{1!} y' + \frac{(x-b)^2}{2!} y'' + \ldots + (-1)^n \frac{(x-b)^n}{n!} y^{(n)} = 0 \qquad (42)$$

admite soluția

$$y = A_1 (x-b) + A_2 (x-b)^2 + \ldots + A_n (x-b)^n. \qquad (43)$$

Ecuația (42) este de tip Euler. Prin urmare rămîne numai de verificat că polinomul

$$1 - \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} = 0 \qquad (44)$$

admite rădăcini primele n numere întregi. Din (40) și (41) se vede că pentru $n = 1$, ecuația caracteristică admite rădăcinile $\lambda_1 = 1$ și pentru $n = 2$ admite rădăcinile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Presupunînd adevărat pînă la $n - 1$ adică polinomul

$$1 - \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2)}{(n-1)!} = 0$$

admite rădăcinile $\lambda_k = k$, $(k = 1,2,\ldots, n-1)$ se vede ușor că și ecuația (44) admite aceleași rădăcini. Rămîne să arătăm numai că (44) admite și rădăcina $\lambda_n = n$. Pentru $\lambda = n$ avem în (44)

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$$

deci și $\lambda = n$ este rădăcină. Integrala generală a ecuației (42) este așadar (43). Să mai observăm că (43) verifică și ecuația (39) omogenă, oricare ar fi n, deci integrala generală a lui (39) este dată de

$$y = \sum_1^\infty A_n (x-b)^n + B \qquad (45)$$

cu

$$\sum_1^\infty |A_n| \cdot |x-b|^n < \infty,$$

unde A_n sînt arbitrari, adică integrala generală este dată de clasa funcțiilor analitice în jurul punctului $x = b$.

b) Să considerăm acum seria lui Taylor în două variabile

$$f(a_2, b_2) = f(a_1, b_1) + \sum_1^\infty \frac{1}{n!}\left[(a_2 - a_1)\frac{\partial}{\partial a_1} + (b_2 - b_1)\frac{\partial}{\partial b_1}\right]^{(n)} f(a_1, b_1).$$

Dacă notăm

$$a_1 = x, \qquad b_1 = y$$
$$a_2 = a, \qquad b_2 = b$$
$$f(x, y) = z, \qquad f(a, b) = B$$

obținem ecuația cu derivate parțiale de ordin infinit

$$z - \frac{(x-a)}{1!}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{y-b}{1!}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{(x-a)^2}{2!}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (x-a)(y-b)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \qquad (46)$$

$$+ \frac{(y-b)^2}{2!}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}(x-a)^n \frac{\partial^n z}{\partial x^n} +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{n!} C_n^1 (x-a)^{n-1}(y-b)\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}(y-b)^n \frac{\partial^n z}{\partial y^n} + \ldots = B.$$

Se observă că ecuația

$$z - \frac{x-a}{1!}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{y-b}{1!}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

admite soluția

$$z = \Phi_1 (x - a, y - b),$$

Φ_1 fiind o funcție arbitrară, omogenă, de gradul întîi în

$$(x - a) \text{ și } (y - b).$$

În mod analog se constată că ecuația

$$z - \frac{x-a}{1!}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{y-b}{1!}\frac{\partial z}{\partial y} + \ldots + \frac{(-1)^m}{m!}(x-a)^m \frac{\partial^m z}{\partial x^m} +$$

$$+ C_m^1 \frac{(-1)^m}{m!}(x-a)^{m-1}(y-b)\frac{\partial^m z}{\partial x^{m-1}\partial y} + \ldots + \frac{(-1)^m}{m!}(y-b)^m \frac{\partial^m z}{\partial y^m} = 0$$

admite ca integrală generală pe $z = \Phi_1 (x - a, y - b) + \Phi_2 (x - a, y - b) + \ldots + \Phi_m (x - a, y - b)$, unde $\Phi_i (x - a, y - b)$ este o funcție omogenă de gradul i în $x - a$, $y - b$, arbitrară.

Într-adevăr, pentru Φ_m este ușor de văzut că aplicînd relația lui Euler relativă la funcții omogene, sîntem conduși la

$$\Phi_m \left[1 - \frac{m}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!} - \ldots + (-1)^m \frac{m(m-1)\ldots 2.1}{m!} \right] = 0$$

care este adevărată deoarece paranteza e nulă. Prin urmare integrala generală a ecuației (46) este dată de expresia

$$Z = B + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i (x - a, y - b) \tag{47}$$

cu

$$\sum_{i=1}^{\infty} | \Phi_i (x - a, y - b) | < \infty,$$

unde

$$\Phi_i (x - a, y - b)$$

sînt funcții omogene arbitrare de gradul i în $x - a$, $y - b$.

c) Putem construi cu ușurință ecuația diferențială infinită care admite ca integrală generală pe

$$y = \sum_{1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n x} \tag{48}$$

cu

$$\sum_{1}^{\infty} | A_n | e^{\alpha_n x} < \infty \tag{49}$$

și seria

$$\sum_1^\infty \left| \frac{1}{\alpha_n} \right|$$

convergentă. Într-adevăr dacă considerăm produsul infinit

$$P(u) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{u}{\alpha_n} \right)$$

și seria corespunzătoare

$$S(u) = 1 + \gamma_1 u + \gamma_2 u^2 + \ldots + \gamma_n u^n + \ldots = 0$$

care se anulează pentru $u_k = \alpha_k$, urmează că ecuația diferențială

$$y + \gamma_1 y' + \gamma_2 y'' + \ldots + \gamma_n y^{(n)} + \ldots = 0$$

are ca integrală generală pe (48), dacă condiția (49) este îndeplinită.

d) În încheiere să facem observația că ecuația

$$y + \frac{1}{1!} y' + \ldots + \frac{1}{n!} y^{(n)} + \ldots = 0 \tag{50}$$

nu admite decît soluția $y = 0$, deoarece ecuația caracteristică nu se anulează pentru nici o valoare finită întrucît există un rang N astfel încît pentru $n > N$ și A fiind un număr pozitiv arbitrar de mare, rădăcinile ecuației

$$1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} = 0$$

au modulele superioare lui A.

11. *Formule de medie.* Rezultatele precedente cuprind formulele clasice din teoria funcțiilor monogene de o variabilă complexă, în cazul particular cînd curba de integrare este un cerc. După cum a arătat prof. N. Ciorănescu [5] aceste rezultate permit extinderea formulei de medie pentru funcțiile poliarmonice de mai multe variabile, suprafața de integrare fiind sfera din spațiul respectiv. Înlocuind sfera cu un elipsoid, prof. N. Ciorănescu [5] determină clasa soluțiilor analitice care au proprietatea de medie pe această suprafață ceva mai generală decît sfera.

Metoda de calcul utilizată pînă acum ne permite să extindem în mare măsură rezultatele obținute în această direcție, numai că în loc să căutăm pentru o ecuație diferențială dată curbele închise și punctul din interiorul lor pentru soluțiile căreia relația de medie există, vom asocia unei curbe arbitrare o ecuație diferențială ale cărei soluții să satisfacă o anumită formulă de medie.

a) Fie o curbă plană, închisă, γ,

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\theta) \\ y &= \psi(\theta) \end{aligned} \tag{51}$$

dată prin două serii Fourier reale, oarecare, uniform convergente pentru $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

$$x = \varphi(\theta) = \sum_{0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$$

$$y = \psi(\theta) = \sum_{0}^{\infty} (a'_n \cos n\theta + b'_n \sin n\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c'_n e^{in\theta}$$

de lungime

$$S_\gamma = \int_0^{2\pi} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^{2\pi} K(\theta)\, d\theta,$$

unde $K(\theta)$ în general nu este o funcție rațională de sin θ și cos θ.

Să considerăm acum integrala definită

$$I(x, y; \gamma) = \int_0^{2\pi} f[x + \varphi(\theta), y + \psi(\theta)]\, d\theta \tag{52}$$

cu $f(x, y)$ o funcție analitică într-un domeniu (D), suficient de întins pentru ca $(x, y) \in D$ și $[x + \varphi(\theta), y + \psi(\theta)] \in (D)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$.

Dezvoltînd în serie funcția $f(x, y)$ și înlocuind în (52), avem

$$I(x, y; \gamma) = 2\pi f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\alpha_{n,0} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + \alpha_{n-1,1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \alpha_{1,n-1} \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}} + \alpha_{0,n} \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \right], \tag{53}$$

unde am notat

$$\alpha_{m,p} = \frac{(m+p)!}{m!\, p!} \int_0^{2\pi} \varphi^m(\theta)\, \psi^p(\theta)\, d\theta. \tag{54}$$

Prin urmare, pentru soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale de ordin infinit

$$E_\infty(f) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\alpha_{n,0} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + \alpha_{n-1,1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \alpha_{1,n-1} \frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}} + \alpha_{0,n} \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \right] = 0 \tag{55}$$

avem următoarea formulă de medie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,[x+\varphi(\theta),\ y+\psi(\theta)]\,d\theta = f(x,\ y) \tag{56}$$

pentru orice $(x,\ y)\in(D')<(D)$ astfel ca $[x+\varphi(\theta),\ y+\psi(\theta)]\in(D)$. (D) fiind domeniul de analiticitate al lui $f(x,\ y)$.

Să considerăm acum șirul de ecuații cu derivate parțiale

$$E_1=0,\quad E_2=0,\ \ldots,\ E_n=0,\ \ldots \tag{57}$$

pentru care avem $\lim_{n\to\infty} E_n = E_\infty$. Dacă $f(x,\ y)$ este o funcție analitică oarecare dată în (D), deoarece integrala

$$\int_0^{2\pi} f\,[x+\varphi(\theta),\ y+\psi(\theta)]\,d\theta$$

este finită pentru orice $[x+\varphi(\theta),\ y+\psi(\theta)]$ în D, urmează că seria

$$\sum_1^\infty u_n\ .$$

cu

$$u_n=\frac{1}{n\,!}\left[\alpha_{n,0}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+\alpha_{n-1,1}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}+\ldots+\alpha_{0,n}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right]$$

cu $\alpha_{m,p}$ dați de (54), este uniform convergentă în (D'). Pentru o funcție $f(x,\ y)$ dată, la un $\varepsilon>0$ există un rang N astfel încît pentru $n>N$ să avem

$$\left|\sum_{p=1}^\infty u_{n+p}\right|<\varepsilon$$

pentru $(x,\ y)$ în (D').

Să considerăm acum o soluție analitică $f_1(x,\ y)$ a unei ecuații $E_n=0$ din șirul (57). În virtutea celor afirmate, urmează că unei astfel de funcții îi corespunde un $\varepsilon>0$ astfel încît avem

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1[x+\varphi(\theta),\ y+\psi(\theta)]\,d\theta - f_1(x,y)\right|<\varepsilon \tag{58}$$

pentru orice $(x,\ y)$ în (D'). Dacă $n\to\infty$, atunci $\varepsilon\to 0$. Deoarece pentru orice soluție analitică restul seriei u_n tinde către zero, urmează că dacă T este clasa soluțiilor analitice în (D), ecuației $E_n=0$ îi putem determina

un număr $\varepsilon' > 0$ ($\varepsilon' \geqslant \varepsilon$), astfel încît să avem pentru orice soluție din clasa T și pentru orice (x, y) din (D') relația

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\,[x + \varphi(\theta),\quad y + \psi(\theta)]\, d\theta - f(x, y) \right| < \varepsilon'.$$

Pînă acum am păstrat pe n fix și am dedus pe ε în consecință. Dacă luăm însă un $\varepsilon > 0$ și arbitrar, în virtutea celor de mai sus există un rang N astfel încît pentru $n > N$, pentru orice soluție analitică în (D) a lui $E_n = 0$ și pentru orice (x, y) în (D'), să avem

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\,[x + \varphi(\theta), y + \psi(\theta)]\, d\theta - f(x, y) \right| < \varepsilon. \tag{59}$$

Am obținut astfel inegalități care pot fi considerate *formule de aproape medie*, pe curbe închise oarecare în plan.

Să observăm că inegalitatea (59) este satisfăcută de toate soluțiile șirului infinit de ecuații $E_{N+p} = 0$, $p = 1, 2, \ldots$

Ca aplicație să considerăm ecuația $E_n = 0$ pentru un n dat și clasa soluțiilor acestei ecuații cu derivatele de ordinul $n + 1$ egal mărginite în modul în (D), de un număr fix $M > 0$; cum

$$\left| \alpha_{n-p+1,\, p} \right| \leqslant \frac{(n+1)!}{p!\,(n-p+1)}\, M_1$$

atunci

$$\varepsilon \leqslant \frac{2^{n+1} M \cdot M_1}{2\pi (n+1)!}. \tag{60}$$

Se vede astfel că inegalitatea (59) este îndeplinită pentru ε dat de (60), fără să mai cerem condiția de analiticitate.

În sfîrșit dacă $\varepsilon > 0$ este dat, din (60) rezultă n.

b) Formula obținută prin (56) este însă o formulă de medie ponderată de pondere $\frac{1}{K(\theta)}$, cum ușor se poate verifica.

Pentru ca să obținem formule de medie Gauss (cu pondere unitatea) trebuie să considerăm integrale de forma

$$\frac{1}{S_\gamma} \int_0^{2\pi} f\,[x + \varphi(\theta),\quad y + \psi(\theta)]\, ds = f(x, y),$$

unde

$$S_\gamma = \int_\gamma ds = \int K(\theta)\, d\theta$$

deci rămîne să determinăm curbe pentru care $K(\theta)$ este un polinom trigonometric.

Trebuie să avem

$$\varphi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta) = K^2(\theta)$$

sau

$$\varphi'^2(\theta) = K^2(\theta) - \psi'^2(\theta) = [K(\theta) - \psi'(\theta)]\,[K(\theta) + \psi(\theta)]$$

care conduc la

$$K(\theta) - \psi'(\theta) = Q^2(\theta)$$

$$K(\theta) + \psi'(\theta) = R^2(\theta)$$

pentru ca $\psi'(\theta)$ să fie rațional. Aceste relații permit cu ușurință să determinăm curbe (γ) care să aibă pe $K(\theta)$ polinom.

Într-adevăr, dacă $S(\theta)$ și $T(\theta)$ sînt două polinoame trigonometrice oarecare, avem

$$[S(\theta) \pm T(\theta)]^2 = S^2(\theta) + T^2(\theta) \pm 2S(\theta)\,T(\theta)$$

deci putem lua pentru $K(\theta)$, $\varphi'(\theta)$ și $\psi'(\theta)$, expresiile

$$K(\theta) = S^2(\theta) + T^2(\theta)$$

$$\psi'(\theta) = 2S(\theta)\,T(\theta)$$

$$\varphi'(\theta) = S^2(\theta) - T^2(\theta)$$

și ecuațiile parametrice ale curbei (γ) cît și elementul de arc sînt date de expresiile

$$\varphi(\theta) = \int [S^2(\theta) - T^2(\theta)]\,d\theta,$$

$$\psi(\theta) = 2\int S(\theta)\,T(\theta)\,d\theta, \qquad (61)$$

$$ds\,[S^2(\theta) + T^2(\theta)]\,d\theta.$$

Rămîne de îndeplinit, bineînțeles, condiția ca $\varphi(\theta)$ și $\psi(\theta)$ să fie funcții periodice, ceea ce este totdeauna posibil, deoarece acest fapt nu înseamnă decît două legături între coeficienții arbitrari ai lui $S(\theta)$ și $T(\theta)$.

Astfel, curba definită de

$$S(\theta) = \sin\theta + \cos^2\theta$$
$$T(\theta) = \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$$

îndeplinește această condiție, deci este închisă. Ecuațiile ei parametrice sînt

$$\varphi(\theta) = -\frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta - \frac{2}{3}(1 - \sqrt{3})\cos^3\theta$$

$$\psi(\theta) = 2\sin\theta + \sin^2\theta + \frac{2}{3}(\sqrt{3} - 1)\cos^4\theta$$

cu

$$ds = [1 + \cos^4\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta + 2(1 + \sqrt{3})\sin\theta\cos^2\theta]\,d\theta.$$

În consecință avem

$$\frac{\int_0^{2\pi} f\,[x+\varphi(\theta),\ Y+\psi(\theta)]\,ds}{\int_0^{2\pi} ds} = f(x,\ y) + E_\infty(f) \tag{62}$$

și pentru soluțiile ecuației cu derivate parțiale infinite $E_\infty(f) = 0$ avem formula de medie corespunzătoare.

Pentru funcții de mai multe variabile problema este analogă. Definim suprafața închisă, de exemplu în spațiu, parametric, prin serii trigonometrice de două variabile θ, φ

$$x = \omega_1(\theta,\ \varphi),$$
$$y = \omega_2(\theta,\ \varphi),$$
$$z = \omega_3(\theta,\ \varphi),$$

unde $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Și în această situație, pentru ca să putem realiza formule de medie de pondere unitatea, trebuie ca elementul de arie $d\sigma = K(\theta,\ \varphi)\,d\theta\,d\varphi$, să aibă pe $K(\theta,\ \varphi)$ rațional adică

$$EG - F^2 = P^2(\theta,\ \varphi),$$

$P^2(\theta,\ \varphi)$ fiind pătratul unui polinom trigonometric în θ și φ, cum de fapt se întîmplă pentru sferă.

c) Dacă integralele curbilinii sînt înlocuite cu integrale de suprafață, avem formule de medie corespunzătoare. Astfel

$$\frac{\iint_S [f(x + r\varphi(\theta),\ y + r\psi(\theta)]\,d\sigma}{\iint_S d\sigma} = f(x,\ y) + E_\infty^*(f) \tag{63}$$

cu S aria mărginită de curba

$$x = r\varphi(\theta)$$
$$y = r\psi(\theta)$$

cu $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ și $0 \leqslant r \leqslant r_0$. În general $E_\infty^* \neq E_\infty$ și pentru soluțiile lui $E_\infty^* = 0$ avem o formulă de medie.

d) Nu este necesar ca să impunem restricția ca formulele (61) să definească o curbă închisă cînd $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Este clar că toate rezultatele rămîn valabile cînd (61) definesc arce de curbă, obținînd astfel formule de medie pentru valorile funcției pe acest arc de curbă. O curbă de acest tip, cu $K(\theta)$ rațional însă neperiodic, este cicloida.

12. *Formule de tip Green.* Am văzut că dacă $S_0(\theta)$ este un polinom trigonometric de gradul n cel puțin, avem

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int_0^{2\pi} S_0(\theta)\, f(x + r\cos\theta,\quad y + r\sin\theta)\,d\theta = E_n(f) \tag{64}$$

unde E_n este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul n, în x, y, omogenă cu coeficienții depinzînd de parametri introduși de $S_0(\theta)$. Ne propunem să cercetăm dacă există un șir de polinoame trigonometrice $S_i(\theta)$ astfel încît să avem

$$\lim_{r\to 0}\left[\int_0^{2\pi} U\left[\frac{1}{r^{n-1}}S_1(\theta)\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^{n-2}}S_2(\theta)\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\ldots+\frac{1}{r}S_{n-1}(\theta)\frac{\partial^{n-1}V}{\partial r^{n-1}}\right]d\theta-\right.$$

$$\left.-\int_0^{2\pi} V\left[\frac{1}{r^{n-1}}S_1(\theta)\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^{n-2}}S_2(\theta)\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\ldots+\frac{1}{r}S_{n-1}(\theta)\frac{\partial^{n-1}U}{\partial r^{n-1}}\right]d\theta\right]=$$

$$=UE_n(V)-VE_n(U) \tag{65}$$

unde am notat

$U=U(r+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta)$ și $V=V(x+r\sin\theta,\ y+r\cos\theta)$.

Dacă punem

$$A^i_{k,h}=\int_0^{2\pi} S_i(t)\cos^h\theta\sin^k\theta\,d\theta$$

obținem, anulînd coeficientul lui $\frac{\partial^q U}{\partial x^i\,\partial y^j}\cdot\frac{\partial^p V}{\partial x^k\,\partial y^h}$, condițiile

$$p\cdot A^1_{i+k,\,j+h}+p\,(p-1)\,A^2_{i+r,\,j+h}+\ldots+p!\,A^p_{i+k,\,j+h}=$$

$$=q\cdot A^1_{i+k,\,j+h}+q\,(q-1)\,A^2_{i+k,\,j+h}+\ldots+q!\,A^q_{i+k,\,j+h}, \tag{66}$$

unde $p+q\leqslant n$; $0\leqslant q\leqslant n-1$; $0\leqslant p\leqslant n-1$, $i+j=q$, $k+h=p$ și

$$\frac{1}{(n-1)!}A^1_{i,\,n-1}+\frac{1}{(n-2)!}A^2_{i,\,n-i}+\ldots+\frac{1}{1!}A^{n-1}_{i,\,n-1}=\frac{1}{n!}A^0_{i,\,n-i}$$

$$(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n) \tag{67}$$

Numărul relațiilor liniar independente din (66) este însă $2n+1$, deci în general, pot fi găsite polinoamele $S_i(\theta)$.

Pentru $n=4$, avem imediat condițiile din (66)

$p=1,\ q=0,\quad A^1_{1,0}=0;\quad A^1_{0,1}=0$

$p=2,\ q=0,\quad A^1_{2,0}+A^2_{2,0}=0;\quad A^1_{1,1}+A^2_{1,1}=0;\quad A^1_{0,2}+A^2_{2,0}=0$

$p=3,\ q=0,\quad 3A^1_{3,0}+6A^2_{3,0}+6A^3_{3,0}=0;\ 3A^1_{3\,3}+6A^2_{0,3}+6A^3_{0,3}=0$

$3A^1_{2,1}+6A^2_{2,1}+6A^3_{2,1}=0;\ 3A^1_{1,2}+6A^2_{1,2}+6A^3_{1,2}=0$

$p=3,\ q=1,\quad 3A^1_{i,4-i}+6A^2_{i,4-i}+6A^3_{i,4-i}=A^1_{i,4-i}$

și din (67)

$$\frac{1}{3!} A^1_{i,4-i} + \frac{1}{2!} A^2_{i,4-i} + \frac{1}{1!} A^3_{i,4-i} = \frac{1}{4!} A^0_{i,4-i}$$

ultima relație determină legătura între S_0 și S_1, S_2, S_3.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, ХАРАКТЕРИЗУЩИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ КОНЕЧНОГО ИЛИ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Вначале автор дает библиографические указания относительно основных результатов, полученных В. Бляшке, С. Саксом, Н. Чорэнеску, В. Ж. Триитцински, приведших его к настоящей работе.

В первой части показывается, что если Q_s $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p)$ есть произвольный полином степени s в координатах $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p)$ обычной точки на сфере Σ_p единичного радиуса p-мерного пространства, тогда можно располагать степенью s и параметрами, фигурирующими в Q_s так, чтобы

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{\Sigma_p} Q_s\ (\xi_1, \cdots, \xi_p)\ f\ (x_1 + r\xi_1, \cdots, x_p + r\xi_p)\ d\sigma_p = E_n(f),$$

где $f\ (x_1, \cdots, x_p)$ есть функция непрерывная вместе со своими производными вплоть до порядка n, определенная в области (D), содержащей сферу радиуса r с центром в $(x_1, \cdots, x_p)$, причем $E_n(f)$ является однородным уравнением с частными производными порядка n, коэффициенты которого зависят от коэффициентов Q_s.

Если $E_n\ (f) = 0$ есть произвольное однородное уравнение в частных производных порядка n от переменных $x_1, \cdots, x_p$ с постоянными коэффициентами, то можно всегда определить полином $Q_s\ (\xi_1, \cdots, \xi_p)$, такой что

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \int_{\Sigma_p} Q_s\ (\xi_1, \cdots, \xi_p)\ \frac{\partial^{n-1} f(x_1 + r\xi_1, \cdots, x_p + r\xi_p)}{\partial r^{n-1}}\ d\sigma_p = E_n(f)$$

Переходя из вещественной области в комплекную, в главе 6 автор показывает, что если $E_n(f) = 0$ представляет собой неоднородное уравнение в частных призводных n-го порядка в переменных $x_1, x_2, \cdots, x_s$ с постоянными коэффициентами

$$E_n\ (f) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_{m_1, \cdots, m_s} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{m_1}\ \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_s^{m_s}} = 0, \qquad \text{(a)}$$

то ему можно всегда сопоставить полином Фурье

$$S_n\ (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_s, r) = \sum_{\Sigma m_i = 0}^{n} \frac{m_1!\ m_2! \cdots m_s!}{r^{m_1+m_2+\cdots+m_s}}\, \alpha_{m_1, \cdots, m^{1\omega}}$$

$$\text{с } \omega = -i\ (m_1\theta_1 + m_2\theta_2 + \cdots m_s\theta_s),\ i = \sqrt{-1}$$

такой, чтобы для любого голоморфного решения уравнения (a) в (D) мы имели

$$\frac{1}{(2\pi)^s} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \cdots \int_0^{2\pi} S_n\ (\theta_1, \cdots, \theta_s, r)\ f\ (x_1 + re^{i\theta 1}, \cdots, x, + re^{i\theta s})\ d\theta_s = 0$$

при любом $r \neq 0$ таком, что точка $(x_1 + re^{i\theta_1}, \ldots, x_s + re^{i\theta s})$ остается целиком в (D).

Если S_n преобразуется в ряд Фурье, то тогда уравнение $E_n = 0$ с частными производными становится уравнением с частными производными бесконечного порядка. И обратно, показывается в дальнейшем что, таким образом, определенные в (D) голоморфные решения уравчения бесконечного порядка удовлетворяют такому интегральному соотношению. Данный факт приводит автора к выводу, что это соотношение характеризует голоморфные решения уравнения E_∞.

Рассматриваются и интегрируются несколько уравнений с частными производными бесконечного порядка, выведенных из ряда Тэйлора.

В главе II рассматривается плоская замкнутая кривая γ, параметрически определенная двумя равномерно сходящимися рядами Фурье, $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$, и интеграл $I(x, y; \gamma) = \int_0^{2\pi} f[x + \varphi(\theta),\ y + \psi(\theta)]\, d\theta$ с функцией $f(x, y)$, аналитической в области (D), содержащей (γ). Для аналитических решений уравнения с частными производными бесконечного порядка

$$E_\infty\ (f) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} \sum_{\substack{i,\, s = n \\ i+s=0}}^{n} \alpha_{ij} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i\, \partial y^i} \right]$$

с α_{ij} из (44), имеем $\frac{1}{2\pi} I(x, y; \gamma) = f(x, y)$. Если рассматривать E_∞ как предел последовательности уравнения E_n с

$$E_n = \sum_{k=0}^{m} \left[\frac{1}{k!} \sum_{i,j=0}^{k} \alpha_{ij} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i\, \partial y^j} \right],$$

то в результате получим, что при $\varepsilon > 0$ можно определить число N, такое, чтобы для всех аналитических решений $f(x, y)$, уравнения с

частными производными $E_n = 0$ $(n > N)$, было справедливо соотношение

$$\left| \frac{1}{2\pi} I(x, y; \gamma) - f(x, y) \right| < \varepsilon.$$

Далее определяются кривые (γ), для которых $ds = K(\theta)\, d\theta$ с тригонометрическим полиномом к (θ), и, таким образом, получаются формулы среднего гауссова типа (с единичным весом).

В последней главе исследуются условия получения формулы типа Сакса—Грина, данной теоремой S_2.

RELATIONS INTÉGRALES CARACTÉRISANT LES SOLUTIONS DE CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE FINI OU INFINI

(RÉSUMÉ)

Dans l'introduction, l'auteur donne des indications bibliographiques sur les principaux résultats obtenus par W. Blaschke, S. Saks, N. Ciorănescu, W. J. Tryitzinsky, point de départ de son travail.

Dans la première partie, il indique que si $Q_s(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ est un polynôme arbitraire de degré s des coordonnées $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ d'un point de la sphère Σ_p, de rayon égal à l'unité, de l'espace à p dimensions, on peut disposer du degré s, ainsi que des paramètres qui interviennent dans Q_s de sorte que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{\Sigma_p} Q_S(\xi_1, \ldots, \xi_p)\ f(x_1 + r\xi_1, \ldots, x_p + r\xi_p) d\delta_p = E_n(f),$$

où $f(x_1, \ldots, x_p)$ est une fonction continue, de même que ses dérivées, jusqu'à l'ordre n inclusivement, définie dans un domaine (D) qui contient la sphère de centre $(x_1, \ldots, x_p)$ et le rayon r, $E_n(f)$ étant une équation aux dérivées partielles, homogène, d'ordre n, dont les coefficients dépendent des coefficients de Q_S.

Si $E_n(f) = 0$ est une équation aux dérivées partielles d'ordre n, à coefficients constants, homogène et arbitraire, en $x_1, \ldots, x_p$ on peut toujours déterminer un polynôme $Q_S(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ tel que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \int_{\Sigma_p} Q_S(\xi_1, \ldots, \xi_p) \frac{\partial^{n-1} f(x_1 + r\xi_1, \ldots, x_p + r\xi_p)}{\partial r^{n-1}} d\sigma_p = E_n(f).$$

Dans le chapitre 6, passant du domaine réel au domaine complexe, l'auteur montre que si $E_n(f) = 0$ est une équation aux dérivées partielles, non-homgène, à coefficients constants d'ordre n des variables $x_1, x_2, \ldots, x_S$.

$$E_n(f) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_{m_1, \ldots, m_S} \frac{\partial^p f}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_s^{m_s}} = 0. \qquad (a)$$

On peut toujours lui associer un polynôme de Fourier

$$S_n(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, r) = \sum_{\Sigma m_i = 0}^{n} \frac{m_1 ! m_2 ! \ldots m_s !}{r^{m_1+m_2+\ldots m_s}} \alpha_{m_1, \ldots, m_s} \exp \omega$$

avec

$$\omega = -i \ (m_1\theta_1 + m_2\theta_2 + \ldots + m_s\theta_s), \quad i = \sqrt{-1}$$

et tel que, pour toute solution holomorphe de l'équation (a), dans (D), on ait

$$\frac{1}{(2\pi)^s} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \ldots \int_0^{2\pi} S_n(\theta_1, \ldots, \theta_s, r) f(x_1 + re^{i\theta_1} \ldots, x_s + re^{i\theta_s}) \, d\theta_s = 0$$

quelque soit $r \neq 0$, de sorte que le point $(x_1 + re^{i\theta_1}, \ldots, x_s + re^{i\theta_s})$ ne sorte pas de (D).

Si S_n se transforme en une série de Fourier, l'équation $E_n = 0$ devient une équation aux dérivées partielles d'ordre infini. On montre ensuite que, inversement, les solutions holomorphes dans (D) de l'équation d'ordre infini, telle qu'elle vient d'être définie, vérifient la relation intégrale, ce qui permet de conclure que cette relation caractérise les solutions holomorphes de l'équation E_∞.

On considère quelques équations aux dérivées partielles d'ordre infini déduites de la série de Taylor et l'on intègre.

Dans le chapitre 11, l'auteur considère une courbe fermée plane, γ paramétriquement définie par deux séries de Fourier, $\varphi(\theta)$ et $\psi(\theta)$ uniformément convergentes, et l'intégrale

$$I(x, y, ; \gamma) = \int_0^{2\pi} (f[x + \varphi(\theta), y + \psi(\theta)] \, d\theta$$

avec $f(x, y)$ analytique, dans un domaine (D) qui contient (γ). Pour les solutions analytiques de l'équation aux dérivées partielles, d'ordre infini,

$$E_\infty (f) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n !} \sum_{\substack{i,j=0 \\ i,j=n}}^{n} \alpha_{ij} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \, \partial y^i} \right]$$

avec α_{ij} donnés par (44) on a $\frac{1}{2\pi} I(x, y; \gamma) = f(x, y)$. Si l'on considère E_∞ comme limite de la suite des équations E_n, avec

$$E_n = \sum_{k=i}^{n} \left[\frac{1}{k !} \sum_{i,j=0}^{k} \alpha_{ij} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \, \partial y^i} \right]$$

On trouve que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut déterminer un rang N tel que pour toutes les solutions analytiques $f(x, y)$, de l'équation aux dérivées partielles $E_n = 0$ $(n \geqslant N)$, l'on ait :

$$\left| \frac{1}{2\pi} I(x, y, ; \gamma) - f(x, y) \right| < \varepsilon$$

On détermine ensuite les courbes (γ) pour lesquelles $ds = K(\theta)\, d\theta\, K(\theta)$ étant un polynôme trigonométrique, et l'on obtient ainsi les formules de moyenne du type de Gauss (affectées de masses unités).

Dans le dernier chapitre, l'auteur étudie les conditions permettant d'obtenir une formule du type Saks-Green, donnée par le théorème S_2.

BIBLIOGRAFIE

1. O. Hölder, Mathematische Annalen, 1884, p. 184.
2. W. Blaschke, *Ein Mittelwertsatz und eine kennzeichnende Eigenschaft des logarithmischen Potentials.* Leipziger Berichte, 1916, vol. 63, p. 3
3. Stanislas Saks, *Note on Defining Properties of Harmonic Functions.* Bull. of Amer. Math. Soc. 1932, vol. 38, p. 380.
4. N. Ciorănescu, *Une propriété caractéristique des fonctions poly-harmoniques.* Buletinul Facultății de științe din Cernăuți, 1933, vol. VII, p. 105.
5. — *Sur quelques valeurs moyennes des fonctions et leurs applications.* Bull. Math. Soc. Roum. Sc. 1929, t. 31, nr. 2, p. 175.
6. W. J. Tryitzinsky, *Les laplaciens généralisés non sommables.* Journ Math. pures et appl., 1955, t. 34, p. 1.
7. N. Ciorănescu, *Quelques propriétés des fonctions polyharmoniques en fonctions poly-harmoniques en corrélation avec certaines propriétés des polynômes.* Mathematica 1933, vol. IX, p. 184.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VIII, nr. 1–2, 1957

O CLASĂ SPECIALĂ DE FUNCŢII MULTIFORME PE O SUPRAFAŢĂ RIEMANNIANĂ ÎNCHISĂ*)

DE

C. TELEMAN

Introducere

Fie R o suprafaţă riemanniană, în sensul lui Weyl [1], adică o varietate analitică complexă cu o dimensiune complexă. În această lucrare vom considera numai suprafeţe închise de gen $p > 0$.

Vrem să determinăm funcţiile analitice $h(p)$ pe R, care au următoarele proprietăţi:

1) prin prelungire analitică de-a lungul oricărui contur închis, fiecare ramură uniformă a funcţiei h suferă o transformare omografică;

2) transformarea $p \to h(p)$ definită de fiecare ramură uniformă a funcţiei h este local topologică;

3) funcţia h n-are alte singularităţi decît poluri.

Din condiţia 2) rezultă că polurile funcţiilor h sînt simple şi dacă p este un punct ordinar al unei ramuri uniforme h_0 şi τ un uniformizator local al punctului p, atunci avem $\frac{dh_0}{d\tau} \neq 0$ în p.

Pe orice suprafaţă R există cel puţin o funcţie h: într-adevăr, funcţiile w, care fac reprezentarea conformă a suprafeţei universale de acoperire $\tilde{R}$ a lui R, pe planul finit (w) dacă $p = 1$, sau pe cercul unitate $|w| < 1$ dacă $p > 1$, au proprietăţile 1), 2), 3).

Această lucrare este în legătură cu o comunicare pe care am făcut-o la cel de al IV-lea Congres al matematicienilor romîni **); cu această ocazie, am primit indicaţii utile de la prof. D. Barbilian şi Gh. Vrănceanu şi ulterior, de la prof. G. de Rham, Pfluger şi S. Stoilov, care mi-au atras atenţia asupra unor erori.

Îmi exprim aici sentimentele de recunoştinţă pentru interesul pe care mi l-au arătat.

---

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 29 decembrie 1956.

**) În comunicarea prezentată la acest Congres am arătat că fiecărei suprafeţe riemaniene R, dotată cu conexiune conformă local euclidiană, i se poate asocia un spaţiu riemannian V_3, cu metrică nedifinită. Punctele spaţiului V_3 fiind cercurile suprafeţei R.

În această lucrare arătăm cum se poate reduce determinarea funcțiilor h pe o suprafață riemanniană R, la determinarea formelor diferențiale pătratice regulate pe R.

Studiem apoi aceste forme pătratice, presupunînd că R este suprafața riemanniană a unei funcții algebrice și demonstrăm următoarea.

T e o r e m ă. *Pe o suprafață R de gen 1 există o formă diferențială regulată A care este pătratul unei diferențiale abeliene de prima specie. Orice altă formă pătratică regulată pe R este de forma cA^2, c fiind o constantă. Pe o suprafață de gen $p > 1$, numărul formelor pătratice liniar independente este $3p - 3$.*

Această teoremă mi-a fost indicată de prof. de R h a m și se poate demonstra direct, utilizînd teorema lui Riemann-Roch pe o suprafață riemanniană abstractă, de gen $p > 1$. Demonstrația ce mi-a fost indicată de prof. de R h a m este următoarea: orice diferențială pătratică, pe suprafața R, se poate pune sub forma fA^2, unde A este o diferențială abeliană de prima specie fixă, iar, f o funcție meromorfă avînd polurile printre zerourile lui A. Dar A are $2p - 2$ zerouri și deci f nu poate avea ca poluri decît aceste $2p - 2$ puncte, cu cel mult ordinul 2. Teorema lui Riemann-Roch ne arată atunci că numărul funcțiilor f liniar independente este $2(2p - 2) + 1 - p = 3(p - 1)$.

Prof. de R a h m îmi indică de asemenea două lucrări, în care sînt considerate diferențialele pătratice: T e i c h m ü l l e r (Deutsche Mathematik, Jahrgang, vol. 6, p. 260 și 264) și A h l f o r s (Journal de Tel-Aviv). Dar n-am avut posibilitatea să consult aceste lucrări, așa că am consacrat un capitol special determinării diferențialelor pătratice pe suprafața riemanniană a unei curbe algebrice; aceste considerații m-au condus la determinarea funcțiilor h ca integrale ale anumitor ecuații diferențiale algebrice de ordin $3p$.

Funcțiile h pe o suprafață riemanniană R definesc conexiuni conforme local euclidiene; invers, fiecărei conexiuni conforme local euclidiene pe R îi putem asocia o funcție h, definită abstracție făcînd de o transformare homografică. Deci: *conexiunile conforme local euclidiene, definite pe o suprafață R de gen $p > 1$ depind de $3p - 3$ constante complexe arbitrare*

Funcțiile h pe o suprafață de gen 1 se deduc din integrala abeliană w printr-o transformare homografică, aplicată lui w sau lui e^w.

I. Reducerea studiului funcțiilor h la studiul formelor diferențiale pătratice regulate

Fie p un punct al suprafeței R și τ un uniformizator al lui p, valabil într-o vecinătate simplu conexă Δ a lui p. Dacă h_0 este o ramură uniformă în Δ a unei funcții h, schwarzianul

$$\{h_0\}_\tau = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tau^2}\log\frac{dh_0}{d\tau} - \frac{1}{4}\left(\frac{d}{d\tau}\log\frac{dh_0}{d\tau}\right)^2, \qquad (1)$$

nu se schimbă dacă înlocuim pe h_0 cu orice altă ramură a funcției h în Δ, conform proprietății 1).

Pe de altă parte, dacă înlocuim uniformizatorul τ cu altul $k = k(\tau)$, avem [2],

$$-\{k\}_\tau = \{h\}_k \left(\frac{dk}{d\tau}\right)^2 - (h)_\tau . \tag{2}$$

Formula (2) se mai poate scrie

$$\{h\}_k\, dk^2 = \{h\}_\tau\, d\tau^2 - \{k\}_\tau\, d\tau^2. \tag{3}$$

Să presupunem că uniformizatorul k este o ramură uniformă în Δ a unei funcții k ce verifică proprietățile 1), 2) și 3). Dacă Δ este suficient de mic, orice ramură a funcției h sau a funcției k poate fi luată drept uniformizator în Δ și putem considera schwarzianul $(k)_h$; din formula (3) rezultă că avem

$$-\{h\}_k\, dk^2 = +\{k\}_h\, dh^2 \tag{4}$$

și rezultă de aici că forma pătratică (4) nu se schimbă dacă înlocuim pe h sau k prin niște transformate omografice ale lor, deci nu se schimbă în particular dacă înlocuim ramurile h, k prin orice alte ramuri din Δ ale acestor funcții.

Din relațiile (3) și (1) și din condiția (2) rezultă că forma pătratică definită de oricare din cei doi membrii ai relației (4) este regulată pe toată suprafața R. Vom nota forma $\{h\}_k\, dk^2$ cu $h \circ k$.

În rezumat, avem următoarea :

Teoremă. *Dacă h, k sînt două funcții ce verifică condițiile 1), 2), 3), le putem asocia în mod univoc o formă pătratică diferențială $h \circ k$, regulată pe toată suprafața R. Avem $h \circ k = -k \circ h$ și expresia formei $h \circ k$ în raport cu uniformizatorul τ al unui punct $p \in R$ este dată de formula* (3).

Vrem să demonstrăm acuma proprietatea inversă :

Fiind dată o formă diferențială pătratică ω, regulată pe R și o funcție k verificînd condițiile 1), 2) și 3), există o funcție h astfel încît să avem

$$h \circ k = \omega \tag{5}$$

și funcția h este determinată abstracție făcînd de o transformare omografică.

Într-adevăr, să acoperim suprafața R cu domenii Δ_i simplu conexe, astfel ca în fiecare domeniu Δ_i ramurile funcției k să fie univalente, deci să poată fi luate drept uniformizatori, ceea ce este posibil după condiția 2). Fie Δ unul din aceste domenii Δ_i, k_0 o ramură a funcției k în Δ și

$$\omega = \Omega(k_0)\, dk^2{}_0 \tag{6}$$

expresia formei ω în raport cu uniformizatorul k_0.

Relația (5) ne dă ecuația

$$\{h\}_{k_0} = \Omega(k_0),$$

care are soluția

$$h = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \tag{7}$$

φ_1, φ_2 fiind două soluții liniar independente ale ecuației

$$\varphi'' = \Omega(k_0)\,\varphi, \qquad \left(\varphi'' = \frac{d^2\varphi}{dk_0^2}\right). \tag{8}$$

Ecuațiile (7), (8) ne dau o soluție $h(k_0)$ regulată în Δ, deci o funcție $h(p)$ în Δ, $(p \in \Delta)$.

Fie acum q un punct oarecare din R, interior sau exterior domeniului Δ și p un punct din Δ. Putem efectua prelungirea analitică a funcției $h(p)$ de-a lungul oricărui drum γ ce unește punctele p, q. Într-adevăr, putem împărți drumul γ în arce partiale $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, astfel ca orice punct de pe γ să fie interior cel puțin unui γ_i și astfel ca fiecare arc γ_i să poată fi cuprins într-un domeniu simplu conex $\Delta_{i'}$. Prelungind prin continuitate ramura k_0 de-a lungul drumului γ, obținem un uniformizator k_0 în fiecare domeniu $\Delta_{i'}$ și ecuația (8) se poate integra în aceste domenii $\Delta_{i'}$, astfel ca soluțiile φ_1, φ_2 să se racordeze în mod continuu. Ecuația (7) ne dă atunci prelungirea analitică a funcției h de-a lungul drumului γ

Obținem astfel o funcție h definită pe toată suprafața R și această funcție este multiformă. Funcția h verifică evident condițiile 2) și 3) și verifică de asemenea și condiția 1); într-adevăr, fie k_0 o ramură a funcției k într-un domeniu Δ și h_1, h_2 două ramuri ale funcției h în acest domeniu. Deoarece avem

$$\{h_1\}_{k_0} = \{h_2\}_{k_0} = \Omega(k_0),$$

rezultă că între h_1 și h_2 există o corespondență omografică

$$h_2 = \frac{\alpha h_1 + \beta}{\gamma h_1 + \delta}.$$

Cu aceasta totul este demonstrat și rezultă că determinarea funcțiilor h se reduce la determinarea unei funcții h particulare și la constructia formelor diferențiale pătratice. regulate pe R. Deoarece putem lua pentru această funcție particulară funcția w considerată în Introducere, problema se reduce la determinarea formelor diferențiale pătratice pe R.

Prof. de R h a m mi-a sugerat ideea de a determina prin aceste considerații funcția w.

II. Determinarea formelor diferențiale pătratice pe o suprafață riemanniană închisă

În acest paragraf vom presupune că R este suprafața riemanniană a unei funcții algebrice $u(z)$, [3], definită de o ecuație algebrică

$$F(z, u) = 0 \tag{9}$$

și vom reface, cu mici modificări, raționamentele făcute de G o u r s a t și A p p e l l în [4] pentru determinarea integralelor abeliene de prima specie pe o suprafață riemanniană.

Pentru aceasta vom presupune că ecuația (9) definește o curbă algebrică ce nu are alte singularități decît puncte duble cu tangente distincte. Dacă

n-ar fi așa, ne putem reduce la acest caz, după teorema lui Nöther, printr-o transformare birațională convenabilă.

Atunci, dacă p este genul curbei (9) și d, m numărul punctelor duble respectiv gradul acestei curbe, avem

$$d = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - p. \tag{10}$$

Vom mai presupune că ecuația (9) verifică următoarele proprietăți:

a) Punctele de la infinit ale curbei (9) sînt toate distincte, deci în număr de m, și distincte de punctul de la infinit al axei $z = 0$;

b) Punctele de ramificație ale funcției $u(z)$ dată de ecuația (9) sînt toate de ordinul întîi și distincte de punctele duble; deci tangentele curbei (9) paralele cu axa $z = 0$ nu sînt staționare;

c) Tangentele curbei (9) paralele cu axa $z = 0$ nu sînt multiple, deci ating curba într-un singur punct, și nu conțin puncte duble.

Dacă ecuația (9) n-ar verifica aceste condiții, putem face o transformare proiectivă convenabilă a planului (z, u), astfel încît curba transformată să le verifice, deci nu micșorăm generalitatea dacă facem ipotezele *a*), *b*), *c*). Aceste ipoteze vor simplifica mult calculele ce urmează.

Dacă R este suprafața riemanniană a funcției $u(z)$, orice diferențială pătratică pe R se poate pune sub forma

$$\omega = \theta(z, u)\, dz^2. \tag{11}$$

Alegînd un uniformizator τ într-un punct oarecare $p = (z_0, u_0)$ al lui R, deci astfel încît să avem pentru u și z dezvoltări tayloriene sau de tip Laurent polare, în jurul lui p, în raport cu τ, trebuie să obținem din (11) o diferențială pătratică regulată în raport cu τ, deci

$$\omega = \Omega(\tau)\, d\tau^2, \quad (\Omega \text{ holomorfă în } \tau = 0), \tag{12}$$

unde funcția $\Omega(\tau)$ este dată de

$$\Omega(\tau)\left(\frac{d\tau}{dz}\right)^2 = \theta(z, u); \tag{13}$$

uniformizatorul τ fiind o funcție regulată $f(z, u)$ de z și u și deoarece avem

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{df}{dz} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial u}\frac{F'_z}{F'_u}, \tag{14}$$

rezultă că $\theta(z, u)$ este o funcție uniformă pe R ce nu are alte singularități decît poluri, deci $\theta(z, u)$ *este o funcție rațională de* z și u.

Trebuie să găsim funcțiile raționale $\theta(z, u)$ astfel încît înlocuind în (11) variabilele z, u prin expresiile lor în raport cu diferiții uniformizatori τ de pe R, să obținem forme (12) regulate în τ.

Din ipoteza *a*) rezultă că $z' = \frac{1}{z}$ poate fi luat ca uniformizator în jurul fiecăruia din punctele lui R ce se proiectează la infinit și că ramurile

funcției u în jurul punctului $z = \infty$ sînt în număr de m și au dezvoltări de forma

$$u_i = c_i z + \alpha_i + \frac{\beta_i}{z} + \ldots, (i = 1, 2, \ldots, m),$$

unde $c_i \neq 0$. Pentru ca forma

$$\theta(z, u)\, dz^2 = \theta(z, u)\, z^4\, dz'^2$$

să fie regulată pentru $z' = 1/z = 0$, *trebuie ca funcția* $\theta(z, u)$ *să fie cel puțin de ordinul lui* $1/z^4$ *pentru valorile lui* z *vecine cu punctul* $z = \infty$.

Funcția $\theta(z, u)$ trebuie să fie regulată în jurul fiecărui punct (z, u), care nu este de ramificație, deoarece într-un astfel de punct putem alege variabila z ca uniformizator local. Deci, *singurele poluri ale funcției raționale* $\theta(z, u)$ *sînt punctele de ramificație ale funcției* u *dată de* (9).

Dacă (a, b) este un punct de ramificație, putem lua ca uniformizator local în acest punct, după b), parametrul τ dat de expresia

$$z - a = \tau^2$$

și atunci avem

$$\theta(z, u)\, dz^2 = 4\theta(z, u)\, \tau^2\, d\tau^2 = 4\theta(z, u).\ (z - a)\, d\tau^2,$$

de unde rezultă că, *într-un punct de ramificație* (a, b), *funcția* $\theta(z, u)$ *are un pol de ordin întreg sau fracționar, cel mult egal cu* 1 *în raport cu* $1/z - a$.

Fie $u_1, u_2, \ldots, u_m$ cele m determinări ale funcției u într-un punct z și să considerăm funcțiile

$$P^k = u_1^k \theta(z, u_1) + \ldots + u_m^k \theta(z, u_m), \qquad (15)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, m - 1);$$

aceste funcții fiind raționale în z, $u_1 \ldots, u_m$ și simetrice în raport cu $u_1, \ldots, u_m$, se reduc la niște funcții $P^k(z)$, raționale în z. Pentru valori ale lui z tinzînd către ∞, u_i^k sînt de ordinul lui z^k, iar θ este de ordinul lui $z^{-4-\lambda}$ $(\lambda \geqslant 0)$, deci *la infinit funcțiile* $P^{(k)}(z)$ *sînt de ordinul lui* $z^{k-4-\lambda}$ $(\lambda \geqslant 0)$.

Pe de altă parte, $P^k(z)$ n-au alte poluri la distanță finită decît în punctele de ramificație $a_1, a_2, \ldots, a_r$ deoarece funcția $\theta(z, u)$ însăși n-are alte poluri în afara punctelor de ramificație și cum aceste poluri sînt cel mult de ordinul 1, rezultă că *punctele* $a_1, a_2, \ldots, a_r$, *în care se proiectează punctele de ramificație ale suprafeței* R, *sînt poluri simple ale funcțiilor* $P^{(k)}(z)$.

De aici rezultă că avem relații de forma

$$P^{(k)}(z) = \frac{\pi_{k+r-4}(z)}{(z - a_1) \ldots (z - a_r)}, \qquad (16)$$

π_{k+r-4} fiind un polinom în z de gradul $k + r - 4$, iar r fiind numărul punctelor de ramificație, deci

$$r = 2(m + p - 1), \qquad (17)$$

așa cum rezultă din formula lui Riemann [4] și din ipoteza b).

Relațiile (15), în care ținem seama de (16), ne permit să determinăm necunoscutele $\theta(z, u_1), \ldots, \theta(z, u_m)$ și pentru aceasta vom folosi un rezultat din [4]*), anume că soluția sistemului (15) este dată de expresia

$$\theta(z, u_i) = \frac{P^{(2)}(z) B_{m-3}(z,u_i) + P^{(3)}(z) B_{m-4}(z, u_i) + \ldots + P^{(m-1)}(z) B_0}{F'_u(z, u_i)}, \quad (18)$$

unde $B_k(z, u)$ sînt polinoame de gradul k în z și u. Din formulele (16) și (18) rezultă că *avem*

$$\theta(z,u) = \frac{T(z, u)}{(z - a_1) \ldots (z - a_r) F'_u(z, u)}, \quad (19)$$

unde $T(z, u)$ este un polinom în z, u de gradul

$$g = m + r - 5. \quad (20)$$

Dacă polinomul T, de grad g, este oarecare, forma (11) cu $\theta(z, u)$ dat de (19), are singularități cel mult în punctele duble ale curbei (9) și în punctele (z, u), pentru care $z = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Rămîne să determinăm polinoamele $T(z, u)$ astfel încît aceste singularități să se elimine.

Într-un punct dublu (α, β) putem lua, conform condițiilor impuse ecuației (9), variabila $z - \alpha$ ca uniformizator local, iar ecuația (9) se scrie

$$F(z, u) \equiv \rho [u - \beta - k_1 (z - \alpha)] [u - \beta - k_2 (z - \alpha)] + \ldots = 0,$$

unde $\rho \neq 0$, $k_1 \neq k_2$ sînt constante și am neglijat termenii de ordinul 3 cel puțin în $(z - \alpha)$, $(u - \beta)$. Avem, deci, în jurul punctului dublu (α, β):

$$F'_u(z, u) = \begin{cases} \rho (k_1 - k_2)(z - \alpha) + \ldots \\ \rho (k_2 - k_1)(z - \alpha) + \ldots \end{cases}$$

după cum considerăm una sau alta, din cele două ramuri ale curbei, ce trec prin punctul (α, β). Cum avem $\rho \neq 0$, $k_1 \neq k_2$, rezultă că avem în orice caz

$$\frac{z - \alpha}{F'_u(z, u)} = \text{funcție regulată în jurul punctului } (\alpha, \beta)$$

deci *forma* (11) *este regulată în punctele duble ale curbei* (9) *dacă ecuația*

$$T(z, u) = 0 \quad (21)$$

este verificată în aceste puncte, condiția fiind necesară și suficientă.

Într-un punct de ramificație (a_i, b_i), avem uniformizatorul τ dat de expresia

$$z - a_i = \tau^2$$

*) p. 301 – 302.

și deci, ținînd seama că avem $dz/F'_u = -du/F'_z$, putem scrie

$$\theta(z, u)\, dz^2 = \frac{dz}{F'_u} \frac{T(z, u)}{(z - a_1) \ldots (z - a_r)}\, dz =$$

$$= -\frac{du}{d\tau} \frac{2}{F'_z (z - a_1) \ldots (z - a_{i-1})(z - a_{i+1}) \ldots (z - a_r)} \cdot \frac{T(z, u)}{\tau}\, d\tau^2.$$

În punctul (a_i, b_i) avem $F'_z \neq 0$, $du/d\tau \neq 0$ și din relația precedentă se vede că pentru ca forma (11) să fie regulată în acest punct, *este necesar și suficient ca punctul* (a_i, b_i) *să se găsească pe curba* (21).

Să considerăm, în sfîrșit, un punct $(a_i, b \neq b_i)$, care nu este de ramificație ; în acest punct, $z - a_i$ este un uniformizator și pentru ca forma (11) să fie regulată în punctul (a_i, b), *este necesar și suficient ca acest punct să se găsească pe curba* (21).

În rezumat, avem următoarea

T e o r e m ă. *Formele diferențiale pătratice regulate pe suprafața riemanniană a curbei* (9) *sînt date de expresia*

$$\omega = \frac{T(z, u)\, dz^2}{(z - a_1) \ldots (z - a_r) F'_u (z, u)}, \tag{22}$$

unde $T(z, u)$ *este un polinom de grad* $g = m + r - 5$, *astfel încît curba* $T(z, u) = 0$ *să treacă prin punctele duble, punctele de ramificație și prin punctele situate pe tangentele în punctele de ramificație ale curbei* (9).

Să presupunem că ecuația (9) este de gen $p = 1$; putem atunci presupune că această ecuație reprezintă o cubică fără punct dublu, deci avem $m = 3$, $d = 0$, $r = 6$, $g = 4$, deci ecuația (21) reprezintă o cuartică. Cum numărul punctelor de ramificație ale funcției $u(z)$ și al punctelor curbei (9) situate pe tangentele în punctele de ramificație este egal cu 12, rezultă că toate cuarticile (21) trebuie să treacă prin 12 puncte fixe ale cubicei (9), care formează intersecția completă a cubicei cu fiecare din aceste cuartice.

În general, 12 puncte pe o cubică sînt situate numai pe cuartici ce se descompun în acea cubică și o dreaptă [6]. Dacă acest lucru ar avea loc pentru cuarticele (21), formele (22) ar fi identic nule pe R, dar aceasta nu se poate întîmpla, deoarece suprafața R este un tor pe care avem o formă regulată $\omega = A^2$, A fiind o diferențială abeliană de prima specie pe R.

Deci cele 12 puncte prin care trec cuarticile (21) sînt situate efectiv pe cuartici ce nu conțin cubica (9). Rezultă, [6], că aceste 12 puncte impun polinoamelor $T(z, u)$ numai 11 condiții liniar independente.

Fie $T_0(z, u)$ un polinom de gradul 4 care verifică aceste condiții. Polinoamele

$$\rho\, T_0(z, u) + (\alpha z + \beta u + \gamma) F(z, u) \tag{23}$$

au aceeași proprietate și depind de patru constante arbitrare ρ, α, β, γ, care este tocmai numărul de constante arbitrare de care depind polinoamele $T(z, u)$ ce trec prin cele 12 puncte, deoarece avem 11 relații

liniare și omogene între 15 coeficienți. Pe de altă parte, pe curba $F(z, u) = 0$, polinomul (23) este egal cu polinomul $\rho T_0(z, u)$, deci dacă ω este o formă diferențială pătratică regulată pe R, toate celelalte forme sînt de forma $\rho\omega$, ρ fiind o constantă. Deci :

Numărul formelor diferențiale pătratice regulate, liniar independente, pe o suprafață de gen 1 *este* 1.

Să considerăm acuma cazul cînd ecuația (9) este de gen $p > 1$. Polinoamele $T(z, u)$ conțin

$$\frac{(g+1)(g+2)}{2} = \frac{(m+r-3)(m+r-4)}{2}$$

coeficienți, ce trebuie să verifice

$$d + r(m-1) = \frac{(m-1)(m-2+2r)}{2} - p$$

ecuații liniare și omogene, dintre care s-ar putea întîmpla să nu fie toate independente ; vom vedea însă mai tîrziu că aceste ecuații sînt independente.

Deocamdată putem afirma că polinoamele $T(z, u)$ depind de cel puțin

$$\frac{(m+r-3)(m+r-4)}{2} - \frac{(m-1)(m-2+2r)}{2} + p$$

coeficienți independenți. Dar noi trebuie să considerăm numărul polinoamelor $T(z, u)$ independente modulo $F(z, u)$, adică să considerăm identice două polinoame $T(z, u)$ a căror diferență este de forma

$$P(z, u).F(z, u),$$

$P(z, u)$ fiind un polinom arbitrar de gradul $r - 5$. Polinoamele $P(z, u)$ depinzînd de

$$\frac{(r-3)(r-4)}{2}$$

coeficienți, rezultă că polinoamele $T(z, u)$, distincte modulo $F(z, u)$, depind cel puțin de

$$\frac{(m+r-3)(m+r-4)}{2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} - r(m-1) + p - \frac{(r-3)(r-4)}{2} =$$

$$= r - 2m - 1 + p = 3p - 3$$

constante.

Deci :

Numărul formelor ω *liniar independente pe o suprafață de gen* p *este de cel puțin* $3p - 3$.

Vrem să arătăm că acest număr nu este depășit. Pentru aceasta, să considerăm un polinom $T_0(z, u)$ de gradul $g = m + r - 5$, care să

treacă prin punctele duble, de ramificație, și prin punctele situate pe tangentele în punctele de ramificație ale curbei $F(z, u) = 0$. În afara acestor puncte, curba $T_0(z, u) = 0$ mai taie curba $F(z, u) = 0$ în

$$\nu = m(m + r - 5) - 2d - r(m - 1) = m^2 - 5m -$$

$$- [(m - 1)(m - 2) - 2p] + 2(m + p - 1) = 4(p - 1)$$

deci în

$$\nu = 4(p - 1) \tag{24}$$

puncte, pe care să le notăm cu $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$.

Prin aceste ν puncte nu trece nici o curbă adjunctă de gradul $m-3$ a ecuației (9) [4] *).

Fie atunci $T(z, u)$ un polinom oarecare ce se anulează în punctele duble, de ramificație, și care sînt situate pe tangentele de ramificație ale curbei (9). Expresia

$$R(z, u) = \frac{T(z, u)}{T_0(z, u)}$$

este atunci o funcție rațională pe suprafața R ce are poluri *simple* cel mult în punctele $p_1, \ldots, p_\nu$. După teorema lui Riemann-Roch [4] **), funcțiile raționale ce au această proprietate depind de

$$\nu - p + \sigma + 1 = \nu - p + 1 = 3(p - 1)$$

parametri, deci funcțiile $R = T / T_0$ depind cel mult de $3(p - 1)$ constante arbitrare. Polinomul T_0 fiind fix, rezultă că polinoamele T depind cel mult de $3(p - 1)$ constante arbitrare, dacă considerăm identice două polinoame T a căror diferență e nulă pe $F(z, u) = 0$.

În rezumat avem următoarea

T e o r e mă. *Numărul formelor diferențiale pătratice, regulate pe o suprafață riemanniană de gen $p > 1$, liniar independente, este exact* $3p - 3$.

Curbele $T(z, u) = 0$, care trec prin cele $d + r(m - 1)$ puncte ale curbei $F(z, u) = 0$, definite de ecuațiile

$$F(z, u) = 0, (z - a_1) \ldots (z - a_\tau) F'_u(z, u) = 0$$

au, față de formele pătratice ω, un rol analog aceluia pe care-l au *curbele adjuncte* de gradul $m - 2$, asociate curbei $F(z, u) = 0$, față de diferențialele abeliene.

Am văzut că fiecare din curbele $T(z, u) = 0$ mai intersectează curba $F(z, u) =$ încă în $\nu = 4(p - 1)$ puncte. Pentru ca un grup de ν puncte pe curba $F(z, u) = 0$ să fie situate pe o curbă $T(z, u) = 0$, trebuie ca cele ν puncte să satisfacă la p relații, deoarece am văzut că dimensiunea fasciculului format de curbele $T(z, u) = 0$ este egală cu $3p - 4$.

*) p. 379.
**) p. 378.

Rezultă de asemenea că *numărul zerourilor unei forme pătratice* ω *este egal cu* $4p - 4$.

Vrem să facem acum unele observații cu privire la relațiile dintre formele diferențiale pătratice și diferențialele abeliene.

Este clar că dacă

$$A_1, A_2, \ldots, A_p$$

sînt p diferențiale abeliene de prima speță, liniar independente, pe suprafața R, atunci orice combinație pătratică a lor

$$\omega = \sum_{i,j} c_{ij} A_i A_j \tag{25}$$

cu coeficienți c_{ij} constanți, este o formă diferențială pătratică regulată pe R. Din teorema precedentă rezultă că numărul combinațiilor (25) liniar independente este cel mult 3 $(p - 1)$, deci *diferențialele abeliene de prima specie nu sînt pătratic independente*, adică verifică relații de forma $\sum_{i,j} c_{ij} A_i A_j = 0$.

Vom arăta acum că numărul combinațiilor (25) liniar independente este în general mai mic decît 3 $(p - 1)$.

Într-adevăr, să considerăm o ecuație algebrică de genul p de tip hipereliptic :

$$u^2 = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_{2p+2}). \tag{26}$$

Se știe [3] *) că diferențialele abeliene de prima specie atașate ecuației (26) sînt de forma

$$A = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 z + \ldots + \lambda_p z^{p-1}}{u} dz, \quad (\lambda_i = \text{constante})$$

deci combinațiile (25) sînt de forma

$$\omega_0 = \frac{P_{2p-2}(z)}{(z - z_1) \ldots (z - z_{2p+2})} dz^2,$$

P_{2p-2} fiind un polinom de grad cel mult $2p - 2$, ce depinde deci de $2p - 1$ *constante arbitrare.*

Pe de altă parte, se poate arăta, urmînd o cale analogă cu cea din [4] **), că expresia generală a formelor diferențiale pătratice regulate asociate ecuației (26) este ***)

$$\omega = \frac{P_{2p-2}(z)}{u^2} + \frac{Q_{p-3}(z)}{u} dz^2, \tag{27}$$

*) p. 62 — 63.
**) p. 61 — 63.
***) Această expresie mi-a fost indicată de prof. de R h a m.

deci $\omega = \omega_0 + \frac{Q_{p-3}(z)}{u} dz^2$, $Q_{p-3}(z)$ fiind un polinom de grad cel mult $p - 3$ în z, ce depinde de $p - 2$ constante arbitrare. Formele (27) depind deci de $3p - 3$ constante arbitrare, ceea ce constituie o verificare a teoremei de la pag. 172.

Forma

$$\frac{Q_{p-3}(z)}{u} dz^2$$

nu este o combinație de forma (25), deci :

Pe suprafețele R de tip hipereliptic există forme diferențiale pătratice ce nu sînt combinații pătratice cu coeficienții constanți de diferențiale abeliene de prima specie.

Să considerăm acuma o curbă $F(z, u) = 0$ de gradul m, fără puncte multiple ; avem deci $d = 0$, $p = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$, $r = m(m-1)$. Diferențialele abeliene de prima specie sînt date de formula

$$A = \frac{Q(z, u)}{F'_u(z, u)} dz,$$

unde $Q(z, u)$ este un polinom oarecare în z, u, de gradul $m - 3$. Cea mai genarală combinație pătratică (25) este de forma $\omega_0 = \frac{P(z, u)}{[F'_u(z, u)]^2} dz^2$, unde $P(z, u)$ este un polinom oarecare de grad cel mult $2(m - 3)$. Numărul formelor ω_0 liniar independente este $N = 2m^2 - 9m + 10$; dar trebuie să identificăm două polinoame $P(z, u)$ a căror diferență este un polinom de forma $F(z, u)$. $P_1(z, u)$, $P_1(z, u)$ fiind un polinom de grad cel mult $m - 6$; polinoamele $F(z, u)$. $P_1(z, u)$ depind de $\frac{(m^2 - 9m + 20)}{2} = n$ constante arbitrare. Deci formele ω_0, independente mod. $F(z, u)$, depind de $N - n = 3m(m - 3)/2 = 3(p - 1)$ constante arbitrare. Dar am văzut că acesta este numărul formelor pătratice asociate curbei $F(z, u) = 0$. Deci : *Pe suprafața riemanniană a unei curbe algebrice ce nu are puncte multiple, orice diferențială pătratică ω este o combinație pătratică cu coeficienți coustanți de diferențiale abeliene de prima specie.*

III. Determinarea funcțiilor h ale unei suprafețe riemanniene închise

Utilizînd rezultatele din paragrafele precedente, vom arăta acum că *funcțiile h ale suprafeței riemanniene R, asociate unei curbe algebrice de gen $p > 1$, sînt integralele unei ecuații diferențiale algebrice de ordinul $3p$.*

Într-adevăr, să considerăm o curbă algebrică, care prin transformări biraționale convenabile, a fost adusă la forma normală definită în paragraful precedent.

Fie h_0 o funcție h, fixă, pe suprafața R. Putem presupune că am acoperit suprafața R cu un număr finit de vecinătăți simplu conexe, astfel

ca fiecare ramură a funcției h să fie uniformă și univalentă în aceste vecinătăți, deci să poată fi luată drept uniformizator local. Vom nota cu τ uniformizatorii locali obținuți luînd în fiecare vecinătate una oarecare din ramurile uniforme ale funcției h_0.

Fie acum h o funcție oarecare, avînd proprietățile 1), 2), 3) din Introducere. Am arătat că forma pătratică

$$\omega = \{h\}_\tau \, d\tau^2 \tag{28}$$

este regulată pe suprafața R și nu depinde de alegerea uniformizatorilor τ printre ramurile uniforme ale funcției h_0.

Dacă alegem acum drept coordonată pe suprafața R variabila z, așa cum am făcut în paragraful II, obținem pentru forma ω o expresie de forma

$$\omega = \theta(z, u)\, dz^2, \tag{29}$$

unde $\theta(z, u)$ este o funcție rațională de z, u, de forma

$$\theta(z, u) = \frac{T(z, u)}{(z - a_1) \ldots (z - a_r) F'_u(z, u)} \tag{29'}$$

și are următoarele proprietăți :

α) La infinit este ordinul lui $z^{-4-\lambda}$, $(\lambda \geqslant 0)$;

β) Este regulată în punctele ordinare ale curbei (9) ;

γ) În punctele de ramificație (a_i, b_i) are poluri cel mult de primul ordin în $(z - a_i)$.

Să considerăm acum forma diferențială pătratică

$$\{h\}_z \, dz^2 = H(z, u)\, dz^2. \tag{30}$$

Funcția $H(z, u) = \{h\}_z$ este uniformă pe R și nu are alte singularități decît poluri, deci $H(z, u)$ este o funcție rațională de z, u.

De asemenea, funcția $H_0(z, u) = \{h_0\}_z$ este o funcție rațională de z, u ; din ecuația (3) deducem

$$\{h\}_z \, dz^2 = \{h\}_\tau \, d\tau^2 + \{\tau\}_z \, dz^2.$$

Ținînd seama de (28), (29) și (30) și de faptul că avem

$$\{\tau\}_z \, dz^2 = \{h_0\}_z \, dz^2 = H_0(z, u)\, dz^2,$$

deducem că

$$H(z, u) = \theta(z, u) + H_0(z, u). \tag{31}$$

Deci :

Funcțiile $H(z, u) = \{h\}_z$ sînt raționale în z, u și au toate aceleași singularități. Diferența a două funcții, de exemplu H și H_0 este o funcție θ de forma (29')

Funcțiile $H(z, u)$ sînt evident regulate în punctele ordinare ale funcției $u(z)$. În punctul de la infinit $z = \infty$, ele sînt de ordinul lui $z^{-4-\lambda}$ $(\lambda \geqslant 0)$, deoarece $1/z$ este un uniformizator local în punctele suprafeței R ce se proiectează în $z = \infty$ și forma $\{h\}_z \, dz^2$ este regulată în aceste puncte.

Fie $p = (a, b)$ un punct de ramificație al funcției $u\ (z)$. În acest punct, între uniformizatorul $t = \tau - \tau\ (p)$ și coordonata z avem o relație de forma

$$z - a = [\varphi\ (t)]^2, \tag{32}$$

unde $t = 0$ în p și $\varphi\ (0) = 0$, $\varphi'\ (0) \neq 0$, $\varphi\ (t)$ fiind olomorfă în punctul $t = 0$.

Din relația (32) deducem

$$\{z\}_\tau = \{z\}_t = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\log \varphi\varphi' - \frac{1}{4}\left(\frac{d}{dt}\log \varphi\varphi'\right)^2 = \{\varphi\}_\tau - \frac{3}{4}\frac{\varphi'^2}{\varphi^2},$$

$$d\tau^2 = \frac{dz^2}{4\varphi^2\varphi'^2},$$

deci avem

$$H_0\ (z, u) = \frac{1}{4\varphi^2\varphi'^2}\left(\{\varphi\}_\tau - \frac{3}{4}\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}\right)$$

au, ținînd din nou seama de (32),

$$H_0\ (z, u) = \frac{\{\varphi\}_\tau}{4\varphi'^2}\frac{1}{z-a} - \frac{3}{16}\frac{1}{(z-a)^2}. \tag{33}$$

Funcția $\{\varphi\}_\tau / 4\varphi'^2$ este regulată în jurul punctului (a, b) de pe suprafața R, deci $H_0\ (z, u)$ are un pol dublu în (a, b), în raport cu $(z - a)$ și nu are termeni de forma $(z - a)^{-\rho}$, $1 < \rho < 2$. Rezultă că:

Funcțiile raționale $H\ (z, u) = \{h\}_z$ au următoarele proprietăți:

1° în jurul lui $z = \infty$ sînt de ordinul lui $z^{-4-\lambda}$, $\lambda \geqslant 0$.,

2° în punctele ordinare ale funcției $u\ (z)$ sînt finite,

3° în punctele de ramificație (a, b) sînt infinite de ordinul lui $(z-a)^{-2}$ și coeficientul lui $(z - a)^{-2}$ este $-3/16$; în jurul acestor puncte nu au termeni de forma $(z - a)^{-\rho}$, $1 < \rho < 2$.

Printr-un raționament analog aceluia făcut în paragraful II se deduce că *funcțiile $H\ (z, u)$ sînt de forma*

$$H\ (z, u) = \frac{S\ (z, u)}{(z - a_1)^2 \ldots (z - a_r)^2\ F'_u\ (z, u)}, \tag{34}$$

unde $S\ (z, u)$ este un polinom cu proprietățile:

P_1 *este de grad $m + 2r - 5$;*

P_2 *curba $S\ (z, u) = 0$ trece prin punctele duble ale curbei $F\ (z, u) = 0$ și prin punctele (z, u) ale acestei curbe, pentru care $z = a_i\ (i = 1, \ldots, r)$, și are aceste puncte drept puncte duble.*

P_3 *în punctele de ramificație (a_i, b_i) avem*

$$\lim_{(z,u)\to(a_i, b_i)} (z - a_i)^2 . H\ (z, u) = -\frac{3}{16}; \lim (z - a_i)^{3/2}\left[H\ (z, u) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{16}(z - a_i)^{-2}\right] = 0.$$

Reciproc, orice funcție rațională H de forma (34), *unde $S(z, u)$ este un polinom cu proprietățile P_1, P_2, P_3, corespunde unei funcții h, adică este schwarzianul unei funcții h în raport cu z.*

Într-adevăr, dacă $H(z, u)$ este de forma (34), diferența $H(z, u) - H_0(z, u)$ este o funcție θ de forma (29'), deci avem

$$H(z, u) = H_0(z, u) + \theta(z, u);$$

înmulțind această relație cu dz^2 și ținînd seama că avem

$$H_0(z, u)\, dz^2 = \{\tau\}_z\, dz^2, \quad \theta(z, u)\, dz^2 = \{h\}_\tau\, d\tau^2,$$

rezultă

$$H(z, u)\, dz^2 = \{h\}_\tau\, d\tau^2 + \{\tau\}_z\, dz^2 = \{h\}_z\, dz^2,$$

deci

$$H(z, u) = \{h\}_z,$$

h fiind o soluție a ecuației

$$h \circ h_0 = \theta(z, u)\, dz^2,$$

considerată în paragraful I.

În rezumat avem următoarea

T e o r e m ă. *Fie $F(z, u) = 0$ ecuația unei curbe algebrice de gradul m, care are ca puncte multiple numai puncte duble, la distanță finită cu tangente distincte. Fie apoi (a_i, b_i) $(i = 1, \ldots, r)$ punctele de ramificație ale funcției $u(z)$, punctele a_i fiind distincte și la distanță finită. În aceste condiții funcțiile h, pe suprafața riemanniană R a curbei $F(z, u) = 0$, sînt integralele ecuațiilor diferențiale.*

$$\{h\}_z = \frac{S(z, u)}{(z - a_1)^2 \ldots (z - a_r)^2 F'_u(z, u)} \tag{35}$$

unde $S(z, u)$ este un polinom în z, u, avînd proprietățile P_1, P_2, P_3.

Teorema demonstrată în § II ne arată că *numărul polinoamelor $S(z, u)$ liniar independente este $3p - 3$.*

Funcția w de reprezentare conformă a suprafeței pe cercul unitate $|w| < 1$ este o integrală a unei ecuații (35).

Derivînd ecuația (35), în raport cu z, de $3p - 3$ ori și eliminînd cele $3p - 3$ constante de care depinde polinomul $S(z, u)$ obținem o ecuație diferențială algebrică de ordinul $3p$, ale cărei integrale sînt funcțiile h ale suprafeței R.

Dacă reprezentăm funcțiile h sub forma $h = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$, unde φ_1, φ_2 sînt două soluții independente ale ecuației diferențiale liniare

$$\varphi'' = \frac{S(z, u)}{(z - a_1)^2 \ldots (z - a_r)^2 F'_u}\, \varphi, \quad \left(\varphi'' = \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) \tag{36}$$

deducem că determinarea funcțiilor h se reduce la integrarea unor ecuații de forma (36). Într-un punct de ramificație (a_i, b_i) putem face schimbarea

de variabilă $z - a_i = \tau^2$ și obținem atunci o ecuație liniară în $\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}, \frac{d\varphi}{d\tau}, \varphi$, cu coeficienți uniformi în jurul lui $\tau = 0$; această ecuație este de tip Fuchs [8] și rădăcinile ecuației determinate sînt 1/2 și 3/2.

IV. Aplicație la problema formelor spațiale Klein-Clifford

Dacă avem o funcție h pe suprafața R, putem deduce pe R o *conexiune conformă local-euclidiană*, adică o lege care să ne permită să desfășurăm orice curbă de pe R pe sfera lui Riemann, astfel încît :

1° prin desfășurare, unghiul a două curbe pe R să nu se schimbe;

2° o curbă închisă, deformabilă la un punct pe suprafața R, să se desfășoare după o curbă de asemenea închisă.

Într-adevăr, dacă avem curba AM pe R și dacă h_0 este o determinare a funcției h în jurul punctului A, putem prelungi funcția h_0 de-a lungul arcului AM și făcînd să coprespundă fiecărui punct al acestui arc valoarea respectivă a funcției h_0, obținem o defășurare a curbei AM pe sfera (h); această desfășurare are proprietățile 1°, 2°.

Reciproc, dacă avem o conexiune conformă local-euclidiană pe o suprafață riemanniană R, funcția care definește desfășurarea curbelor din R pe sfera lui Riemann, este o funcție h pe R. Deci :

Conexiunile conforme local-euclidiene, ce se pot defini pe o suprafață riemanniană închisă de gen $p > 1$, depind de $3p - 3$ constante arbitrare.

Printre conexiunile local-euclidiene ce se pot defini pe suprafața R, sînt importante acelea pentru care grupul de holonomie lasă invariant un cerc. Grupul de holonomie este tocmai grupul transformărilor omografice pe care le suferă funcția h cînd o prelungim de-a lungul diferitelor drumuri închise de pe R. Dacă aceste transformări lasă invariant cercul $|h| \leqslant 1$ și dacă valorile funcției h sînt toate *interioare* acestui cerc, atunci forma diferențială

$$ds^2 = \frac{|dh|^2}{(1 - |h|^2)^2} \tag{37}$$

definește o metrică cu curbură constantă negativă $K = -4$, regulată pe toată suprafața R. Obținem o formă spațială Klein-Clifford [7] închisă. Se știe însă, că pe o suprafață riemanniană închisă se poate construi o singură metrică cu curbură constantă negativă dată, de exemplu $K = -4$ [7]. Această metrică se obține cînd luăm pentru h, în (37), funcția w de reprezentare conformă a suprafeței universale de acoperire R a lui R, pe cercul unitate $|w| < 1$. Rezultă că *putem caracteriza funcția w printre integralele ecuațiilor* (36) *prin proprietatea : transformărilor homografice pe care le suferă funcția w prin prelungire analitică sînt transformări ale cercului $|w| < 1$ în el însuși și avem $|w| < 1$ în orice punct al lui R.*

Să revenim la funcțiile generale h pe suprafața R. Aceste funcții definesc conexiuni conforme local-euclidiene pe R. Pe o suprafață R dotată cu astfel de conexiuni putem considera cercurile, deci curbele lui R, care se desfășoară după cercurile sferei lui Riemann.

Într-o lucrare ulterioară vom arăta cum se pot considera cercurile de rază imaginară pe R, care se pot organiza în anumite condiții ca spațiu V_3 cu curbură constantă negativă. Invers, unui spațiu V_3 deschis îi corespunde o suprafață R cu conexiune conformă local-euclidiană. Deci *determinarea formelor spațiale V_3 hiperbolice deschise este legată de determinarea funcțiilor h pe diferitele suprafețe R.* O formă V_3 se numește a lui Klein-Clifford, dacă orice geodezică poate fi prelungită indefinit de o parte și de alta, deci dacă V_3 este un spațiu complet.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ОБОБЩАЮЩЕМ АБЕЛЕВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Рассматриваются функции h, аналитические на заданной римановой поверхности R, со следующими свойствами:

1. Различные определения h выводятся одно из другого посредством гомографических (линейных) преобразований.

2. Каждое определение h, в односвязной области R, является локальной униформизирующей в этой области.

В первой главе показывается, что если даны две функции h_1, h_2, то выражение

$$h_1 \circ h_2 = \{h_1\} h_2 \, dh_2$$

определяет квадратичный дифференциал, регулярный на R, $\{h_1\} h_2$ обозначает шварциан h_1 относительно h; этот дифференциал является кососимметричным относительно функций

$$h_1, h_2 : h_1 \circ h_2 = - h_2 \circ h_1.$$

Во второй главе исследуются квадратичные дифференциалы алгебраической кривой $F(z, u) = 0$ и показывается, что если эта кривая не имеет двойных точек на бесконечности и если функция $u(z)$ имеет лишь точки ветвления первого порядка, расположенные также на конечном расстоянии и обладающие различными проекциями на сфере (z), то квадратичные дифференциалы имеют вид

$$\frac{T(z, u)}{(z - a_1) \ldots (z - a_r) F'_u(z, u)} dz^2$$

где $a_1 \ldots a^t$ — точки ветвления функции $u(z)$; $T(z, u)$ — полином степени $m + r - 5$, обращающийся в нуль в двойных точках кривой $F(z, u) = 0$ и в точках этой кривой, для которых $z = a_1$. $T(z, u)$ зависит от $3p - 3$ произвольных постоянных, если $F(z, u) = 0$ рода $p > 1$.

В третьей главе показывается, что функции h на кривой $F(z, u) = 0$ суть интегралы дифференциальных уравнений

$$\{h\}_z = \frac{s(z, u)}{(z - a_1)^2 \ldots (z - a_r)^2 E'_u(z, u)} = H(z, u),$$

где $S(z, u)$ есть полином степени $m + 2r - 5$ такой, что рациональная функция (z, u) принимает бесконечные значения лишь в точках ветвления $u(z)$, причем главные части в этих точках выражаются в виде

$$-\frac{3}{16}\frac{1}{(z-a)^2}+\frac{\alpha}{z-a}+\frac{\beta}{(z-a)^{\frac{1}{2}}}+\text{регулярная функция от } (z-a)^{\frac{1}{2}},$$

где α и β суть константы.

В последней главе приводится геометрическая интерпретация функций h, и показывается, каким образом такая функция приводит к локально-евклидовой конформной связности поверхности R. Выводится, что:

Локально евклидовы конформные связности, определенные на замкнутой римановой поверхности рода $p > 1$ зависят от $3p - 3$ произвольных констант.

Эти соображения связаны с двумя важными вопросами.

На первый из них обратил внимание автора М. де Рам, указавший, что функции h укладываются в неабелевую теорию алгебраических функций, развитую А. Вейлем в работе, опубликованной в Journal de math pures et appliquees, 1938 (Generalisation des fonctions abeliennes). С этой точки зрения функции h дают неприводимые представления второго порядка из фундаментальной группы поверхности R, на которой определены h.

Второй вопрос, с которым связано рассмотрение функций h на открытой или замкнутой римановой поверхности, это вопрос определения пространственных форм V_3 с отрицательной постоянной кривизной. В дальнейшем будет показано, что с каждой парой (R, h), образованной римановой поверхностью R и функцией h на R, можно ассоциировать пространственную форму V_3: можно назвать V_3 многообразием кругов с мнимыми радиусами (R, h).

Обратно, любому пространственному виду V_3 можно однозначно сопоставить пару (R, h).

UNE CLASSE DE FONCTIONS ANALYTIQUES D'UNE SURFACE DE RIEMANN, GÉNÉRALISANT LES INTÉGRALES ABÉLIENNES

(RÉSUMÉ)

On considère les fonctions h, analytiques sur une surface de Riemann R donnée, ayant les propriétés suivantes :

1° Les déterminations de h se déduisent l'une de l'autre par des transformations homographiques.

2° Chaque détermination de h, dans un domaine simplement connexe de R, est un uniformisateur local dans ce domaine.

Dans le premier chapitre, on montre que si l'on a deux fonctions h_1, h_2, l'expression

$$h_1 o h_2 = \{h_1\}_{h_2}\, dh_2^2$$

est une différentielle quadratique régulière sur R, $\{h_1\}_{h_2}$ étant le schwarzien de h_1 par rapport à h_2 ; cette différentielle est symétrique gauche par rapport aux fonctions h_1, h_2 : $h_1 \circ h_2 = -h_2 \circ h_1$.

Dans le second chapitre, on étudie les différentielles quadratiques d'une courbe algébrique $F(z, u) = 0$ et l'on montre que : si cette courbe n'a que des points doubles à distance finie et si la fonction $u(z)$ n'a que des points de ramification du premier ordre, toujours à distance finie et ayant les projections distinctes sur la sphère (z), les différentielles quadratiques sont de la forme :

$$\frac{T(z, u)}{(z - a_1) \dots (z - a_r) F'_u(z, u)} dz^2$$

où : $a_1, \dots, a_r$ sont les points de ramification de la fonction $u(z)$; $T(z, u)$ est un polynôme de degré $m + r - 5$, s'annulant dans les points doubles de la courbe $F(z, u) = 0$, et dans les points (z, u) de cette courbe pour lesquels $z = a_1$. $T(z, u)$ dépend de $3p - 3$ constantes arbitraires, si $F(z, u) = 0$ est de genre $p > 1$.

Dans le troisième chapitre, on montre que les fonctions h de la courbe $F(z, u) = 0$ sont les intégrales des équations différentielles :

$$\{h\}_z = \frac{S(z, u)}{(z - a_1)^2 \dots (z - a_r)^2 F'_u(z, u)} = H(z, u)$$

où $S(z, u)$ est un polynôme de degré $m + 2r - 5$, tel que la fonction rationnelle $H(z, u)$ ne soit infinie que dans les points de ramification de $u(z)$, les parties principales dans ces points étant de la forme :

$$-\frac{3}{16}\frac{1}{(z-a)^2} + \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{(z-a)^{1/2}} + \text{fonction régulière de } (z-a)^{1/2}$$

α, β étant des constantes.

Dans le dernier chapitre, on donne une interprétation géométrique des fonctions h, en montrant comment une telle fonction conduit à une connexion conforme localement-euclidienne de la surface R. On en déduit que :

Les connexions conformes localement-euclidiennes, définies sur une surface de Riemann fermée de genre $p > 1$, dépendent de $3p - 3$ constantes arbitraires.

Ces considérations sont liées à deux problèmes importants. Le premier a été signalé par M. de Rham, qui fit observer à l'auteur que les fonctions h s'encadrent dans la théorie non abélienne des fonctions algébriques, due à M. Weil dans un travail inséré dans le *Journal de math. pures et appliquées*, 1938 (Généralisation des fonctions abéliennes). De ce point de vue, les fonctions h donnent des représentations irréductibles d'ordre 2 du groupe fondamental de la surface R sur laquelle h sont définies.

Le second problème auquel la considération des fonctions h, d'une surface de Riemann, ouverte ou fermée, est liée, est le problème de la

détermination des formes spatiales V_3, à courbure constante négative. On montrera, dans un autre travail, qu'à certaines paires (R, h), formées par une surface de Riemann R et par une fonction h sur R, on peut associer une forme spatiale V_3; on peut appeler V_3 la variété des cercles à rayons imaginaires de (R, h).

Réciproquement, à certaines formes spatiales V_3, on peut associer univoquement une paire (R, h).

BIBLIOGRAFIE

1. H. Weyl, *Die Idee der Riemannsche Fläche*, Stuttgart, 1955.
2. Forsight, *Lehrbuch der Differential-gleichungen*, Braunschweig, Ed. a IIa, p. 232.
3. S. Stoilov. *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*. Ed. Acad. R.P.R., București, vol.I, 1954, p. 252.
4. Ed. Goursat et P. Appel, *Fonctions algébriques*, Paris, 1895.
5. S. Stoilov, *Principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Paris, 1938.
6. B. L. van der Waerden, *Einführung in die Algebraische Geometrie*, Berlin, 1939.
7. F. Klein, *Vorlesungen über nicht-Euklidische Geometrie*. Springer, Berlin, 1928.
8. E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, Paris, 1911, vol, II, p. 456.

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VIII, nr. 1—2, 1957

DETERMINAREA SPAŢIILOR A_3 CU GRUP TRANZITIV $\mathfrak{G}_7$*)

DE

VIOREL DUMITRAŞ

După cum se ştie, un spaţiu riemannian V_n admite un grup de mişcări (transformări în el însuşi) care are cel mult $n(n+1)/2$ parametri şi acest maxim este atins dacă spaţiul are curbura constantă.

Pentru spaţiile riemanniene cu 2 şi cu 3 dimensiuni, o clasificare după grupul de mişcări ce-l posedă a fost dată de L. Bianchi [1], [2].

Alte cercetări asupra grupurilor de mişcare ale spaţiilor riemanniene au fost făcute de G. Fubini [3], I. P. Egorov [4] [5] şi recent de acad. G. Vrănceanu, care a studiat în special spaţiile riemanniene cu 4 dimensiuni pornind de la grupul de stabilitate al originii [6], [7], [8]. Alte lucrări în această direcţie sînt cele ale lui C. Teleman [9], [10], [11].

Pentru spaţiile cu conexiune afină A_n grupul maxim de automorfisme (transformări în el însuşi) are n^2+n parametri şi acest maxim este atins de spaţiile euclidiene, adică spaţiile cu curbură şi torsiune nulă, cînd grupul este dat în coordonate carteziene de transformările afine ale spaţiului euclidian.

Acad. G. Vrănceanu a considerat prima oară spaţii A_n care au un grup de automorfisme cu n^2 parametri, studiind spaţiile A_n care posedă o formă Pfaff invariantă [12].

Folosind aceste rezultate, Ştefan Petrescu a dat o clasificare a spaţiilor cu conexiune afină cu 2 dimensiuni A_2 după grupul de automorfisme ce-l posedă [13], [14], [15]. Alte clasificări ale spaţiilor A_2 au fost făcute de A. E. Liber [16] şi J. Levine [17]. Folosind metoda indicată de G. Vrănceanu, autorul a determinat spaţiile A_3 care admit o rotaţie în fiecare punct [18].

În lucrări de dată recentă matematicianul sovietic I. P. Egorov a arătat că un spaţiu A_n cu conexiune simetrică şi care nu este afin euclidian are un grup de automorfisme avînd cel mult n^2 parametri [19]. Acest rezultat este valabil şi pentru spaţiile A_n cu conexiune nesimetrică [20].

În cîteva lucrări G. Vrănceanu şi I. P. Egorov arată că acest maxim este atins de spaţiile A_n proiectiv euclidiene adică de spa-

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 15 decembrie 1956.

țiile A_n pentru care într-un anumit sistem de coordonate curbele autoparalele sînt drepte [21], [22], [23], [24], [25].

În ceea ce privește spațiile A_n cu torsiune pentru care cel puțin una din componentele T^i_{jk} $(i \neq j, k)$ este diferită de zero, grupul de automorfisme are cel mult $n^2 - 2n + 6$ parametri și acest maxim este atins după cum au arătat I. P. Egorov [26] și G. Vrănceanu [25].

Continuînd aceste cercetări, G. Vrănceanu arată [27] că un spațiu cu conexiune afină A_n neproiectiv euclidian poate avea un grup de automorfisme avînd cel mult

$$m = n^2 - 2n + 5$$

parametri și că acest maxim este atins de spațiile lui Kagan pentru care toate componentele Γ^i_{jk} ale conexiunii sînt nule în afară de

$$\Gamma^1_{22} = x^3.$$

Într-o lucrare ulterioară [28] G. Vrănceanu arată că orice spațiu A_n neproiectiv euclidian posedînd un grup de automorfisme G_m se poate reduce printr-o transformare de variabile la spațiul de mai sus. Se determină, de asemenea, și ecuațiile finite ale grupului de automorfisme, grup care este tranzitiv. În cazul spațiilor cu conexiune afină cu 3 dimensiuni avem $n^2 = 9$ și $m = 8$. Se pune deci problema determinării spațiilor A_3 avînd un grup de automorfisme cu un număr de parametri inferior lui 8.

Scopul acestei lucrări este de a determina spațiile A_3 care posedă un grup tranzitiv de transformări în ele însile cu 7 parametri.

Metoda utilizată în prima etapă este cea folosită de G. Vrănceanu pentru determinarea spațiilor riemanniene, adică vom porni de la grupul de stabilitate și vom căuta să determinăm structura grupului tranzitiv care are acest grup drept subgrup de stabilitate. Vom căuta apoi expresiile transformărilor infinitezimale ale grupului și apoi cu ajutorul transformărilor infinitezimale în el însuși ale spațiului vom determina conexiunea spațiului.

Țin să aduc mulțumiri acad. G. Vrănceanu care m-a încurajat și care mi-a dat sugestii foarte utile în timpul acestei cercetări.

★

Să considerăm un grup tranzitiv $\mathfrak{G}_{n+r}$ operînd într-un spațiu cu conexiune afină A_n. După cum se știe [12] *), în vecinătatea unui punct al spațiului pe care-l luăm drept originea coordonatelor ($x^1 = x^2 = \ldots = x^n = 0$), putem lua ca transformări infinitezimale ale grupului.

$$X_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} + a^k_{ji} x^j \frac{\partial f}{\partial x^k} + \ldots, \quad X_\alpha = a^i_{k\alpha} x^k \frac{\partial f}{\partial x^i} + \ldots \tag{1}$$

$$(i, j, k = 1, \ldots, n; \quad \alpha, \beta, \gamma = n+1, \ldots, n+r),$$

*) p. 93.

termenii nescriși fiind de ordin superior în x^i. Transformările infinitezimale X_α aparțin grupului de stabilitate și, după cum se știe, ele sînt de primul ordin [12] *). Ecuațiile de structură ale grupului $\mathfrak{G}_{n+r}$ se vor scrie

$$(X_i X_j) = c_{ij}^k X_k + c_{ij}^\alpha X_\alpha, \qquad (k, i, j = 1, \ldots, n),$$
$$(X_i X_\beta) = a_{i\beta}^k X_k + c_{i\beta}^\alpha X_\alpha, \qquad (\alpha, \beta, \gamma = n+1, \ldots, n+r),$$
$$(X_\beta X_\gamma) = c_{\beta\gamma}^\alpha X_\alpha;$$

avem deci trei tipuri de asemenea ecuații; ultimele sînt tocmai ecuațiile de structură ale grupului de stabilitate. Constantele c_{kl}^h, c_{ij}^α, $a_{i\beta}^k$, $c_{i\beta}^\alpha$, $c_{\beta\gamma}^\alpha$ sînt constantele de structură ale grupului $\mathfrak{G}_{n+r}$, ele satisfac relațiile lui Lie [29]. Făcînd schimbarea de operatori

$$\overline{X}_i = X_i + c_i^\alpha X_\alpha,$$

obținem

$$\begin{aligned}
&\overline{c}_{kl}^h = c_{kl}^h - c_{l\alpha}^h c_k^\alpha + c_l^\alpha a_{k\alpha}^h,\\
&\overline{c}_{kl}^\alpha = c_{kl}^\alpha - c_h^\alpha (c_{kl}^h - c_k^\beta a_{l\beta}^h + c_l^\beta a_{k\beta}^h)\\
&\quad - c_k^\beta c_{l\beta}^\alpha + c_l^\beta c_{k\beta}^\alpha + c_{\beta\gamma}^\alpha c_k^\beta c_l^\gamma, \qquad (2)\\
&\overline{c}_{k\beta}^\alpha = c_{k\beta}^\alpha + c_k^\gamma c_{\gamma\beta}^\alpha,\\
&\overline{a}_{k\beta}^h = a_{k\beta}^h, \quad \overline{c}_{\beta\gamma}^\alpha = c_{\beta\gamma}^\alpha,
\end{aligned}$$

Din aceste formule rezultă că putem alege cantitățile c_i^α astfel încît să anulăm unele din constantele $\overline{c}_{kl}^h$, $\overline{c}_{kl}^\alpha$ sau $c_{k\beta}^\alpha$.

Pentru determinarea unui grup de transformări tranzitiv trebuie în primul rînd să cunoaștem grupul său de stabilitate. Se știe că într-un sistem de coordonate normale $x^1, \ldots, x^n$ ale originii, grupul de stabilitate al unui spațiu A_n este un subgrup al grupului centroafin, adică al grupului definit de transformările infinitezimale

$$X = a_k^j x^k \frac{\partial f}{\partial x^j}, \qquad (3)$$

unde a_k^j sînt constante care față de o transformare liniară și omogenă de variabile constituie componentele unui tensor mixt constant [30].

Vom ține în primul rînd seama de condițiile pe care le impun transformările grupului de stabilitate tensorului de torsiune și tensorului de curbură. Avem următoarele ecuații date de G. Vrănceanu [12]*)

$$\begin{aligned}
&T_{sk}^i a_j^s + T_{js}^i a_k^s - T_{jk}^s a_s^i = 0,\\
&\Gamma_{skl}^s a_j^s + \Gamma_{jsl}^i a_k^s + \Gamma_{jks}^i a_l^s - \Gamma_{jkl}^s a_s^i = 0, \qquad (4)
\end{aligned}$$

*) p. 219, formulele (41).

unde T^i_{jk} și Γ^i_{jkl} intervin prin valorile lor în origine. Dacă din formulele (4) scrise pentru toate transformările grupului de stabilitate va rezulta că tensorii T^i_{jk} și Γ^i_{jkl} au toate componentele nule în origine, atunci după o teoremă demonstrată de G. V r ă n c e a n u [30] putem spune că spațiul este euclidian.

În general, vom căuta expresiile tuturor transformărilor infinitezimale ale grupului $\mathfrak{G}_{n+r}$. Dacă o asemenea transformare este $\xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$, avem, după cum se știe [12] *),

$$\frac{\partial^r \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^r} \xi^r + \Gamma^i_{jr} \frac{\partial \xi^r}{\partial x^k} + \Gamma^i_{rk} \frac{\partial \xi^r}{\partial x^j} - \Gamma^r_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^r} \qquad (\alpha)$$

și aceste ecuații ne vor determina componentele conexiunii spațiului A_n corespunzător.

Menționăm încă o teoremă demonstrată de G. V r ă n c e a n u [32].

Grupul de stabilitate $\mathfrak{G}_r$ al unui spațiu A_n neeuclidian nu poate conține trasformarea infinitezimală

$$U = x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

S o p h u s L i e face clasificarea tuturor grupurilor liniare omogene în 3 variabile [32].

Grupul liniar omogen în 3 variabile are 9 parametri. Îl vom nota cu G_9. El este dat de transformările infinitezimale

$$x^i \frac{\partial f}{\partial x^j}, \qquad (i, j = 1, 2, 3). \qquad (5)$$

Acest grup G_9 are două subgrupuri invariante: primul din ele este subgrupul omogen special cu 8 parametri

$$x^3 \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad x^1 \frac{\partial x}{\partial x^3}, \quad x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \qquad (6)$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

iar al doilea este grupul cu 1 parametru dat de transformarea infinitezimală distinsă a lui G_9

$$U = X^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}. \qquad (6')$$

Grupul (6) este holoedric izomorf cu grupul proiectiv al planului. Punînd

$$\frac{x^1}{x^3} = x, \qquad \frac{x^2}{x^3} = y,$$

*) p. 217, formulele (39′).

avem corespondența dintre aceste două grupuri dată prin relațiile

$$x^3\frac{\partial f}{\partial x^1}\equiv\frac{\partial f}{\partial x},\quad x^3\frac{\partial f}{\partial x^2}\equiv\frac{\partial f}{\partial y},\quad x^1\frac{\partial f}{\partial x^2}\equiv x\frac{\partial f}{\partial y},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x^1}\equiv y\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}-x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}\equiv x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}-x^3\frac{\partial f}{\partial x^3}\equiv 2x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}-x^3\frac{\partial f}{\partial x^3}\equiv x\frac{\partial f}{\partial x}+2y\frac{\partial f}{\partial y},\tag{7}$$

$$3x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}-U=3x\frac{\partial f}{\partial x},\quad 3x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}-U=3y\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$x^1\frac{\partial f}{\partial x^3}\equiv -x\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x^3}\equiv y\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

La fel cum grupul (5) este asemenea cu grupul proiectiv

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ x\frac{\partial f}{\partial x},\ y\frac{\partial f}{\partial x},\ x\frac{\partial f}{\partial y},\ y\frac{\partial f}{\partial y},\ x\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ y\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right),\tag{8}$$

tot astfel G_9 este asemenea cu grupul

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ x\frac{\partial f}{\partial x},\ y\frac{\partial f}{\partial x},\ x\frac{\partial f}{\partial y},\ y\frac{\partial f}{\partial y},\ x\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ y\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial f}{\partial z}\tag{9}$$

în 3 variabile. Cunoscînd subgrupurile grupului (6), se pot determina prin metodele indicate de Sophus Lie [32] subgrupurile grupului (9). Acestea o dată determinate, subgrupurile lui G_9 rezultă folosind relațiile (7), iar în locul transformării $\frac{\partial f}{dz}$ punînd $x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}+x^3\frac{\partial f}{\partial x^3}$.

Vom porni de la formele canonice date de Sophus Lie. Grupurile care conțin transformarea distinsă

$$U=x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}+x^3\frac{\partial f}{\partial x^3}$$

sau toate transformările

$$x^1\frac{\partial f}{\partial x^1},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x^2},\quad x^3\frac{\partial f}{\partial x^3}$$

vor fi lăsate deoparte deoarece, după cum rezultă din teorema lui Vrănceanu, spațiile A_3 corespunzătoare sînt euclidiene. Grupurile tranzitive 7 parametri în 3 variabile au drept subgrup de stabilitate un grup liniar omogen cu 4 parametri. Subgrupurile cu 4 parametri ale grupului centroafin în 3 variabile, care nu conțin transformarea distinsă U, le avem din

clasificarea lui Sophus Lie. Există șapte categorii de asemenea subgrupuri și transformările lor infinitezimale se pot scrie

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} \quad x^3\frac{\partial f}{\partial x^1},\ x^3\frac{\partial f}{\partial x^2},\ x^1\frac{\partial f}{\partial x^2}+U,\ x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}+pU,\\
&\text{(II)} \quad x^1\frac{\partial f}{\partial x^2},\ x^3\frac{\partial f}{\partial x^2},\ x^3\frac{\partial f}{\partial x^1}+U,\ x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}+pU,\\
&\text{(III)} \quad x^1\frac{\partial f}{\partial x^2},\ x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}-x^2\frac{\partial f}{\partial x^2},\ x^2\frac{\partial f}{\partial x^1},\ x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}+pU, \qquad (10)\\
&\text{(IV)} \quad x^3\frac{\partial f}{\partial x^2},\ x^1\frac{\partial f}{\partial x^2},\ x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}+pU,\ x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}+qU,\\
&\text{(V)} \quad x^3\frac{\partial f}{\partial x^1},\ x^3\frac{\partial f}{\partial x^2},\ x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}+pU,\ x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}+qU,\\
&\text{(VI)} \quad x^3\frac{\partial f}{\partial x^1},\ x^3\frac{\partial f}{\partial x^2},\ x^1\frac{\partial f}{\partial x^2},\ x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}+cx^2\frac{\partial f}{\partial x^2}+pU,\\
&\text{(VII)} \quad x^3\frac{\partial f}{\partial x^1},\ x^3\frac{\partial f}{\partial x^2},\ x^1\frac{\partial f}{\partial x^2},\ x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}+pU.
\end{aligned}
$$

Vom determina acum spațiile A_3 care au drept grup de stabilitate unul din aceste șapte grupuri.

În cele ce urmează indicii notați cu litere grecești iau valori de la 4 pînă la 7, iar indicii notați cu litere latine de la 1 pînă la 3, în afară de formulele care se referă la spații cu un număr oarecare de dimensiuni. Vom utiliza convenția de sumare a lui Einstein cînd nu vom face mențiuni speciale.

1. Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale (I) sau (II)

1° Să determinăm mai întîi grupul tranzitiv $\mathfrak{G}_7$, al cărui subgrup de stabilitate este dat de transformările infinitezimale

$$\text{(I)}\quad X_4=x^3\frac{\partial f}{\partial x^1},\ X_5=x^3\frac{\partial f}{\partial x^2},\ X_6=x^1\frac{\partial f}{\partial x^2}+U,\ X_7=x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}+pU.$$

Avem

$$
\begin{aligned}
&(X_4X_5)=0, \quad (X_4X_7)=X_4, \quad (X_5X_7)=X_5, \qquad (1.1)\\
&(X_4X_6)=X_5, \quad (X_5X_6)=0, \quad (X_6X_7)=0.
\end{aligned}
$$

Parantezele (X_iX_6) se scriu

$$(X_1X_6)=X_1+X_2+c_{16}^{\alpha}X_\alpha,\ (X_2X_6)=X_2+c_{26}^{\alpha}X_\alpha,\ (X_3X_6)=X_3+c_{36}^{\alpha}X_\alpha \qquad (1.2)$$

Făcînd o schimbare de operatori

$$\overline{X}_i = X_i + a_i X_1 + b_i X_5 + c_i X_6 + d_i X_7, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1.3}$$

avem

$$(\overline{X}_1, X_6) = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + (c^4_{16} - a_1 - a_2) X_4 + (c^5_{16} + a_1 - b_1 - b_2) X_5 + \\ + (c^6_{16} - c_1 - c_2) X_6 + (c^7_{16} - d_1 - d_2) X_7, \tag{1.2'}$$

$$(\overline{X}_h X_6) = \overline{X}_h + (c^4_{h6} - a_h) X_4 + (c^5_{h6} + a_h - b_h) X_5 + (c^6_{h6} - c_h) X_6 + \\ + (c^7_{h6} - d_h) X_7, \quad (h = 2, 3).$$

și dacă luăm

$$a_h = c^4_{h6}, \qquad b_h = c^5_{h6} + c^4_{h6}, \qquad c_h = c^6_{h6}, \qquad d_h = c^7_{h6},$$

$$a_1 = c^4_{16} - c^4_{26}, \quad b_1 = c^5_{16} + c^4_{16} - 2c^4_{26} - c^5_{26}, \quad c_1 = c^6_{16} - c^6_{26}, \quad d_1 = c^7_{16} - c^7_{26},$$

notînd noii operatori principali tot cu X_i, obținem

$$(X_1 X_6) = X_1 + X_2, \quad (X_2, X_6) = X_2, \quad (X_3 X_6) = X_3. \tag{1.2''}$$

Parantezele $(X_i X_j)$ au expresiile

$$(X_i X_j) = c^s_{ij} X_s + c^\alpha_{ij} X_\alpha. \tag{1.4}$$

Dacă ținem seama de formulele (1.2''), identitățile $(X_i X_j X_6) = 0$ se scriu

$$\begin{aligned} &[(X_1 X_2) X_6] - 2 (X_1 X_2) = 0, \\ &[(X_2 X_3) X_6] - 2 (X_2 X_3) = 0, \\ &[(X_1 X_3) X_6] - 2 (X_1 X_3) - (X_2 X_3) = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

și ne dau

$$(X_i X_j) = 0.$$

Operatorii X_i astfel aleși determină un grup simplu tranzitiv abelian. Rezultă deci că printr-o transformare de variabile de forma

$$y^i = x^i + \ldots,$$

unde termenii nescriși sînt de ordinul al doilea sau de ordin superior în x^i, putem lua

$$X_i = \frac{\partial f}{\partial y^i}.$$

Componentele conexiunii spațiului A_3 care admite acest grup drept grup de automorfisme satisfac condițiile

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial y^l} = 0.$$

deci Γ^i_{jk} sînt constante în sistemul de variabile y^i și spațiul A_3 este, după denumirea dată de G. Vrănceanu [25] *), un spațiu cu conexiune afină constantă. Pe de altă parte, spațiul admite și transformarea X_6 care în variabilele y^i se scrie

$$X_6 = y^1 \frac{\partial f}{\partial y^2} + y^1 \frac{\partial f}{\partial y^1} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y^2} + y^3 \frac{\partial f}{\partial y^3} + \dots$$

Ținînd seama de ecuațiile (1. 2''), rezultă că termenii nescriși sînt toți nuli și ecuațiile (α) devin

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \Gamma^i_{j2}\,\delta^1_k + \Gamma^i_{2k}\,\delta^1_j - \Gamma^1_{jk}\,\delta^2_i = 0, \tag{1.6}$$

unde am notat

$$\sigma_m = \Gamma^i_{mk}\,\delta^m_j + \Gamma^i_{jm}\,\delta^m_k - \Gamma^m_{jk}\,\delta^i_m, \tag{1.7}$$

m fiind un indice fix care ia valorile 1, 2, 3.

Să dăm mai întîi indicilor i, j, k valorile $i = i_1$, $j = j_1$, $k = k_1$, unde $i_1 \neq 2$, $j_1, k_1 \neq 1$. Ecuațiile (1.6) se scriu în acest caz

$$\Gamma^{i_1}_{j_1 2}\,\delta^2_{k_1} + \Gamma^{i_1}_{2k_1}\,\delta^2_{j_1} + \Gamma^{i_1}_{j_1 3}\,\delta^3_{k_1} + \Gamma^{i_1}_{3k_1}\,\delta^3_{j_1} - \Gamma^{i_1}_{j_1 k_1} = 0 \tag{1.6'}$$

și rezultă

$$\Gamma^{i_1}_{j_1 k_1} = 0 \quad , \quad (i_1 \neq 2, j_1, k_1 \neq 1). \tag{1.8}$$

Să dăm acum indicilor valorilor $i = i_1$, $j = 1$, $k = k_1$
Avem

$$\Gamma^{i_1}_{12}\,\delta^2_{k_1} + \Gamma^{i_1}_{13}\,\delta^3_{k_1} + \Gamma^{i_1}_{2k_1} = 0. \tag{1.6''}$$

Însă din (1.8) rezultă că $\Gamma^{i_1}_{2k_1} = 0$ și formulele (1.6'') ne dau

$$\Gamma^{i_1}_{12} = \Gamma^{i_1}_{13} = 0. \tag{1.8'}$$

La fel se arată că

$$\Gamma^{i_1}_{21} = \Gamma^{i_1}_{31} = \Gamma^{i_1}_{11} = 0. \tag{1.8''}$$

Prin urmare,

$$\Gamma^1_{jk} = \Gamma^3_{jk} = 0$$

Dacă facem acum $i = 2$, $j = j_1$, $k = k_1$, ecuațiile (1.6) se scriu

$$\Gamma^2_{j_1 2}\,\delta^2_{k_1} + \Gamma^2_{2k_1}\,\delta^2_{j_1} + \Gamma^2_{j_1 3}\,\delta^3_{k_1} + \Gamma^2_{3k_1}\,\delta^3_{j_1} - \Gamma^2_{j_1 k_1} = 0 \tag{1.6'''}$$

și ne dau

$$\Gamma^2_{j_1 k_1} = 0 \quad , \quad (j_1, k_1 \neq 1). \tag{1 8'''}$$

Făcînd acum $i = 2, j = 1, k = k_1$ și ținînd seama de (1.8'''), ecuațiile (1.6) devin

$$\Gamma^2_{12}\,\delta^2_{k_1} + \Gamma^2_{13}\,\delta^3_{k_1} = 0 \tag{1.6^{IV}}$$

*) p. 354.

și rezultă

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^2 = 0. \qquad (1.8^{IV})$$

Tot astfel vom găsi

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{11}^2 = 0.$$

Prin urmare, toate componentele conexiunii sînt nule și deci spațiul este euclidian.

2° Presupunem cum că grupul de stabilitate are transformările infinitezimale

$$(II)\ X_4 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2},\ X_5 = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2},\ X_6 = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1} + U,\ X_7 = x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + p\,U.$$

Atunci

$$(X_4 X_5) = 0 \quad , (X_4 X_7) = X_4 \ , (X_5 X_7) = X_5, \qquad (1.1')$$

$$(X_4 X_6) = -X_5 \ , (X_5 X_6) = 0 \ , (X_6 X_7) = 0.$$

Ecuațiile sînt de aceeași formă cu ecuațiile (1.1), cu excepția semnului parantezei $(X_4 X_6)$. Putem deci și în acest caz, printr-o alegere convenabilă a operatorilor principali X_i, să aducem parantezele $(X_i X_6)$ la forma

$$(X_1 X_6) = X_1, (X_2 X_6) = X_2 \ , (X_3 X_6) = X_1 + X_3 \qquad (1.2''')$$

și apoi demonstrația se face la fel ca mai sus.

Putem enunța

T e o r e m a 1. *Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale (I) sau (II) sînt euclidiene.*

2. Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale (III)

Transformările infinitezimale ale grupului de stabilitate se scriu

$$(III)\ X_4 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2},\ X_5 = x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1},\ X_6 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2},\ X_7 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + p\,U.$$

Ecuațiile (4) se scriu pentru transformările acestui grup

$$\begin{gathered}
T_{2k}^i \delta_j^1 + T_{j2}^i \delta_k^1 - T_{jk}^1 \delta_2^i = 0, \\
T_{1k}^i \delta_j^2 + T_{j1}^i \delta_k^2 - T_{jk}^2 \delta_1^i = 0, \\
\tau_1 - \tau_2 = 0, \\
(1+p)(\tau_1 + \tau_2) + p\,\tau_3 = 0, \qquad (2.1) \\
\Gamma_{2kl}^i \delta_j^1 + \Gamma_{j2l}^i \delta_k^1 + \Gamma_{jk2}^i \delta_l^1 - \Gamma_{jkl}^1 \delta_2^i = 0, \\
\Gamma_{1kl}^i \delta_j^2 + \Gamma_{j1l}^i \delta_k^2 + \Gamma_{jk1}^i \delta_l^2 - \Gamma_{jkl}^2 \delta_1^i = 0, \\
\Sigma_1 - \Sigma_2 = 0, \\
(1+p)(\Sigma_1 + \Sigma_2) + p\,\Sigma_3 = 0,
\end{gathered}$$

unde am notat

$$\tau_m = T^j_{mk}\,\delta^m_j + T^i_{jm}\,\delta^m_k - T^m_{jk}\,\delta^i_m,$$
$$\Sigma_m = \Gamma^i_{mkl}\,\delta^m_j + \Gamma^i_{jml}\,\delta^m_k + \Gamma^i_{jkm}\,\delta^m_l - \Gamma^m_{jkl}\,\delta^i_m, \tag{2.2}$$

m fiind un indice fix.

Din ecuațiile (2.1) rezultă că dacă $p \neq 2, -1, 0$ toate componentele tensorului de curbură și ale tensorului de torsiune sînt nule în origine. Rezultă deci, după teorema lui G. Vrănceanu [30], că spațiul este euclidian.

Dacă $p = -2$, tensorul de curbură are toate componentele nule iar tensorul de torsiune are o singură componentă distinctă nenulă T^3_{12}. Însă din ecuații asemănătoare ecuațiilor (4) relative la tensorul derivat al tensorului de torsiune rezultă că acestea din urmă are toate componentele nule. Regăsim deci spațiile A_3 cu torsiune care au un grup maxim cu $9n^2(-2n+6)$ parametri [22] și [25] *).

Să studiem acum cele două cazuri rămase. Vom considera pentru acestea ecuațiile de structură ale grupului de stabilitate

$$\begin{aligned} &(X_4 X_5) = X_6\,, \quad (X_4 X_7) = 0\,, \quad (X_5 X_7) = 0,\\ &(X_4 X_6) = -2X_4\,, \quad (X_5 X_6) = 2X_5\,, \quad (X_6 X_7) = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Parantezele $(X_i X_\alpha)$ se scriu

$$\begin{aligned} &(X_1 X_4) = X_2 + c^\alpha_{14} X_\alpha\,, \quad (X_1 X_5) = c^\alpha_{15} X_\alpha\,,\\ &(X_2 X_4) = c^\alpha_{24} X_\alpha\,, \quad (X_2 X_5) = X_1 + c^\alpha_{25} X_\alpha\,,\\ &(X_3 X_4) = c^\alpha_{34} X_\alpha\,, \quad (X_3 X_5) = c^\alpha_{35} X_\alpha\,,\\ &(X_1 X_6) = X_1 + c^\alpha_{16} X_\alpha\,, \quad (X_1 X_7) = (1+p) X_1 + c^\alpha_{17} X_\alpha\,,\\ &(X_2 X_6) = -X_2 + c^\alpha_{26} X_\alpha\,, \quad (X_2 X_7) = (1+p) X_2 + c^\alpha_{27} X_\alpha\,,\\ &(X_3 X_6) = c^\alpha_{36} X_\alpha\,, \quad (X_3 X_7) = p X_3 + c^\alpha_{37} X_\alpha\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dacă $p = -1$, putem prin alegerea convenabilă a operatorilor principali X_i să avem

$$(X_1 X_6) = X_1\,, \quad (X_2 X_6) = -X_2\,, \quad (X_3 X_7) = -X_3$$

și, ținînd seama de identitățile $(X_i X_\beta X_\gamma) = 0$, obținem

$$\begin{aligned} &(X_1 X_4) = X_2\,, \quad (X_1 X_5) = 0, \quad (X_1 X_6) = X_1\,, \quad (X_1 X_7) = 0,\\ &(X_2 X_4) = 0, \quad (X_2 X_5) = X_1, \quad (X_2 X_6) = -X_2, \quad (X_2 X_7) = 0, \\ &(X_3 X_4) = 0\,, \quad (X_3 X_5) = 0\,, \quad (X_3 X_6) = 0\,, \quad (X_3 X_7) = -X_3. \end{aligned} \tag{2.4'}$$

*) p. 64.

Să considerăm și parantezele

$$(X_i X_j) = c_{ij}^s X_s + c_{ij}^\alpha X_\alpha . \tag{2.5}$$

Identitățile $(X_i X_j X_\alpha) = 0$ ne dau

$$(X_i X_j) = 0 \tag{2.6}$$

și, ținînd seama de ecuațiile (2.4), rezultă că putem lua

$$X_i = \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

expresiile operatorilor X_α rămînînd neschimbate. Spațiul A_3 corespunzător este deci de conexiune constantă și, ținînd seama de transformările X_α, avem

$$\begin{gathered}\Gamma_{2k}^i \delta_j^1 + \Gamma_{j2}^i \delta_k^1 - \Gamma_{jk}^1 \delta_2^i = 0,\\ \Gamma_{1k}^i \delta_j^2 + \Gamma_{j1}^i \delta_k^2 - \Gamma_{jk}^2 \delta_1^i = 0,\\ \sigma_1 - \sigma_2 = 0 \ , \ \sigma_3 = 0,\end{gathered} \tag{2.7}$$

unde σ_m sînt dați de formulele (1.7). Din ecuațiile (2.7) rezultă că toate componentele Γ_{jk}^i ale conexiunii sînt nule și în acest caz spațiul este euclidian.

Presupunem acum $p = 0$. Alegînd convenabil operatorii X_i avem

$$(X_1 X_6) = X_1, (X_2 X_6) = -X_2, (X_3 X_6) = c_{36}^6 X_6 + c_{36}^7 X_7,$$

$$(X_3 X_4) = c_{34}^\delta X_\delta \ (\delta \neq 4)$$

Identitățile $(X_i X_6 X_\beta) = 0$, $(\beta = 4, 5, 6)$ ne dau

$$(X_1 X_4) = X_2 \ , \ (X_1 X_5) = 0 \ , \quad (X_1 X_6) = X_1 \ , \quad (X_1 X_7) = X_1,$$

$$(X_2 X_4) = 0 \ , \quad (X_2 X_5) = X_1 \ , \ (X_2 X_6) = -X_2 \ , \ (X_2 X_7) = X_2,$$

$$(X_3 X_4) = 0 \ , \ (X_3 X_5) = c_{35}^5 X_5 \ , (X_3 X_6) = c_{36}^7 X_7, (X_3 X_7) = c_{37}^6 X_6 + c_{37}^7 X_7 ,$$

iar identitățile $(X_3 X_4 X_7) = 0$, $(X_3 X_4 X_5) = 0$ ne dau $c_{35}^5 = c_{36}^7 = c_{37}^6 = 0$.

Identitățile $(X_i X_j X_6) = 0$, $(X_i X_j X_7) = 0$ ne dau

$$(X_1 X_2) = 0, \ (X_2 X_3) = c_{23}^2 X_2 \ , \ (X_1 X_3) = c_{13}^1 X_1 \ , \ c_{37}^7 = 0$$

iar din identitatea $(X_1 X_3 X_4) = 0$ rezultă $c_{23}^2 = c_{13}^1$.

Făcînd schimbarea de operatori

$$\overline{X}_1 = X_1, \overline{X}_2 = X_2, \overline{X}_3 = X_3 - c_{23}^2 X_7,$$

obținem

$$(\overline{X}_i \ \overline{X}_j) = 0$$

și se arată, ca și mai sus, că putem lua

$$\overline{X}_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Spațiul A_3 corespunzător este cu conexiune constantă. Ținînd seama de transformările X_α, rezultă că toate componentele conexiunii acestui spațiu sînt nule în afară de

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \alpha + \beta, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = \alpha - \beta, \quad \Gamma^3_{33} = \gamma$$

și acest spațiu are un grup de automorfisme cu 9 parametri [33] *).

Putem enunța

T e o r e m a 2. *Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale* (III) *sînt euclidiene dacă $p \neq 0, -2$; iar dacă $p = 0, -2$ sînt spații A_3 care au un grup cu 9 parametri.*

3. Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale (IV)

Transformările infinitezimale ale grupului de stabilitate sînt

$$(\mathrm{IV})\ X_4 = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \ X_5 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}, X_6 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + pU, X_7 = x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + q\,U,$$

iar ecuațiile sale de structură se scriu

$$\begin{aligned} &(X_4 X_5) = 0\ ,\ (X_4 X_7) = X_4\ ,\qquad (X_5 X_7) = X_5, \\ &(X_4 X_6) = 0\ ,\ (X_5 X_6) = -X_5\ ,\ (X_6 X_7) = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Să vedem ce condiții impune tensorului de curbură și tensorului de torsiune transformarea X_6. Formulele (4) se scriu pentru această transformare

$$\begin{aligned} &(1+p)\,\tau_1 + p\,\tau_2 + p\,\tau_3 = 0, \\ &(1+p)\,\Sigma_1 + p\,\Sigma_2 + p\,\Sigma_3 = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

unde τ_i și Σ_i au semnificația dată de formulele (2. 2). Din formulele (3.2) rezultă că dacă $p \neq 0, 1, -1$, toate componentele tensorului de torsiune sînt nule în origine iar dacă $p \neq 0, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, toate componentele tensorului de curbură sînt nule în origine. Rezultă

T e o r e m a 3. *Spațiile A_3 al căror grup de stabilitate conține transformarea infinitezimală $x^1 \dfrac{\partial f}{\partial x^1} + pU$ sînt euclidiene dacă $p \neq 0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.*

*) p. 53.

Spațiul admițînd transformările X_1 și X_5 avem

$$\begin{aligned} &T^i_{2k}\,\delta^3_j + T^i_{j2}\,\delta^3_k - T^3_{jk}\,\delta^i_2 = 0,\\ &T^i_{2k}\,\delta^1_j + T^i_{j2}\,\delta^1_k - T^1_{jk}\,\delta^i_2 = 0,\\ &\Gamma^i_{2kl}\,\delta^3_j + \Gamma^i_{j2l}\,\delta^3_k + \Gamma^i_{jk2}\,\delta^3_l - \Gamma^3_{jkl}\,\delta^i_2 = 0,\\ &\Gamma^i_{2kl}\,\delta^1_j + \Gamma^i_{j2l}\,\delta^1_k + \Gamma^i_{jk2}\,\delta^1_l - \Gamma^1_{jkl}\,\delta^i_2 = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

și vom avea următoarele relații pentru componentele T^i_{jk}, Γ^i_{jkl} calculate în origine

$$\begin{aligned} &T^1_{12} = T^1_{23} = T^3_{21} = T^3_{32} = 0,\\ &T^2_{21} = T^3_{31}, \quad T^2_{23} = T^1_{13},\\ &\Gamma^1_{112} = \Gamma^1_{221} = \Gamma^1_{223} = \Gamma^1_{213} = \Gamma^1_{312} = \Gamma^1_{123} = \Gamma^1_{332} = 0,\\ &\Gamma^2_{221} = \Gamma^2_{223} = 0,\\ &\Gamma^3_{221} = \Gamma^3_{223} = \Gamma^3_{332} = \Gamma^3_{112} = \Gamma^3_{132} = \Gamma^3_{231} = \Gamma^3_{321} = 0,\\ &\Gamma^2_{213} + \Gamma^2_{123} = \Gamma^3_{331}, \quad \Gamma^2_{213} + \Gamma^2_{123} = \Gamma^1_{113},\\ &\Gamma^2_{112} = \Gamma^3_{113}. \qquad \Gamma^2_{332} = \Gamma^1_{331}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ținînd seama de transformarea X_7 avem formule analoge cu (3.2) (se schimbă indicii 1 cu 2 între ei)

$$\begin{aligned} &p\ \tau_1 + (1+p)\ \tau_2 + p\ \tau_3 = 0,\\ &p\ \Sigma_1 + (1+p)\ \Sigma_2 + p\ \Sigma_3 = 0. \end{aligned} \tag{3.2'}$$

Din ecuațiile (3.2), (3.2') și (3.4) rezultă că toate componentele tensorului de torsiune și ale tensorului de curbură sînt nule în afară de cazurile $p = -1$, $q = 1$; $p = -1$, $q = \frac{1}{2}$; $p = -\frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$; $p = -\frac{1}{2}$, $q = 0$; $p = -1$, $q = 0$; $p = 0$, $q = 0$. Cazurile $p = -1$, $q = -\frac{1}{2}$ și $p = -\frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ nu sînt distincte. Într-adevăr, transformările X_6 și X_7 se scriu, abstracție făcînd de anumiți factori constanți,

$$X_6 = x^2\frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial f}{\partial x^3},\quad X_7 = x^1\frac{\partial f}{\partial x^1} + 3\,x^2\frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial f}{\partial x^3}, \tag{3.5}$$

respectiv

$$X'_6 = x^1\frac{\partial f}{\partial x^1} - x^3\frac{\partial f}{\partial x^3},\quad X'_7 = x^1\frac{\partial f}{\partial x^1} + 3\,x^2\frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial f}{\partial x^3}. \tag{3.5'}$$

Putem lua în locul operatorului X'_6 suma $X'_6 + X'_7$ și atunci avem în al doilea caz transformările

$$X''_6 = x^1\frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial f}{\partial x^2},\quad X'_7 = x^1\frac{\partial f}{\partial x^1} + 3\,x^2\frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial f}{\partial x^3}. \tag{3.5''}$$

care se obțin din transformările (3.5) schimbînd între ele variabilele x^1 și x^3, schimbare care păstrează ansamblul operatorilor X_4 și X_5

La fel se arată că și cazurile $p = -1, q = 0$ și $p = 0, q = 0$ coincid. Dacă avem $p = -1, q = 1$ tensorul de curbură are toate componentele nule, iar tensorul de torsiune are o singură componentă distinctă nenulă T^2_{13}. Se poate arăta că tensorul derivat al tensorului de torsiune este nul și, prin urmare, avem un spațiu cu torsiune cu grup maxim.

Dacă $p = -1, q = \frac{1}{2}$, tensorul de torsiune are toate componentele nule iar tensorul de curbură are o singură componentă distinctă nenulă Γ^2_{113}. Se arată cu ușurință că tensorul derivat al tensorului de curbură este nul. Regăsim deci spațiile neproiectiv euclidiene fără torsiune cu grup maxim cu 8 parametri [28]. Să considerăm și cele două cazuri rămase. Dacă $p = q = 0$ transformările X_6 și X_7 se scriu $X_6 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}$, $X_7 = x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}$. Alegînd convenabil operatorii principali X_i și considerînd toate identitățile $(X_i X_\alpha X_\beta) = 0$, $(X_i X_j X_\alpha) = 0$, avem

$$\begin{aligned}
&(X_1 X_4) = 0 \ , \quad (X_1 X_5) = X_2 \ , \quad (X_1 X_6) = X_1 , \ (X_1 X_7) = 0, \\
&(X_2 X_4) = 0 \ , \quad (X_2 X_5) = 0 \ , \quad (X_2 X_6) = 0, \quad (X_2 X_7) = X_2, \\
&(X_3 X_4) = X_2 \ , \ (X_3 X_5) = 0 \ , \quad (X_3 X_6) = 0, \quad (X_3 X_7) = 0, \\
&(X_1 X_2) = 0 \ , \quad (X_2 X_3) = \lambda X_2 , (X_1 X_3) = \lambda X_1 .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Putem satisface această structură luînd

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1}, X_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2}, X_3 = \frac{\partial f}{\partial x^3} + \lambda U \tag{3.6'}$$

și componentele nenule ale conexiunii spațiului A_3 corespunzător sînt

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \frac{\alpha + \beta}{1 + \lambda x^3}, \ \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = \frac{\alpha - \beta}{1 + \lambda x^3}, \ \Gamma^3_{33} = \frac{2\alpha}{1 + \lambda x^3} \tag{3.6''}$$

și acest spațiu are un grup de automorfisme cu 9 parametri [33]. Rezultă

T e o r e m a 4. *Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale* (IV) *sînt sau spații euclidiene sau spații cu grup maxim dacă nu avem $p = -\frac{1}{2}$, $q = 0$.*

Dacă $p = -\frac{1}{2}$, $q = 0$, alegînd convenabil operatorii principali X_i și ținînd seama de identitățile $(X_i X_\alpha X_\beta) = 0$, rezultă pentru parantezele $(X_i X_\alpha)$ expresiile

$$\begin{aligned}
&(X_1 X_4) = 0 \ , \ (X_1 X_5) = X_2 , (X_1 X_6) = \ \tfrac{1}{2} X_1 , \ (X_1 X_7) = 0, \\
&(X_2 X_4) = 0 \ , \ (X_2 X_5) = 0, \ (X_2 X_6) = -\tfrac{1}{2} X_2 , \ (X_2 X_7) = X_2, \\
&(X_3 X_4) = X_2 , (X_3 X_5) = 0 \ , \ (X_3 X_6) = -\tfrac{1}{2} X_3 , \ (X_3 X_7) = 0.
\end{aligned} \tag{3,6'''}$$

Identitățile $(X_i X_j X_\alpha) = 0$, $(X_1 X_2 X_3) = 0$ ne dau

$$(X_1 X_2) = -\rho X_4, \ (X_2 X_3) = \rho X_5, \ (X_1 X_3) = 2\rho X_6 + \rho X_7 . \tag{3.6^{IV}}$$

Putem satisface această structură luînd

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1} + \rho x^3 U, \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial x^3} + \rho x^1 U \tag{3.7}$$

iar transformările X_6 și X_7 le putem lua $X_6 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}$, $X_7 = x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}$.

Dacă $\rho = 0$ operatorii X_i determină un grup simplu tranzitiv abelian și, ținînd seama de ecuațiile (3.6), putem lua $X_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ și spațiul este un spațiu cu conexiune afină constantă. Ținînd seama de transformările X_6, X_7, rezultă că toate componentele conexiunii sînt nule și, prin urmare, spațiul este euclidian. Vom presupune deci $\rho \neq 0$. Componentele conexiunii spațiului A_3, care admite grupul de mai sus drept grup de transformări în el însuși, satisface în primul rînd condițiile

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^2} = 0$$

și, ținînd seama că spațiul admite transformările X_4, X_5, X_7, ecuațiile (α) ne dau

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^1_{33} = 0,\\
&\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{22} = 0,\\
&\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^2_{33} = 0,\\
&\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23}\ , \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32}\ , \quad \Gamma^3_{33} = \Gamma^1_{13} + \Gamma^1_{31}\ ,\\
&\Gamma^3_{13} = \Gamma^2_{12}\ , \quad \Gamma^3_{31} = \Gamma^2_{21}\ , \quad \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{21}\ .
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Spațiul admițînd transformările X_1, X_2 și X_6, avem

$$\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1}(1 + \rho\, x^1 x^3) + \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^3}\rho (x^3)^2 + \rho\, x^3\, \Gamma^1_{11} = 0,$$

$$\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1}\rho\,(x^1)^2 + \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^3}(1 + \rho x^1 x^3) + 2\,\rho\, x^1\, \Gamma^1_{11} + \rho\, x^3\, \Gamma^3_{33} = 2\rho, \tag{3.9}$$

$$x^1 \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^1} - x^3 \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial x^3} = -\Gamma^1_{11}.$$

Dacă înmulțim prima ecuație (9.9) cu x^1 și a doua cu x^3 și le scădem ținînd seama de a treia ecuație, obținem

$$(1 + \rho x^1 x^3)\, \Gamma^1_{11} + \rho\,(x^3)^2\, \Gamma^3_{33} = 2\rho x^3. \tag{3.9'}$$

În mod asemănător găsim ecuația

$$\rho\,(x^1)^2\, \Gamma^1_{11} + (1 + \rho\, x^1 x^3)\, \Gamma^3_{33} = 2\rho x^1 \tag{3.9''}$$

și, dacă rezolvăm sistemul (3.9′) și (3.9″), rezultă

$$\Gamma^1_{11} = \frac{2\rho x^3}{1 + 2\rho x^1 x^3}, \quad \Gamma^3_{33} = \frac{2\rho x^1}{1 + 2\rho x^1 x^3}. \tag{3.10}$$

Procedînd în același fel găsim

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \frac{\rho x^1}{1 + 2\rho x^1 x^3}, \tag{3.10′}$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = \frac{\rho x^3}{1 + 2\rho x^1 x^3}.$$

Conexiunea spațiului considerat se poate scrie

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j, \tag{3.11}$$

unde

$$\varphi_1 = \frac{\rho x^3}{1 + 2\rho x^1 x^3}, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = \frac{\rho x^1}{1 + 2\rho x^1 x^3}. \tag{3.11′}$$

Spațiul este proiectiv euclidian iar componentele vectorului sînt derivatele parțiale ale funcției

$$\psi = \frac{1}{2} \ln (1 + 2\rho x^1 x^3) \tag{3.12}$$

și, după un rezultat al lui P. A. Ș i r o k o v, rezultă că spațiul este simetric. Grupul de automorfisme al acestui spațiu are, după cum a arătat Ș i r o k o v, $n^2 - n\ (m-1) + \frac{m(m-1)}{2}$ parametri, m fiind rangul formei pătratice $2\rho\, x^1 x^3$. În cazul nostru $n = 3$, $m = 2$ și prin urmare grupul are 7 parametri. Rezultă

T e o r e m a 4′. *Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale*

$$\text{(IV′)} \qquad x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \ x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \ x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \ x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}$$

au conexiunea dată de formulele (3.11) *și* (3.11′) *și posedă un grup de automorfisme cu 7 parametri avînd transformările infinitezimale* (IV′), (3.7).

În general, spațiile A_n $(n \geqslant 3)$ cu conexiunea (3.11) unde

$$\varphi_1 = \frac{\rho x^2}{1 + 2\rho x^1 x^2}, \quad \varphi_2 = \frac{\rho x^1}{1 + 2\rho x^1 x^3}, \quad \varphi_3 = \ldots = \varphi_n = 0 \tag{3.11″}$$

posedă un grup de automorfisme cu $n^2 - n + 1$ parametri, după cum ne arată teorema lui P. A. Ș i r o k o v [34].

4. Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale (V)

Transformările infinitezimale ale grupului de stabilitate sînt

$$(V)\quad X_4 = x^3\frac{\partial f}{\partial x^1},\ X_5 = x^3\frac{\partial f}{\partial x^2},\ X_6 = x^2\frac{\partial f}{\partial x^1} + pU,\quad X_7 = x^2\frac{\partial f}{\partial x^2} + qU$$

iar ecuațiile sale de structură se scriu

$$\begin{aligned}&(X_4X_5) = 0,\quad (X_4X_7) = 0,\ (X_5X_7) = X_5,\\ &(X_4X_6) = X_4,\ (X_5X_6) = 0,\ (X_6X_7) = 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Vrem să arătăm că există un spațiu A_3 cu grup tranzitiv $\mathfrak{G}_7$ avînd grupul de stabilitate (V) numai dacă $p = q = 0$. Ne vom ocupa mai întîi de acest caz.

1° Presupunînd deci că avem grupul de stabilitate (V) cu $p = q = 0$, parantezele (X_iX_α) se vor scrie

$$\begin{aligned}&(X_1X_4) = c^\alpha_{14}X_\alpha,\qquad (X_1X_5) = c^\alpha_{15}X_\alpha,\\ &(X_2X_4) = c^\alpha_{14}X_\alpha,\qquad (X_2X_5) = c^\alpha_{25}X_\alpha,\\ &(X_3X_4) = X_1 + c^\alpha_{34}X_\alpha,\ (X_3X_5) = X_2 + c^\alpha_{35}X_\alpha,\\ &(X_1X_6) = X_1 + c^\alpha_{16}X_\alpha,\ (X_1X_7) = c^\alpha_{17}X_\alpha,\\ &(X_2X_6) = c^\alpha_{26}X_\alpha,\qquad (X_2X_7) = X_2 + c^\alpha_{27}X_\alpha,\\ &(X_3X_6) = c^\alpha_{36}X_\alpha,\qquad (X_3X_7) = c^\alpha_{37}X_\alpha.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Dacă facem schimbarea de operatori

$$\overline{X}_i = X_i + a_iX_4 + b_iX_5 + c_iX_6 + d_iX_7,\tag{4.3}$$

obținem

$$\begin{aligned}(\overline{X}_1, X_6) &= \overline{X}_1 + c^4_{16}X_4 + (c^5_{16} - b_1)X_5 + (c^6_{16} - c_1)X_6 + (c^7_{16} - d_1)X_7,\\ (\overline{X}_2, X_7) &= \overline{X}_2 + c^5_{27}X_5 + (c^4_{27} - a_2)X_4 + (c^6_{27} - c_2)X_6 + (c^7_{27} - d_2)X_7,\\ (\overline{X}_3, X_6) &= (a_3 + c^4_{36})X_4 + c^5_{36}X_5 + c^6_{36}X_6 + c^7_{36}X_7,\\ (\overline{X}_3, X_7) &= (b_3 + c^5_{37})X_5 + c^4_{37}X_4 + c^6_{37}X_6 + c^7_{37}X_7,\\ (\overline{X}_3X_4) &= \overline{X}_1 + (-c_3 - a_1 + c^4_{34})X_4 + (c^5_{34} - b_1)X_5 + (c^6_{34} - c_1)X_6 +\\ &\quad + (c^7_{34} - d_1)X_7,\\ (\overline{X}_3, X_5) &= \overline{X}_2 + (-d_3 - b_2 + c^5_{35})X_5 + (c^4_{35} - a_2)X_4 + (c^6_{35} - c_2)X_6 +\\ &\quad + (c^7_{35} - d_2)X_7\end{aligned}$$

și dacă luăm

$$a_1 + c_3 = c_{34}^4\,,\quad a_2 = c_{27}^4\,,\quad b_1 = c_{16}^5\,,\quad b_2 + d_3 = c_{35}^5\,,\quad a_3 = -c_{36}^4\,,$$
$$c_1 = c_{16}^6\,,\quad c_2 = c_{27}^6\,,\quad d_1 = c_{16}^7\,,\qquad d_2 = c_{27}^7\,,\quad b_3 = -c_{36}^5\,,$$

formulele (4.2) devin

$$\begin{aligned}
&(X_1 X_4) = c_{14}^{\alpha} X_\alpha\,, && (X_1 X_5) = c_{15}^{\alpha} X_\alpha\,,\\
&(X_2 X_4) = c_{24}^{\alpha} X_\alpha\,, && (X_2 X_5) = c_{25}^{\alpha} X_\alpha\,,\\
&(X_3 X_4) = X_1 + c_{34}^{\alpha_1} X_{\alpha_1}\,, && (X_3 X_5) = X_2 + c_{35}^{\alpha_2} X_{\alpha_2}\,,\\
&(X_1 X_6) = X_1 + c_{16}^4 X_4\,, && (X_1 X_7) = c_{17}^{\alpha} X_\alpha\,,\\
&(X_2 X_6) = c_{26}^{\alpha} X_2\,, && (X_2 X_7) = X_2 + c_{27}^5 X_5\,,\\
&(X_3 X_6) = c_{36}^{\alpha_1} X_{\alpha_1}\,, && (X_3 X_7) = c_{37}^{\alpha_2} X_{\alpha_2}\,,
\end{aligned} \qquad (4.2')$$

$(\alpha_1 \neq 4,\ \alpha_2 \neq 5)$.

Mai dispunem de o transformare de operatori de forma

$$\overline{X}_1 = X_1 + a X_4\,,\quad \overline{X}_2 = X_2 + b X_5\,,\quad \overline{X}_3 = X_3 - a X_6 - b X_7\,. \qquad (4.3')$$

Identitățile $(X_i X_6 X_7) = 0$ ne dau

$$(X_1 X_7) = c_{17}^4 X_4\,,\ (X_2 X_6) = c_{26}^5 X_5\,,\ c_{36}^5 = c_{37}^4 = 0$$

și ținînd seama de aceste expresii identitățile $(X_i X_4 X_6) = 0$, $(X_i X_4 X_7) = 0$, $(X_i X_5 X_6) = 0$ și $(X_i X_5 X_7) = 0$ ne dau

$$(X_1 X_4) = 0,\ (X_1 X_5) = 0,\ (X_1 X_6) = X_1 + c_{16}^4 X_4\,,$$
$$(X_2 X_4) = 0,\ (X_2 X_5) = 0,\ (X_2 X_6) = + c_{26}^5 X_5\,,$$
$$(X_3 X_4) = X_2,\ (X_3 X_5) = X_2,\ (X_3 X_6) = - c_{16}^4 X_6 - c_{26}^5 X_7\,,$$
$$(X_1 X_7) = c_{17}^4 X_4\,,\ (X_2 X_7) = X_2 + c_{27}^5 X_5\,,\ (X_3 X_7) = - c_{17}^4 X_6 - c_{27}^5 X_7\,. \qquad (2''.4)$$

Să considerăm acum și parantezele

$$(X_i X_j) = c_{ij}^s X_s + c_{ij}^{\alpha} X_\alpha\,.$$

Identitățile $(X_i X_j X_6) = 0$, $(X_i X_j X_7) = 0$ ne dau

$$(X_1 X_2) = 0,\ (X_2 X_3) = \lambda X_2 + \mu X_5\,,\ (X_1 X_3) = \nu X_1 + \rho X_4\,, \qquad (4.4)$$
$$c_{16}^4 = c_{26}^5 = c_{17}^4 = c_{27}^5 = 0$$

Făcînd o schimbare de operatori (4.3') cu $a = \nu/2$, $b = \lambda/2$ obținem

$$(\overline{X}_1, \overline{X}_2) = 0,\ (\overline{X}_2, \overline{X}_3) = \overline{\mu} X_5\,,\ (\overline{X}_1, \overline{X}_3) = \overline{\rho} X_4\,. \qquad (4.4')$$

Grupul de automorfisme al spațiului are ca ecuații de structură ecuațiile (4.4) și ecuațiile

$$\begin{aligned} &(X_1 X_4) = 0, \quad (X_1 X_5) = 0, \quad (X_1 X_6) = X_1, \quad (X_1 X_7) = 0, \\ &(X_2 X_4) = 0, \quad (X_2 X_5) = 0, \quad (X_2 X_6) = 0, \quad (X_2 X_7) = X_2, \\ &(X_3 X_4) = X_1, \quad (X_3 X_5) = X_2, \quad (X_3 X_6) = 0, \quad (X_3 X_7) = 0, \\ &(X_1 X_2) = 0, \quad (X_2 X_3) = \mu X_5, \quad (X_1 X_3) = \rho X_4. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Menționăm o teoremă dată de E. Cartan [35].

Teoremă. *Fiind dat un grup tranzitiv având structura*

$$(X_i X_j) = c_{ij}^{\alpha} X_\alpha, \quad (X_i X_\beta) = a_{i\beta}^{j} X_j, \quad (X_\beta X_\gamma) = c_{\beta\gamma}^{\alpha} X_\alpha,$$

există întotdeauna un spațiu A_n simetric care posedă acest grup drept grup de transformări în el însuși.

Prin urmare, în cazul de mai sus există un spațiu A_3 fără torsiune și având tensorul derivat al tensorului de curbură nul, care are drept grup de automorfisme, grupul cu structura (4.4), (4.5). Pe lîngă acest spațiu mai pot exista și alte spații A_3 care să admită acest grup.

Parantezele $(X_i X_\alpha)$ ne arată că expresiile operatorilor X_i sînt de forma

$$\begin{aligned} &X_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^3 A \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 B \frac{\partial f}{\partial x^2}, \\ &X_3 = \frac{\partial f}{\partial x^3} + x^1 C \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 (A + C - B) \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 (A + C) \frac{\partial f}{\partial x^3}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

unde A, B și C sînt funcții de variabila x^3. Schimbarea de variabile

$$\bar{x}^1 = x^1 \varpi(x^3), \quad \bar{x}^2 = x^2 \varpi(x^3), \quad \bar{x}^3 = x^3 \varpi(x^3) \tag{4.7}$$

păstrează expresiile transformărilor X_α. Transformarea X_1 se scrie

$$X_1 = (1 + x^3 A) \varpi \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^1}$$

și putem folosi funcția ϖ pentru a avea

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^1}.$$

Vom presupune deci de la început că $A = 0$. Atunci expresiile (4.6) ale operatorilor principali vor fi

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 B \frac{\partial f}{\partial x^2} \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial x^3} + CU - x^2 B \frac{\partial f}{\partial x^2} \tag{4.6'}$$

și, ținînd seama de ecuațiile de structură

$$(X_1 X_3) = \rho X_4, \qquad (X_2 X_3) = \mu X_5,$$

obținem

$$C = \rho x^3, \; C - 2B - x^3 B^2 - x^3 (1 + x^3 C) B' = \mu x^3.$$

Prin urmare, funcția B este o integrală olomorfă în origine a ecuației Riccati

$$(1 + \rho (x^3)^2) B' + \frac{2}{x^3} B + B^2 = \rho - \mu. \tag{4.8}$$

Dacă facem schimbarea de funcție [36]

$$u = x^3 \, e^{\int \frac{B dx^3}{1 + \rho (x^3)^2}}, \tag{4.9}$$

ecuația (4.8) devine

$$u'' = \frac{\rho - \mu}{(1 + \rho (x^3)^2)^2} u. \tag{4.10}$$

Membrul al doilea al acestei ecuații este o funcție olomorfă în vecinătatea sistemului de valori $u = 0$, $x^3 = 0$. Din teorema de existență a lui Cauchy [37]*), rezultă că ecuația (4.10) admite o integrală olomorfă în origine care pentru $x^3 = 0$ se reduce la $u = 0$. Această integrală va fi deci de forma

$$u = a_1 x^3 + a_2 (x^3)^2 + a_3 (x^3)^3 + a_4 (x^3)^4 + \ldots, \tag{4.10'}$$

în care $a_1, a_2, \ldots$ sînt constante.
Introducînd această valoare a lui u în ecuația (4.10), obținem

$$[1 + 2 \rho (x^3)^2 + \rho^2 (x^3)^4] [2 a_2 + 6 a_3 x^3 + 12 a_4 (x^3)^2 + 20 a_5 (x^3)^3 + \\ + \ldots] = (\rho - \mu) [a_1 x^3 + a_2 (x^3)^2 + a_3 (x^3)^3 + \ldots]$$

și identificînd coeficienții în primul rînd rezultă

$$a_2 = a_4 = \ldots = a_{2n} = \ldots = 0,$$

iar în al doilea rînd obținem toți ceilalți coeficienți a_i în funcție de a_i pe care-l putem lua egal cu 1. Prin urmare, u este o funcție impară de x^3

$$u = x^3 + a_2 (x^3)^3 + \ldots + a_{2n+1} (x^3)^{2n+1} + \ldots \tag{4.10''}$$

Ținînd seama de transformarea (4.9),

$$B = (1 + \rho (x^3)^2) (2 a_2 x^3 + 4 b_5 (x^3)^3 + \ldots). \tag{4.10'''}$$

*) p. 379.

Prin urmare, ecuația (4.8) admite o integral olomorfă în origine care este nulă pentru $x^3 = 0$.

Scriind ecuațiile (α) pentru toate transformările grupului $\mathfrak{G}_7$, obținem expresia componentelor conexiunii spațiului A_3 corespunzător. Găsim că singurele componente nenule sînt

$$\Gamma^1_{13} = \frac{\rho x^3 + \alpha + \beta}{M}, \quad \Gamma^1_{31} = \frac{\rho x^3 + \alpha - \beta}{M}, \quad \Gamma^2_{33} = \frac{2(\rho x^3 + \alpha)}{M},$$

$$\Gamma^2_{23} = \frac{\rho x^3 - B + \alpha + \gamma}{M}, \quad \Gamma^2_{32} = \frac{\rho x^3 - B + \alpha - \gamma}{M}, \quad \Gamma^2_{33} = 2\frac{x^2 B}{x^3 M}, \tag{4.11}$$

unde $M = 1 + \rho (x^3)^2$, iar α, β și γ sînt constante.

Dacă $\rho = \mu$, putem lua $B = 0$; dacă, în plus mai avem și $\beta = \gamma$, atunci spațiul are un grup cu 9 parametri [33]. Trebuie deci să presupunem îndeplinind cel puțin una din condițiile

$$\rho \neq \mu, \quad \beta \neq \gamma. \tag{4.12}$$

Fie mai întîi $\rho \neq \mu$.

Componentele nenule ale tensorului de curbură și ale tensorului său derivat sînt

$$\Gamma^1_{313} = -\Gamma^1_{331} = \frac{\rho + (\alpha - \beta)^2}{M^2},$$

$$\Gamma^2_{323} = -\Gamma^2_{332} = \frac{\mu + (\alpha - \gamma)^2}{M^2},$$

$$\Gamma^1_{313,3} = -\Gamma^1_{331,3} = \frac{4\alpha(\rho + (\alpha - \beta)^2)}{M^3}, \tag{4.13}$$

$$\Gamma^2_{323,3} = -\Gamma^2_{332,3} = \frac{4\alpha(\mu + (\alpha - \gamma)^2)}{M^3}.$$

Dacă spațiul nu are torsiune ($\beta = \gamma = 0$), el nu poate fi proiectiv euclidian deoarece tensorul de curbură al lui Weyl are componente nenule, de exemplu

$$K^1_{313} = \frac{1}{2}\frac{\rho - \mu}{M^2}.$$

Dacă $\alpha = \beta = \gamma = 0$ spațiul este simetric în sensul lui Cartan și componentele nenule ale conexiunii sînt

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = 1/2\,\Gamma^3_{33} = \frac{\rho x^3}{M}, \quad \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \frac{\rho x^3 - B}{M}, \quad \Gamma^2_{33} = 2\frac{x^2 B}{x^3 M}, \tag{4.11'}$$

unde B este o integrală olomorfă în origine a ecuației (4.8).

Pentru a găsi grupul de automorfisme al spațiului vom folosi mai întîi legea de transformare a tensorului de curbură și a tensorului său derivat

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^i_{rst} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^l} - \Gamma^r_{jkl} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} = 0, \\ \bar{\Gamma}^i_{rst,h} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^l} \frac{\partial \bar{x}^u}{\partial x^h} - \Gamma^r_{jkl,h} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} = 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Dînd indicilor i, j, k, l, h pe rînd valorile 1, 3, 1, 3, 3; 2, 3, 2, 3, 3; 1, 3, 2, 3, 3; 2, 3, 1, 3, 3; 1, 3, 1, 3, 3; 2, 3, 2, 3, 3, obținem

$$\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} = \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} = \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} = \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} = 0, \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} = \frac{\bar{M}}{M}$$

și integrînd rezultă că ecuațiile finite ale grupului de automorfisme ale spațiului sînt de forma

$$\bar{x}^1 = \bar{x}^1 (x^1, x^3), \bar{x}^2 = \bar{x}^2 (x^2, x^3), \bar{x}^3 = \frac{x^3 + a^3}{1 - \rho a^3 x^3}. \tag{4.15}$$

Din legea de transformare a conexiunii

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^i \partial x^k} = \bar{\Gamma}^i_{rs} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^k} - \Gamma^r_{jk} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \tag{4.16}$$

avem pentru $i = 1$

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^1}{\partial x^1 \partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{x}^1}{\partial x^1 \partial x^3} = \left(\bar{\Gamma}^1_{13} \frac{\bar{M}}{M} - \Gamma^1_{13} \right) \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^1}{\partial x^3 \partial x^3} = \left[\left(\bar{\Gamma}^1_{13} + \bar{\Gamma}^1_{31} \right) \frac{\bar{M}}{M} - \Gamma^3_{33} \right] \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3}$$

și rezultă

$$\bar{x}^1 = x^1 \chi (x^3) + \theta (x^3),$$

unde funcțiunile χ și θ sînt integralele generale ale ecuațiilor

$$\chi' = \frac{\rho a^3}{1 - \rho a^3 x^3} \chi, \quad \theta'' = \frac{2 \rho a^3}{1 - \rho a^3 x^3} \theta'.$$

Integrînd aceste ecuații obținem

$$\bar{x}^1 = \frac{a^1_1 x^1 + a^1_3 x^3 + a^1}{1 - \rho a^3 x^3}. \tag{4.15'}$$

Dînd indicelui i valoare 2, avem din formulele (16.4)

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^2}{\partial x^2 \partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{x}^2}{\partial x^2 \partial x^3} = \left(\bar{\Gamma}^2_{23} \frac{\bar{M}}{M} - \Gamma^2_{23} \right) \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^2}{\partial x^3 \partial x^3} = \left((\bar{\Gamma}^2_{23} + \bar{\Gamma}^2_{32}) \frac{\bar{M}}{M} - \Gamma^3_{33} \right) \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} + \bar{\Gamma}^2_{33} \left(\frac{\bar{M}}{M} \right)^2 - \Gamma^2_{33} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}$$

și rezultă

$$\bar{x}^2 = x^2 \varphi (x^3) + \psi (x^3),$$

unde funcțiile φ și ψ sînt integralele generale ale ecuațiilor

$$\varphi' = \left(\frac{\rho a^3}{1 - \rho a^3 x^3} + \frac{B - \bar{B}}{M} \right) \varphi, \tag{4.17}$$

$$\psi'' = \left(\frac{2 \rho a^3}{1 - \rho a^3 x^3} - \frac{2\bar{B}}{M} \right) \psi' + 2 \frac{\bar{B} \bar{M}}{\bar{x}^3 M^2} \psi.$$

Ecuațiile grupului de automorfisme ale spațiului sînt deci

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= \frac{a^1_1 x^1 + a^1_3 x^3 + a^1}{1 - \rho a^3 x^3}, \\ \bar{x}^2 &= x^2 \varphi (x^3) + \psi (x^3), \\ \bar{x}^3 &= \frac{x^3 + a^3}{1 - \rho a^3 x^3}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

funcțiile φ și ψ fiind date de ecuațiile (4.17). Grupul conține deci în mod efectiv 7 parametri și anume constantele a^1_1, a^1_3, a^1, a^3, o constantă care intră în expresia funcției φ și două constante din expresia funcției ψ.

Dacă $\rho = \mu$, $\beta = 0$, $\beta \neq \gamma$, avem un spațiu cu torsiune și ecuațiile grupului de automorfisme sînt

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= \frac{a^1_1 x^1 + a^1_3 x^3 + a^1}{1 - \rho a^3 x^3}, \\ \bar{x}^2 &= \frac{a^2_2 x^2 + a^2_3 x^3 + a^2}{1 - \rho a^3 x^3}, \\ \bar{x}^3 &= \frac{x^3 + a^3}{1 - \rho a^3 x^3}. \end{aligned} \tag{4.18'}$$

Dacă $\rho = \mu = 0$, spațiul are conexiunea constantă, componentele nenule fiind

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{13} = \alpha + \beta, \quad \Gamma^1_{31} = \alpha - \beta, \quad \Gamma^3_{33} = 2\alpha, \\ &\Gamma^2_{23} = \alpha + \gamma, \quad \Gamma^2_{32} = \alpha - \gamma, \end{aligned} \tag{4.11''}$$

iar ecuațiile grupului de automorfisme se obțin din ecuațiile (18.4) făcînd $\rho = 0$.

2° Să considerăm, în general, spațiile A_n ($n \geqslant 3$) care au toate componentele conexiunii nule în afară de

$$\Gamma^1_{12} = \frac{\rho x^2 - B + \alpha + \gamma}{M}, \quad \Gamma^1_{21} = \frac{\rho x^2 - B + \alpha - \gamma}{M}, \quad \Gamma^1_{22} = 2\frac{x^1 B}{x^2 M},$$
$$\Gamma^i_{i2} = \frac{\rho x^2 + \alpha + \beta}{M}, \quad \Gamma^i_{2i} = \frac{\rho x^2 + \alpha - \beta}{M}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{2(\rho x^2 + \alpha)}{M}, \tag{4.19}$$

unde i este un indice de numerotare care ia valori de la 3 pînă la n, $M = 1 + \rho (x^2)^2$, iar B este o integrală olomorfă în origine a ecuației

$$(1 + \rho (x^2)^2) B' + \frac{2}{x^2} B + B^2 = \rho - \mu. \tag{4.8'}$$

Grupul de automorfisme ale acestor spații este

$$\bar{x}^1 = x^1 \varphi (x^2) + \psi (x^2),$$
$$\bar{x}^2 = \frac{x^2 + a^2}{1 - \rho a^2 x^2},$$
$$\bar{x}^i = \frac{a^i_2 x^2 + a^i_j x^j + a^i}{1 - \rho a^2 x^2}, \qquad (i, j = 3, \ldots, n), \tag{4.20}$$

avînd

$$\varphi' = \left(\frac{\rho a^2}{1 - \rho a^2 x^2} + \frac{B - \bar{B}}{M}\right)\varphi,$$
$$\psi'' = \left(\frac{2\rho a^2}{1 - \rho a^2 x^2} - \frac{2\bar{B}}{M}\right)\psi' + 2\frac{\bar{B}\bar{M}}{\bar{x}^2 M^2}\psi;$$

acest grup conține $4 + (n - 2)(n - 1) + (n - 2) = n^2 - 2n + 4$ parametri.

Dacă $\beta = \gamma = 0$, componentele nenule ale conexiunii spațiului se pot scrie sub forma

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{\rho x^2 - B + \alpha}{M}, \qquad \Gamma^1_{22} = 2\frac{x^1 B}{x^2 M},$$
$$\Gamma^h_{lk} = -\delta^h_l \varphi_k - \delta^h_k \varphi_l, \qquad (h = 2, \ldots, n; \quad l, k = 1, \ldots, n), \tag{4.21}$$

unde

$$\varphi_2 = -\frac{\rho x^2 + \alpha}{M}, \quad \varphi_1 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_n = 0.$$

Aceste spații sînt spații ale lui Kagan subproiective de ordinul $n - 2$ cu vectorul de conexiune φ_k nenul [38]. După cum a arătat G. Vrănceanu [25] *), aceste spații au un grup de automorfisme cu cel mult $n^2 - 2n + 4$

*) p. 73.

parametri și acest maxim este atins de spațiile A_n care au singurele componente nenule ale conexiunii

$$\Gamma^2_{22} = -2, \quad \Gamma^i_{i2} = \Gamma^i_{2i} = -1. \tag{4.22}$$

Dacă în formulele (4.21) luăm $\rho = 0$, $\alpha = \mu = -1$, atunci

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -(1 + B), \quad \Gamma^1_{22} = 2\frac{x^1}{x^2} B, \tag{4.21}$$

$$\Gamma^h_{lk} = -\delta^h_l \varphi_k - \delta^h_k \varphi_l, \quad (h = 2, \ldots, n; \quad l, k = 1, \ldots, n),$$

unde

$$\varphi_2 = 1, \quad \varphi_1 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_n = 0;$$

ecuația (4.8′) devine

$$B' + \frac{2}{x^2} B + B^2 = 1. \tag{4.8''}$$

Se poate arăta că spațiile date ca exemplu de G. Vrănceanu sînt echivalente cu spațiile cu conexiunea (4.21′), iar formulele de echivalență sînt

$$x'^1 = x^1 m(x^2), \quad x'^h = x^h, \quad (h = 2, \ldots, x), \tag{4.23}$$

unde m este o integrală nenulă a ecuației

$$m' + (B + 1) m = 0. \tag{4.24}$$

Putem lua astfel

$$B = \operatorname{cth} x^2 - \frac{1}{x^2}$$

și avem

$$m = ae^{-x^2} \frac{x^2}{\operatorname{sh} x^2}, \quad (a \neq 0). \tag{4.24'}$$

3° Presupunem acum că spațiul are grupul de stabilitate (V) în care p și q nu sînt ambii nuli. Utilizînd teorema 3, precum și discuția făcută în alineatul precedent, ajungem la următoarele concluzii:

a) Dacă nu ne găsim într-unul din cazurile $p = \pm 1$, $q = \mp 1$; $p = -q = \pm \frac{1}{2}$; $p = -\frac{1}{2}$, $q = 0$; $p = 0$, $q = -\frac{1}{2}$, spațiul este euclidian.

b) $p = 1, q = -1$. Tensorul de curbură este nul, tensorul de torsiune are o singură componentă distinctă nenulă T^1_{23}, iar tensorul derivat al tensorului de torsiune este nul. Avem deci un spațiu A_3 cu torsiune cu grup maxim $\mathfrak{G}_9$.

c) $p = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$. Tensorul de torsiune este nul, tensorul de curbură are componentele nenule $\Gamma^1_{332} = -\Gamma^1_{323}$, iar tensorul derivat al

tensorului de curbură este nul. Avem deci un spațiu A_3 fără torsiune, neproiectiv euclidian cu grup maxim $\mathfrak{G}_8$.

d) $p = -\frac{1}{2}$, $q = 0$. Alegînd convenabil operatorii și ținînd seama de toate identitățile $(X_i X_6 X_\beta) = 0$, $(\beta \neq 6)$, parantezele $(X_i X_\alpha)$ se vor scrie

$$(X_1X_4) = 0 \ , \quad (X_1X_5) = 0 \ , \quad (X_1X_6) = \frac{1}{2} X_1 \ , \quad (X_1X_7) = 0 \ ,$$

$$(X_2X_4) = 0 \ , \quad (X_2X_5) = 0 \ , \quad (X_2X_6) = -\frac{1}{2} X_2, \quad (X_2X_7) = X_2 \ ,$$

$$(X_3X_4) = X_1 \ , \quad (X_3X_5) = X_2 \ , \quad (X_3X_6) = -\frac{1}{2} X_3, \quad (X_3X_7) = 0 \ .$$

Identitățile $(X_2X_3X_6) = 0$, $(X_2X_3X_4) = 0$, $(X_1X_3X_\alpha) = 0$ ne dau $(X_iX_f) = 0$ și putem satisface structura găsită dacă luăm

$$X_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot$$

Spațiul A_3 corespunzător este cu conexiune constantă și, ținînd seama de transformările X_6 și X_7, avem

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 0, \qquad \sigma_2 = 0, \tag{4.25}$$

unde σ_m are expresia dată de formulele (1.8).

Din ecuațiile (4.25) rezultă că toate componentele conexiunii sînt nule, prin urmare spațiul este euclidian.

Rezultă

T e o r e m a 5. *Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale* (V) *(excluzînd cazul $p = q = 0$) sînt spații euclidiene sau spații cu grup maxim cu 9 sau 8 parametri.*

T e o r e m a 6. *Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale*

$$(V') \qquad x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2},$$

sînt spații a căror conexiune este dată de formulele (4.11) *și care au grupul de automorfisme* (4.18) *cu 7 parametri.*

De asemenea, prin generalizarea acestui rezultat avem:

T e o r e m a 6′. *Spațiile $A_n (n \geqslant 3)$ cu conexiunea dată de formulele* (4.19) *sînt spații care au un grup de automorfisme cu $n^2 - 2n + 4$ parametri dat de formulele* (4.20).

5. Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale (VI)

Transformările infinitezimale ale grupului de stabilitate sînt (VI)

$$X_4 = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad X_5 = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_6 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_7 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + cx^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + pU$$

iar ecuațiile sale de structură se scriu

$$\begin{aligned} &(X_4X_5) = 0\ , \quad (X_4X_7) = X_4\ , \ (X_5X_7) = cX_5\ , \\ &(X_4X_6) = X_5, \quad (X_5X_6) = 0\ , \quad (X_6X_7) = (c-1)\,X_6\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Vrem să arătăm că există spații A_3 cu grup tranzitiv $\mathfrak{G}_7$ avînd grupul de stabilitate (VI) numai în cazurile $p = c = -1$, $p = 0$, $c = 1$. Ne vom ocupa mai întîi de aceste cazuri.

1° $p = c = -1$. Expresia operatorului X_7 este

$$(X_7 = -\left(2x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}\right),$$

iar ultimele două ecuații (5.1) se scriu

$$(X_5X_7) = -X_5, \quad (X_6X_7) = -2X_6\,; \tag{5.1'}$$

celelalte ecuații de structură ale grupului sînt

$$\begin{aligned} &(X_1X_4) = c_{14}^{\alpha} X_\alpha\,, && (X_1X_5) = c_{15}^{\alpha} X_\alpha\,, \\ &(X_2X_4) = c_{24}^{\alpha} X_\alpha\,, && (X_2X_5) = c_{15}^{\alpha} X_\alpha\,, \\ &(X_3X_4) = X_1 + c_{34}^{\alpha} X_\alpha\,, && (X_3X_5) = X_2 + c_{35}^{\alpha} X_\alpha\,, \\ &(X_1X_6) = X_2 + c_{16}^{\alpha} X_\alpha\,, && (X_1X_7) = c_{17}^{\alpha} X_\alpha\,, \\ &(X_2X_6) = c_{26}^{\alpha} X_\alpha\,, && (X_2X_7) = -2X_2 + c_{27}^{\alpha} X_\alpha, \\ &(X_3X_6) = c_{36}^{\alpha} X_\alpha\,, && (X_3X_7) = -X_3 + c_{37}^{\alpha} X_\alpha\,, \\ &(X_iX_j) = c_{ij}^{k} X_k + c_{ij}^{\alpha} X_\alpha \end{aligned} \tag{5.2}$$

și dacă facem schimbarea de operatori

$$\begin{aligned} \overline{X}_1 &= X_1 - c_{17}^4 X_4 + c_{17}^5 X_5 + \frac{1}{2} c_{17}^6 X_6 + c_{34}^7 X_7\,, \\ \overline{X}_2 &= X_2 - \frac{1}{3} c_{27}^4 X_4 - c_{27}^5 X_5 + c_{35}^6 X_6 - \frac{1}{2} c_{27}^7 X_7\,, \\ \overline{X}_3 &= X_3 - \frac{1}{2} c_{37}^4 X_4 + c_{37}^6 X_6 - c_{37}^7 X_7\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

ecuațiile (5.2) devin

$$\begin{aligned}
&(X_1X_4) = c_{14}^{\alpha} X_\alpha , && (X_1X_5) = c_{15}^{\alpha} X_\alpha ,\\
&(X_2X_4) = c_{24}^{\alpha} X_\alpha , && (X_2X_5) = c_{25}^{\alpha} X_\alpha ,\\
&(X_3X_4) = X_1 + c_{34}^{\alpha_1} X_{\alpha_1}, && (X_3X_5) = X_2 + c_{35}^{\alpha_2} X_{\alpha_2} ,\\
&(X_1X_6) = X_2 + c_{16}^{\alpha} X_\alpha , && (X_1X_7) = c_{17}^{7} X_7, \qquad (5.2')\\
&(X_2X_6) = c_{26}^{\alpha} X_\alpha , && (X_2X_7) = -2X_2 + c_{27}^{6} X_6 ,\\
&(X_3X_6) = c_{36}^{\alpha} X_\alpha , && (X_3X_7) = -X_3 + 2\mu X_5 ,\\
&(X_iX_j) = c_{ij}^{k} X_k + c_{ij}^{\alpha} X_\alpha , && (\alpha_1 \neq 7,\ \alpha_2 \neq 6).
\end{aligned}$$

Mai dispunem de o transformare de forma

$$\tilde{X}_3 = X_3 + aX_5 . \qquad (5.3')$$

Identitățile $(X_iX_\beta X_7) = 0$ se scriu

$$\begin{aligned}
&[(X_1X_4)\,X_7] - (X_1X_4) + c_{17}^{7} X_4 = 0,\\
&[(X_2X_4)X_7] + (X_2X_4) + c_{27}^{6} X_5 = 0,\\
&[(X_3X_4)\,X_7] = 0,\\
&[(X_1X_5)\,X_7] + (X_1X_5) - c_{17}^{7} X_5 = 0,\\
&[(X_2X_5)\,X_7] + 3\,(X_2X_5) = 0,\\
&[(X_3X_5)\,X_7] + 2\,(X_3X_5) = 0,\\
&[(X_1X_6)\,X_7] + 2\,(X_1X_6) - 2c_{17}^{7} X_6 = 0,\\
&[(X_2X_6)\,X_7] + 4\,(X_2X_6) = 0,\\
&[(X_3X_6)\,X_7] + 3\,(X_3X_6) = 0
\end{aligned}$$

și ne dau

$$\begin{aligned}
&(X_1X_4) = c_{14}^{4}X_4 ,\ (X_1X_5) = c_{15}^{5} X_5 ,\ (X_1X_6) = X_2 + c_{16}^{6} X_6 ,\ (X_1X_7) = 0,\\
&(X_2X_4) = c_{24}^{5} X_5 ,\ (X_2X_5) = 0 ,\ (X_2X_6) = 0 ,\ (X_2X_7) = -2X_2 , \qquad (5.2'')\\
&(X_3X_4) = X_1 ,\ (X_3X_5) = X_2 ,\ (X_3X_6) = 0 ,\ (X_3X_7) = -X_3 + 2\mu X_5 .
\end{aligned}$$

Identitățile $(X_3X_4X_6) = 0$, $(X_2X_4X_5) = 0$, $(X_1X_4X_6) = 0$, ne dau

$$(X_1X_4) = 2\rho X_4 ,\quad (X_2X_4) = \rho X_5 ,\quad (X_1X_5) = \rho X_5 ,\quad c_{16}^{6} = 0. \qquad (5.4)$$

Ținînd seama de aceste expresii, identitățile $(X_iX_jX_7) = 0$, $(X_2X_3X_4) = 0$, $(X_1X_3X_5) = 0$ se scriu

$$\begin{aligned}
&[(X_1X_2)\,X_7] + 2\,(X_1X_2) = 0,\\
&[(X_2X_3)\,X_7] + 3\,(X_2X_3) = 0,\\
&[(X_1X_3)\,X_7] + (X_1X_3) + \rho\mu X_5 = 0,\\
&[(X_2X_3)\,X_4] + (X_1X_2) + \rho X_2 = 0,\\
&[(X_1X_3)\,X_5] - (X_1X_2) + \rho X_2 = 0
\end{aligned}$$

și ne dau

$$(X_1X_2) = -\rho X_2, \quad (X_2X_3) = 0, \quad (X_1X_3) = -2\rho X_3 + 3\lambda X_5,$$

cu condiția $\rho\mu = 0$. Celelalte identități ale lui Jacobi se verifică.

Presupunem că $\rho = 0$. Atunci parantezele (X_iX_α), (X_iX_j), se scriu

$$\begin{aligned}
&(X_1X_4) = 0, \quad (X_1X_5) = 0, \quad (X_1X_6) = X_2, (X_1X_7) = 0,\\
&(X_2X_4) = 0, \quad (X_2X_5) = 0, \quad (X_2X_6) = 0, \quad (X_2X_7) = -2X_2, \qquad (5.2''')\\
&(X_3X_4) = X_1, \; (X_3X_5) = X_2, \; (X_3X_6) = 0, \; (X_3X_7) = -X_3 + 2\mu X_5,\\
&(X_1X_2) = 0, \quad (X_2X_3) = 0, \quad (X_1X_3) = 3\lambda X_5 .
\end{aligned}$$

Dacă facem o transformare de variabile de forma $y^i = x^i + \ldots$, unde termenii nescriși sînt de ordin superior în x^i, putem lua

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial y^1} - \lambda (y^3)^2 \frac{\partial f}{\partial y^2}, \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial y^2}, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial y^3} + \lambda y^1 y^3 \frac{\partial f}{\partial y^2}.$$

Din ecuațiile (5.2''') rezultă că în noile variabile y transformările X_1, X_5, X_6 își păstrează aceleași expresii, pe cînd transformarea X_7 se scrie

$$X_7 = -\left(2y^2 \frac{\partial f}{\partial y^2} + y^3 \frac{\partial f}{\partial y^3}\right) + \mu (y^3)^2 \frac{\partial f}{\partial y^3}.$$

Din formulele (α) scrise pentru transformările $X_1, \ldots, X_6$ rezultă că toate componentele conexiunii sînt nule afară de

$$\Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = \lambda y^3, \qquad \Gamma^2_{33} = -2\lambda y^1 + \beta, \qquad (5.5)$$

iar din formulele (α) scrise pentru X_7 și $i = 2$, $j = k = 3$, rezultă $2\mu = 0$.

Prin urmare, grupul cu structura (5.2''') nu poate fi grupul de automorfisme al unui spațiu A_3 decît dacă $\mu = 0$. Spațiul A_3 are în acest caz componentele nenule ale conexiunii date de formulele (5.5) și este un spațiu Vrănceanu cu grup maxim [28] *). Presupunem acum $\rho \neq 0$ și anume luăm $\rho = 1$. Făcînd o transformare (5.3') cu $a = -\lambda$, parantezele (X_iX_α), (X_iX_j) se scriu

$$\begin{aligned}
&(X_1X_4) = 2X_4, \quad (X_1X_5) = X_5, \quad (X_1X_6) = X_2, \quad (X_1X_7) = 0,\\
&(X_2X_4) = X_5, \quad (X_2X_5) = 0, \quad (X_2X_6) = 0, \quad (X_2X_7) = -2X_2, \qquad (5.2^{IV})\\
&(X_3X_4) = X_1, \quad (X_3X_5) = X_2, \quad (X_3X_6) = 0, \quad (X_3X_7) = -X_3,\\
&(X_1X_2) = -X_2, (X_2X_3) = 0, \quad (X_1X_3) = -2X_3 .
\end{aligned}$$

Integrînd aceste ecuații de structură obținem expresiile operatorilor principali X_i,

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial x^3} - x^1 \frac{\partial f}{\partial x^3}. \qquad (5.6)$$

*) p. 98, formulele (31').

Spațiul A_3 care admite acest grup are toate componentele conexiunii nule, afară de

$$\Gamma^2_{11} = \gamma\,(x^3)^2\,, \quad \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = \gamma x^3\,(1 - x^1)\,, \quad \Gamma^2_{33} = \gamma\,(1 - x^1)^2, \tag{5.7}$$

γ fiind o constantă.

Spațiul este deci fără torsiune.

Componentele nenule ale tensorului de curbură sînt

$$\Gamma^2_{113} = -\,\Gamma^2_{131} = 3\gamma x^3\,, \quad \Gamma^2_{313} = -\,\Gamma^2_{331} = 3\gamma\,(1 - x^1). \tag{5.8}$$

Observăm că tensorul de curbură are componente nenule, în care indicele de contravarianță diferă de cei de covarianță și, în baza unei teoreme demonstrată de G. V r ă n c e a n u [25]*), rezultă că spațiul nu este proiectiv euclidian.

Pentru a găsi ecuațiile finite ale grupului de automorfisme observăm mai întîi că spațiul este un spațiu al lui Kagan subproiectiv de ordinul 1 $(n - 2)$, deoarece avem

$$\Gamma^1_{jk} = \Gamma^3_{jk} = 0.$$

Grupul de transformări care păstrează aceste condiții este de forma

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= a^1_1 x^1 + a^1_3 x^3 + a^1, \\ \bar{x}^2 &= \bar{x}^2\,(x^1,\ x^2,\ x^3), \\ \bar{x}^3 &= a^3_1\,x^1 + a^3_3\,x^3 + a^3. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Din legea de transformare a conexiunii (4.16) rezultă în primul rînd

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^2}{\partial x^2 \partial x^k} = 0, \qquad (k = 1,\ 2,\ 3)$$

și avem deci

$$\bar{x}^2 = a^2_2\,x^2 + \varphi\,(x^1,\ x^3).$$

Din legea de transformare a tensorului de curbură (4.14) avem

$$\begin{aligned} &\Delta\,[a^1_1\,\bar{x}^3 + a^3_1\,(1 - \bar{x}^1)\,] - a^2_2\,x^3 = 0, \\ &\Delta\,[a^1_3\,\bar{x}^3 + a^3_3\,(1 - \bar{x}^1)] + a^2_2\,(1 - x^1) = 0, \\ &(\Delta = a^1_1\,a^3_3 - a^1_3\,a^3_1) \end{aligned}$$

și rezultă

$$\begin{aligned} a^2_2 &= \Delta^2, \\ a^1_3\,a^3 + a^3_3\,(1 - a^1) &= \Delta, \\ a^1_1\,a^3 + a^3_1\,(1 - a^1) &= 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

*) p. 50.

Ecuațiile (5.9) iau forma

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= (1 - a^1)\, x^1 + a_3^1\, x^3 + a^1, \\ \bar{x}^2 &= \Delta^2\, x^2 + \varphi\,(x^1, x^3), \\ \bar{x}^3 &= -\, a^3\, x^1 + a_3^3\, x^3 + a^3. \end{aligned} \tag{5.9'}$$

Ținînd seama de condițiile (5.10) și de legea de transformare a conexiunii, avem

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^2}{\partial x^1 \partial x^1} = \frac{\partial^2 \bar{x}^2}{\partial x^1 \partial x^3} = \frac{\partial^2 \bar{x}^2}{\partial x^3 \partial x^3} = 0$$

și ecuațiile (5.9') devin

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= (1 - a^1)\, x^1 + a_3^1\, x^3 + a^1, \\ \bar{x}^2 &= \Delta^2\, x^2 + a_1^2\, x^1 + a_3^2\, x^3 + a^2, \\ \bar{x}^3 &= -\, a^3\, x^1 + a_3^3\, x^3 + a^3, \end{aligned} \tag{5.9''}$$

avînd

$$a_3^1\, a^3 + (1 - a^1)\, a_3^3 = \Delta.$$

Acest grup conține efectiv 7 parametri și anume constantele

a^i, a_3^1, a_3^3, a_1^2, a_3^2. Rezultă

T e o r e m a 7. *Spațiile A_3 cu grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale*

$$\text{(VI')} \qquad x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1},\ x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2},\ x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2},\ 2x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}$$

sînt sau spații fără torsiune neproiectiv euclidiene cu grup maxim $\mathfrak{G}_8$, sau spații care au conexiunea dată de formulele (5.7) *și posedă grupul de automorfisme* (5.9''), *care are 7 parametri.*

Să considerăm acum spațiile A_n ($n \geqslant 3$) care au toate componentele conexiunii nule, afară de

$$\Gamma_{22}^1 = (x^3)^2,\ \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = (1 - x^2)\, x^3,\ \Gamma_{33}^1 = (1 - x^2)^2.$$

Componentele nenule ale tensorului de curbură sînt

$$\Gamma_{223}^1 = -\,\Gamma_{232}^1 = 3x^3,\quad \Gamma_{332}^1 = -\,{}^1_{323} = -\,3\,(1 - x^2).$$

Ținînd seama că spațiul este subproiectiv de ordinul $n - 2$, rezultă că ecuațiile grupului de automorfisme sînt de forma

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= \bar{x}^1\,(x^1, \ldots, x^n), \\ \bar{x}^r &= a_s^r\, x^s + a^r, \end{aligned} \qquad (r, s = 2, \ldots, n).$$

Din legea de transformare a tensorului de curbură rezultă în primul rînd

$$a_k^2 = a_k^3 = 0.$$

Făcînd apoi aceleași calcule ca mai sus, obținem forma definitivă a ecuațiilor grupului

$$\begin{aligned}
&\bar{x}^1 = \Delta^2 x^1 + a_j^1 x^j + a^1,\\
&\bar{x}^2 = (1 - a^2)\, x^2 + a_3^2\, x^3 + a^2,\\
&\bar{x}^3 = -\, a^3\, x^2 + a_3^3\, x^3 + a^3, \qquad (j = 2, \ldots, n;\ k = 4, \ldots, n), \qquad (5.10')\\
&\bar{x}^k = a_j^k\, x^j + a^k,\\
&\Delta = a_3^3 (1 - a^2) + a^3\, a_3^2 .
\end{aligned}$$

Grupul are, după cum se vede, $(n-1)\,(n-3) + (n-3) + (n-1) + 5 = n^2 - 2n + 4$ parametri.

Aceste spații sînt spații de $n-2$ ori proiective cu vectorul de conexiune nul. Grupul lor de automorfisme are, după cum a arătat G. V r ă n c e a n u, cel mult $n^2 - 2n + 5$ parametri [25]*).

2° $p = 0$, $c = 1$. Avem

$$X_7 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2},\ (X_5 X_7) = X_5,\ \ (X_6 X_7) = 0.$$

Parantezele $(X_i X_\alpha)$ se scriu

$$\begin{aligned}
&(X_1 X_4) = c_{14}^\alpha X_\alpha, && (X_1 X_5) = c_{15}^\alpha X_\alpha,\\
&(X_2 X_4) = c_{24}^\alpha X_\alpha, && (X_2 X_5) = c_{25}^\alpha X_\alpha,\\
&(X_3 X_4) = X_1 + c_{34}^\alpha X_\alpha, && (X_3 X_5) = X_2 + c_{35}^\alpha X_\alpha, \qquad (5.11)\\
&(X_1 X_6) = X_2 + c_{16}^\alpha X_\alpha, && (X_1 X_7) = X_1 + c_{17}^\alpha X_\alpha,\\
&(X_2 X_6) = c_{26}^\alpha X_\alpha, && (X_2 X_7) = X_2 + c_{27}^\alpha X_\alpha,\\
&(X_3 X_6) = c_{36}^\alpha X_\alpha, && (X_3 X_7) = c_{37}^\alpha X_\alpha .
\end{aligned}$$

Făcînd schimbarea de operatori

$$\bar{X}_i = X_i + a_i X_4 + b_i X_5 + c_i X_6 + e_i X_7, \qquad (5.3'')$$

obținem

$$\begin{aligned}
&(\bar{X}_1, X_7) = \bar{X}_1 + c_{17}^4 X_4 + c_{17}^5 X_5 + (c_{17}^6 - c_1) X_6 + (c_{17}^7 - d_1) X_7,\\
&(\bar{X}_2, X_7) = \bar{X}_2 + c_{27}^4 X_4 + c_{27}^5 X_5 + (c_{27}^6 - c_2) X_6 + (c_{27}^7 - d_2) X_7,\\
&(\bar{X}_3, X_7) = (c_{37}^4 + a_3) X_4 + (c_{37}^5 + b_3) X_5 + c_{37}^6 X_6 + c_{37}^7 X_7,\\
&(\bar{X}_3, X_4) = \bar{X}_1 + (c_{34}^4 - a_1 - d_3) X_4 + (c_{34}^5 - b_1 - c_3) X_5 + (c_{34}^6 - c_1) X_6 + (c_{34}^7 - d_1) X_7,\\
&(\bar{X}_1, X_6) = \bar{X}_2 + (c_{16}^4 - a_2) X_4 + (c_{16}^5 + a_1 - b_2) X_5 + (c_{16}^6 - c_2) X_6 + (c_{16}^7 - d_2) X_7
\end{aligned}$$

și dacă luăm

$$\begin{aligned}
&a_1 + d_3 = c_{34}^4, \quad b_1 + c_3 = c_{34}^5, \quad c_1 = c_{17}^6, \quad d_1 = c_{17}^7,\\
&a_2 = c_{16}^4, \quad b_2 - a_1 = c_{16}^5, \quad c_2 = c_{27}^6, \quad d_2 = c_{27}^7,\\
&a_3 = c_{37}^4, \quad b_3 = -\, c_{37}^5,
\end{aligned}$$

*) p. 73.

formulele (5.11) devin

$$\begin{aligned}
&(X_1X_4) = c_{14}^{\alpha} X_\alpha, && (X_1X_5) = c_{15}^{\alpha} X_\alpha,\\
&(X_2X_4) = c_{24}^{\alpha} X_\alpha, && (X_2X_5) = c_{25}^{\alpha} X_\alpha,\\
&(X_3X_4) = X_1 + c_{34}^{6} X_6 + c_{34}^{7} X_7, && (X_3X_5) = X_2 + c_{35}^{\alpha} X_\alpha,\\
&(X_1X_6) = X_2 + c_{16}^{6} X_6 + c_{16}^{7} X_7, && (X_1X_7) = X_1 + c_{17}^{4} X_4 + c_{17}^{5} X_5,\\
&(X_2X_6) = c_{26}^{\alpha} X_\alpha, && (X_2X_7) = X_2 + c_{27}^{4} X_4 + c_{27}^{5} X_5,\\
&(X_3X_6) = c_{36}^{\alpha} X_\alpha, && (X_3X_7) = c_{37}^{6} X_6 + c_{37}^{7} X_7,
\end{aligned} \tag{5.11'}$$

Mai dispunem de o transformare de operatori de forma

$$\overline{X}_1 = X_1 + aX_4 + bX_5,\ \overline{X}_2 = X_2 + aX_5,\ \overline{X}_3 = X_3 - bX_6 - aX_7. \tag{5.3'''}$$

Identitățile $(X_iX_\beta X_7) = 0\ (\beta \neq 7)$ ne dau

$$\begin{aligned}
&(X_1X_4) = 0, && (X_1X_5) = 0,\\
&(X_2X_4) = 0, && (X_2X_5) = 0,\\
&(X_3X_4) = X_1, && (X_3X_5) = X_2 + c_{35}^{4} X_4 + \eta X_5,\\
&(X_1X_6) = X_2, && (X_1X_7) = X_1 + c_{17}^{4} X_4 + c_{17}^{5} X_5,\\
&(X_2X_6) = c_{26}^{4} X_4 + c_{26}^{5} X_5, && (X_2X_7) = X_2 + c_{17}^{4} X_5,\\
&(X_3X_6) = c_{36}^{6} X_6 + c_{36}^{7} X_7, && (X_3X_7) = -c_{17}^{5} X_6 - c_{17}^{4} X_7
\end{aligned} \tag{5.11''}$$

și ținînd seama de aceste expresii în identitățile $(X_3X_4X_6) = 0$, $(X_3X_5X_6) = 0$, obținem

$$(X_2X_6) = -2c_{35}^{4} X_5,\quad (X_3X_6) = \eta X_6 + c_{35}^{4} X_7.$$

Să considerăm și parantezele

$$(X_iX_j) = c_{ij}^{k} X_k + c_{ij}^{\alpha} X_\alpha.$$

Identitățile $(X_1X_2X_7) = 0$, $(X_1X_3X_7) = 0$ se scriu

$$([X_1X_2)X_7] - 2(X_1X_2) = 0,$$

$$[(X_1X_3)X_7] - (X_1X_3) + 2c_{17}^{5}X_2 + c_{17}^{4}(2X_1 + c_{17}^{4}X_4 + c_{17}^{5}X_5) = 0$$

și ne dau

$$(X_1X_2) = 0\ ,\quad c_{17}^{4} = c_{17}^{5} = 0,$$

$$(X_1X_3) = c_{13}^{1} X_1 + c_{13}^{2} X_2 + \rho X_4 + \mu X_5.$$

Făcînd o schimbare de operatori (5.3''), în care luăm $2a = c_{13}^{1}$, $2b = c_{23}^{2}$ vom obține

$$(X_1X_3) = \rho X_4 + \mu X_5.$$

Ținînd seama de această expresie, identitățile $(X_1 X_3 X_6) = 0$, $(X_2 X_3 X_6) = 0$ ne dau

$$(X_2 X_3) = -\eta X_2 + \rho X_5 , \quad c_{35}^4 = 0.$$

Ecuațiile de structură ale grupului sînt deci ecuațiile (5.1) și ecuațiile

$$\begin{aligned}
&(X_1 X_4) = 0, \quad (X_1 X_5) = 0, && (X_1 X_6) = X_2 , \quad (X_1 X_7) = X_1, \\
&(X_2 X_4) = 0, \quad (X_2 X_5) = 0, && (X_2 X_6) = 0, \quad (X_2 X_7) = X_2, \qquad (5.12), \\
&(X_3 X_4) = X_1 , \quad (X_3 X_5) = X_2 + \eta X_5 , && (X_3 X_6) = \eta X_6 , \quad (X_3 X_7) = 0, \\
&(X_1 X_2) = 0, \quad (X_2 X_3) = -\eta X_2 + \rho X_5 , && (X_1 X_3) = \rho X_4 + \mu X_5 .
\end{aligned}$$

Din expresiile parantezelor $(X_i X_\alpha)$ rezultă că operatorii principali X_i au forma

$$\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^3 B \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^3 A \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 B \frac{\partial f}{\partial x^2}, \\
&X_3 = \frac{\partial f}{\partial x^3} + x^1 C \frac{\partial f}{\partial x^1} - (x^1 A + x^2 (\eta - C)) \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 (C + B) \frac{\partial f}{\partial x^3},
\end{aligned} \qquad (5.13)$$

unde A, B și C sînt funcții de variabila x^3 olomorfe în origine.

După cum am mai arătat la p. 201, putem printr-o transformare de variabile care păstrează expresiile operatorilor X_α să anulăm pe B. Atunci

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^3 A \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial x^3} + CU - (x^1 A + x^2 \eta) \frac{\partial f}{\partial x^2}. \qquad (5.13')$$

Ținînd seama și de expresiile parantezelor $(X_i X_j)$,

$$C = \rho x^3$$

și

$$(1 + \rho (x^3)^2) A' + \left(\frac{2}{x^3} + \eta \right) A + \mu = 0. \qquad (5.14)$$

Prin urmare, operatorii principali X_i se scriu

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^3 A \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial x^3} + \rho x^3 U - (x^1 A + x^2 \eta) \frac{\partial f}{\partial x^2}, \qquad (5.13'')$$

unde A este o integrală olomorfă în origine a ecuației (5.14).
Se poate demonstra că există o asemenea integrală și că ea este unică.

Spațiul A_3 corespunzător are conexiunea dată de formulele

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \frac{\rho x^3 + \alpha + \beta}{M}, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = \frac{\rho x^3 + \alpha - \beta}{M}, \quad \Gamma^3_{33} = \frac{2(\rho x^3 + \alpha)}{M},$$

$$\Gamma^2_{31} = \frac{-e^{-\int \frac{\eta dx^3}{M}} \left[\int A' e^{\int \eta \frac{dx^3}{M}} dx^3 - \gamma \right]}{M},$$

$$\Gamma^2_{31} = \frac{-e^{-\int \frac{\eta dx^3}{M}} \left[\int A' e^{\int \eta \frac{dx^3}{M}} dx^3 + \gamma \right]}{M}, \tag{5.15}$$

$$\Gamma^2_{33} = x^1 (2A' + x^3 A'') = \frac{2x^1 e^{-\int \frac{\eta dx^3}{M}} \int A' e^{\int \eta \frac{dx^3}{M}} dx^3}{x^3 M},$$

$(M = 1 + \rho (x^3)^2)$,

restul componentelor fiind nule.

Dacă considerăm că spațiul este fără torsiune ($\beta = \gamma = 0$), componentele Γ^h_{jk} ($h = 1,3$) ale conexiunii se pot scrie sub forma

$$\Gamma^h_{jk} = -\delta^h_j \varphi_k - \delta^h_k \varphi_j, \qquad (h = 1, 3), \tag{5.15'}$$

unde $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = -\frac{\rho x^3 + \alpha}{M}$, iar componentele Γ^2_{jk} ale conexiunii au aceleași expresii ca în formulele (5.15) cu $\gamma = 0$. Avem deci un spațiu al lui Kagan subproiectiv de ordinul 1 ($n - 2$), cu vectorul de conexiune nenul. Acest spațiu are, după cum a arătat G. Vrănceanu [38], un grup cu *cel mult* $7(n^2 - 2n + 4)$ parametri. Pe de altă parte, spațiul considerat admite un grup cu *cel puțin* 7 parametri, deoarece grupul de stabilitate de la care am plecat este un grup $\mathfrak{G}_4$. Prin urmare, grupul de automorfisme al spațiului are efectiv 7 parametri.

În general, să considerăm spațiile A_n ($n \geqslant 3$), care au conexiunea dată de formulele

$$\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{i2} = \frac{-e^{-\int \frac{\eta dx^2}{M}} \int A' e^{\int \frac{\eta dx^2}{M}} dx^2}{M}, \qquad (i = 3, \ldots, n),$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{2(x^3 + \ldots + x^n)\, e^{-\int \frac{\eta dx^2}{M}} \int A' e^{\int \frac{\eta dx^2}{M}} dx^2}{x^2 M}, \tag{5.16}$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\varphi_2,$$

$$\Gamma^h_{jk} = -\delta^h_j \varphi_k - \delta^h_k \varphi_j, \qquad (h = 2, \ldots, n;\ j,\ k = 1, \ldots, n),$$

restul componentelor Γ^1_{jk} sînt nule, vectorul φ_k are componentele.

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_4 = \ldots = \varphi_n = 0, \quad \varphi_2 = -\frac{\rho x^2 + \alpha}{M}, \tag{5.16'}$$

iar A este o integrală olomorfă în origine a ecuației

$$(1 + \rho (x^2)^2) A' + \left(\frac{2}{x^2} + \eta\right) A + \mu = 0. \tag{5.14'}$$

Aceste spații sînt spații ale lui Kagan subproiective de ordinul $n - 2$ cu vectorul φ_k nenul; ele posedă un grup de automorfisme cu $n^2 - 2n + 4$ parametri.

Revenind la spațiile A_3 cu conexiunea (5.15), să considerăm două cazuri particulare importante

a) $\eta = 0$. Formulele (5. 15) devin

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \frac{\rho x^3 + \alpha + \beta}{M}, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = \frac{\rho x^3 + \alpha - \beta}{M},$$

$$\Gamma^2_{13} = \frac{-A + \gamma}{M}, \qquad \Gamma^2_{31} = \frac{-A - \gamma}{M}, \tag{5.15''}$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{2x^1 A}{x^3 M}, \qquad \Gamma^3_{33} = \frac{2(\rho x^3 + \alpha)}{M}.$$

Componentele nenule ale tensorului de curbură și ale tensorului derivat al tensorului de curbură sînt

$$\Gamma^1_{313} = \Gamma^2_{323} = -\Gamma^1_{331} = -\Gamma^2_{332} = \frac{\rho + (\alpha - \beta)^2}{M^2},$$

$$\Gamma^2_{331} = -\Gamma^2_{313} = \frac{-\mu + 2\gamma(\alpha - \beta)}{M^2}, \tag{5.17}$$

$$\Gamma^1_{313,3} = \Gamma^2_{323,3} = -\Gamma^1_{331,3} = -\Gamma^2_{332,3} = \frac{4\alpha(\rho + (\alpha - \beta)^2)}{M^3},$$

$$\Gamma^2_{331,3} = -\Gamma^2_{313,3} = \frac{4\alpha(-\mu + 2\gamma(\alpha - \beta))}{M^3}.$$

Observăm că dacă $\alpha = \beta = \gamma = 0$ spațiul nu are torsiune iar tensorul derivat al tensorului de curbură este nul, prin urmare în acest caz avem un spațiu simetric în sensul lui Cartan. De asemenea rezultă că spațiul nu poate fi proiectiv euclidian decît dacă $\beta = \gamma = \mu = 0$ (în caz contrariu tensorul de curbură are componente nenule, în care indicele de contravariantă este diferit de indicii de covariantă).

Din legea de transformare a tensorilor considerați avem

$$\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} = \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} = \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} = \frac{\overline{M}}{M}, \quad \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} = \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}$$

și ecuațiile grupului de automorfisme ale spațiului sînt de forma

$$\bar{x}^1 = \bar{x}^1(x^1, x^3), \quad \bar{x}^2 = \bar{x}^2(x^1, x^2, x^3), \quad \bar{x}^3 = \frac{x^3 + a^3}{1 - \rho a^3 x^3}. \tag{5.18}$$

Din legea de transformare a conexiunii avem

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} = 0, \qquad (i, j, k = 1, 2),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^1}{\partial x^1 \partial x^3} = \frac{\partial^2 \bar{x}^2}{\partial x^2 \partial x^3} = \frac{\rho a^3}{1 - \rho a^3 x^3} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^1}{\partial x^3 \partial x^3} = \frac{2\rho a^3}{1 - \rho a^3 x^3} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^2}{\partial x^1 \partial x^3} = \left(\frac{\rho a^3}{1 - \rho a^3 x^3} + \frac{A - \bar{A}}{M} \right) \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^2}{\partial x^3 \partial x^3} = \frac{2\rho a^3}{1 - \rho a^3 x^3} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} - 2 \frac{\bar{A}}{M} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} + 2 \frac{\bar{x}^1}{\bar{x}^3} \frac{\bar{A}}{M^2}$$

și ecuațiile grupului de automorfisme sînt

$$\bar{x}^1 = \frac{a_1^1 x^1 + a_3^1 x^3 + a^1}{1 - \rho a^3 x^3},$$

$$\bar{x}^2 = \frac{a_1^2 x^1 + a_1^1 x^2}{1 - \rho a^3 x^3} + a_1^2 x^1 e^{\int \frac{A - \bar{A}}{M} dx^3} + \psi (x^3), \qquad (5.18')$$

$$\bar{x}^3 = \frac{x^3 + a^3}{1 - \rho a^3 x^3},$$

unde ψ este integrala generală a ecuației

$$\psi'' = \frac{2\rho a^3}{1 - \rho a^3 x^3} \psi' - 2 \frac{\bar{A}}{M} \frac{a_3^1 + \rho a^1 a^3}{(1 - \rho a^3 x^3)^2} + 2 \frac{a_3^1 x^3 + a^1}{x^3 (1 - \rho a^3 x^3)^2} \frac{\bar{A} (1 + \rho (a^3)^2)}{M}.$$

Grupul conține efectiv 7 parametri. Subgrupul de stabilitate al originii se obține făcînd în ecuațiile (5.18) $a^1 = a^2 = a^3 = 0$. Ecuațiile sale sînt

$$\bar{x}^1 = a_1^1 x^1 + a_3^1 x^3, \quad \bar{x}^2 = a_1^1 x^2 + a_1^2 x^1 + a_3^2 x^3, \quad \bar{x}^3 = x^3 \qquad (5.19)$$

și este tocmai grupul de la care am plecat.

Dacă pe lîngă $\eta = 0$ mai avem și $\rho = 0$, componentele nenule ale conexiunii iau forma mai simplă

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = \alpha + \beta, \quad \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{32}^2 = \alpha - \beta, \quad \Gamma_{33}^3 = 2\alpha,$$

$$\Gamma_{13}^2 = \frac{\mu}{3} x^3 + \gamma, \quad \Gamma_{31}^2 = \frac{\mu}{3} x^3 - \gamma, \quad \Gamma_{33}^2 = -\frac{2\mu}{3} x^1, \qquad (5.15''')$$

iar ecuațiile grupului de automorfisme sînt

$$\bar{x}^1 = a_1^1 x^1 + a_3^1 x^3 + a^1,$$

$$\bar{x}^2 = \frac{\mu}{3} a_1^1 a^3 x^1 x^3 - \frac{\mu}{3} (a^1 - a^3 a_3^1)(x^3)^2 + a_1^2 x^1 + a_1^1 x^2 + a_3^2 x^3 + a^2, \qquad (5.18'')$$

$$\bar{x}^3 = x^3 + a^3.$$

b) $\mu = 0$. Putem lua atunci $A = 0$ și din formulele (5.15) avem

$$\Gamma^2_{13} = -\Gamma^2_{31} = \frac{\gamma}{M} e^{-\int \frac{\eta dx^3}{M}}, \quad \Gamma^2_{33} = 0.$$

Dacă $\gamma = 0$, avem un spațiu A_3 cu grup maxim cu 9 parametri. Presupunem deci $\gamma \neq 0$. Procedînd la fel ca mai sus, găsim grupul de automorfisme al spațiului

$$\bar{x}^1 = \frac{a^1_1 x^1 + a^1_3 x^3 + a^1}{1 - \rho a^3 x^3}$$

$$\bar{x}^2 = \frac{a^2_1 x^1 + a^1_1 x^2 + a^2_3 x^3 + a^2}{1 - \rho a^3 x^3}, \tag{5.18'''}$$

$$\bar{x}^3 = \frac{\bar{x}^3 + a^3}{1 - \rho a^3 x^3},$$

care este un subgrup cu 7 parametri al grupului proiectiv în 3 variabile.

Dacă $\mu = \rho = 0$ avem conexiunea

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \alpha + \beta, \qquad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = \alpha - \beta, \qquad \Gamma^3_{33} = 2\alpha,$$
$$\Gamma^2_{13} = \gamma e^{-\eta x^3}, \qquad \Gamma^2_{31} = -\gamma e^{-\eta x^3}, \tag{5.15^{IV}}$$

restul componentelor fiind nule, iar ecuațiile grupului sînt

$$\bar{x}^1 = a^1_1 x^1 + a^1_3 x^3 + a^1,$$
$$\bar{x}^2 = a^2_1 x^1 + a^1_1 e^{-\eta a^3} x^2 + a^2_3 x^3 + a^2, \tag{5.18^{IV}}$$
$$\bar{x}^3 = x^3 + a^3.$$

Putem enunța

T e o r e m a 8. *Spațiile A_3, care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale*

$$\text{(VI'')} \qquad x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2},$$

au conexiunea dată de formulele (5.15) *și posedă un grup de automorfisme cu 7 parametri dat de transformările infinitezimale* (VI'') *și* (5.13'').

3° Să examinăm acum și celelalte cazuri. Formulele (4) se scriu pentru transformările

$$T^i_{1k}\,\delta^3_j + T^i_{j1}\,\delta^3_k - T^3_{jk}\,\delta^i_1 = 0,$$
$$T^i_{2k}\,\delta^3_j + T^i_{j2}\,\delta^3_k - T^3_{jk}\,\delta^i_2 = 0,$$
$$T^i_{2k}\,\delta^1_j + T^i_{j2}\,\delta^1_k - T^1_{jk}\,\delta^i_2 = 0, \tag{5.19}$$
$$\Gamma^i_{1kl}\,\delta^3_j + \Gamma^i_{j1l}\,\delta^3_k + \Gamma^i_{jk1}\,\delta^3_l - \Gamma^3_{jkl}\,\delta^i_1 = 0,$$
$$\Gamma^i_{2kl}\,\delta^3_j + \Gamma^i_{j2l}\,\delta^3_k + \Gamma^i_{jk2}\,\delta^3_l - \Gamma^3_{jkl}\,\delta^i_2 = 0,$$
$$\Gamma^i_{2kl}\,\delta^1 + \Gamma^i_{j2l}\,\delta^1_k + \Gamma^i_{jk2}\,\delta^1_l - \Gamma^1_{jkl}\,\delta^i_2 = 0$$

și rezultă că singurele componente ale tensorului de torsiune și ale tensorului de curbură care pot fi nenule în origine sînt

$$T^2_{13},\ T^2_{31},\ T^1_{13} = T^2_{23} = -T^1_{31} = -T^2_{31},$$

$$\Gamma^1_{113} = -\Gamma^1_{131},\quad \Gamma^1_{313} = \Gamma^1_{323} = -\Gamma^2_{331} = -\Gamma^2_{332},\quad \Gamma^3_{331} = -\Gamma^3_{313}, \tag{5.20}$$

$$\Gamma^2_{123} = -\Gamma^2_{132},\quad \Gamma^2_{321} = -\Gamma^2_{312},\quad \Gamma^2_{231} = -\Gamma^2_{213},\quad \Gamma^2_{331} = -\Gamma^2_{313}.$$

Ținînd seama de transformarea X_7 în ecuațiile (4), avem

$$\begin{aligned}(1+p)\,\tau_1 + (c+p)\,\tau_2 + p\tau_3 &= 0,\\ (1+p)\,\Sigma_1 + (c+p)\,\Sigma_2 + p\,\Sigma_3 &= 0,\end{aligned} \tag{5.19'}$$

și rezultă

$$\begin{aligned} T^1_{13} = T^2_{23} = \Gamma^1_{313} = \Gamma^1_{323} &= 0, \qquad \text{dacă} \quad p \neq 0,\\ \Gamma^2_{123} = \Gamma^2_{321} = \Gamma^3_{331} = \Gamma^1_{113} &= 0, \qquad \text{dacă} \quad 2p+1 \neq 0,\\ \Gamma^2_{331} &= 0, \qquad \text{dacă} \quad c - 2p \neq 1,\\ T^2_{13} &= 0, \qquad \text{dacă} \quad c - p \neq 1. \end{aligned}$$

Prin urmare, dacă sînt îndeplinite condițiile

$$p \neq 0,\quad -1/2,\quad c - 2p \neq 1,\quad c - p \neq 1, \tag{5.21}$$

spațiul este euclidian, componentele tensorului de curbură și ale tensorului de torsiune fiind toate nule.

Se arată la fel ca și în alineatele anterioare că și pentru $p = -\frac{1}{2}$, $c \neq \frac{1}{2}$ spațiul este euclidian.

Dacă $c - p = 1$, $p \neq 0, -1, -\frac{1}{2}$, tensorul de curbură este nul, tensorul de tensiune are o singură componentă distinctă T^2_{13} nenulă, iar tensorul derivat al tensorului de torsiune este nul. Regăsim spațiile A_3 cu torsiune cu grup maxim $\mathfrak{G}_9$. Se poate arăta direct că aceeași concluzie este valabilă și pentru $p = -1$, $p = -\frac{1}{2}$.

Dacă $c - 2p = 1$, $p = 0, -1, -\frac{1}{3}$, tensorul de torsiune este nul, tensorul de curbură are o singură componentă distinctă Γ^2_{331} nenulă, iar tensorul derivat al tensorului de curbură este nul. Spațiul este deci un spațiu fără torsiune, neproiectiv euclidian cu grup maxim $\mathfrak{G}_8$ [28]. Se poate arăta că aceeași concluzie este valabilă și în cazul $p = -\frac{1}{3}$. Cazurile $c - 2p = 1$, $p = -1$, 0 sînt tocmai cazurile considerate la început.

Mai rămîne de cercetat cazul $p = 0$, $c = 1$.

Alegînd convenabil operatorii X_j și considerînd toate identitățile $(X_iX_\alpha X_\beta) = 0$, $(X_iX_jX_\alpha) = 0$, parantezele (X_iX_α), (X_iX_j) se scriu

$$\begin{aligned} &(X_1X_4) = 0, \quad (X_1X_5) = 0, \quad (X_1X_6) = X_2, \quad (X_1X_7) = X_1,\\ &(X_2X_4) = 0, \quad (X_2X_5) = 0, \quad (X_2X_6) = 0, \quad (X_2X_7) = cX_2,\\ &(X_3X_4) = X_1, \quad (X_3X_5) = X_2, \quad (X_3X_6) = c^4_{36}X_3, \quad (X_2X_7) = c^5_{37}X_5,\\ &(X_1X_2) = 0, \quad (X_2X_3) = 2\lambda X_2 + \rho X_5, \quad (X_1X_3) = 2\lambda X_1 + \rho X_4, \end{aligned} \tag{5.22}$$

avînd $(c - 2)\, c^4_{36} = cc^5_{37} = 0$. Se poate arăta la fel ca la p. 211 că grupul avînd ecuațiile de structura (5.22) și (1.5) nu poate fi grupul de automorfisme al unui spațiu A_3 decît dacă

$$c^4_{36} = c^5_{37} = 0.$$

Putem satisface această structură luînd

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2}, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial x^3} + (2\lambda + \rho x^3)\, U$$

și conexiunea spațiului A_3 corespunzător are componentele nenule

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \frac{\rho x^3 + \alpha + \beta}{M}, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = \frac{\rho x^3 + \alpha - \beta}{M},$$

$$\Gamma^3_{33} = \frac{2(\rho x^3 + \alpha)}{M}, \qquad \Gamma^2_{33} = \frac{\gamma}{M^{\frac{3}{2}}} e^{\int \frac{\lambda dx^3}{M}}, \tag{5.23}$$

$$(M = 1 + 2\lambda x^3 + \rho (x^3)^2),$$

avînd $\gamma c \neq 0$. Dacă $c \neq 0$, atunci $\Gamma^2_{33} = 0$ și regăsim conexiunea spațiilor A_3 cu grup maxim $\mathfrak{G}_{n^2}$ [33].

Presupunem acum $c = 0$. Componentele nenule ale tensorului de curbură și ale tensorului său derivat sînt

$$\Gamma^1_{323} = \Gamma^2_{323} = -\Gamma^1_{331} = -\Gamma^2_{332} = \frac{\rho - 2\lambda(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2}{M^2}$$

$$\Gamma^1_{313,3} = \Gamma^2_{323,3} = -\Gamma^1_{331,3} = -\Gamma^2_{332,3} = \frac{4(\alpha - \lambda)[\rho - 2\lambda(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2]}{M^3};$$

din legea de transformare a acestor tensori obținem

$$\overline{x}^3 = \frac{x^3 + a^3}{1 - \rho a^3 x^3 - 2\lambda a^3},$$

iar din legea de transformare a conexiunii rezultă, din calcule asemănătoare celor făcute la p. 204,

$$\overline{x}^h = \frac{a^h_j x^j}{1 - 2\lambda a^3 - \rho a^3 x^3} + \chi^h (x^3), \qquad (h, j = 1, 2),$$

unde funcțiile χ sînt integralele generale ale ecuațiilor

$$\chi''^1 = \frac{2\rho a^3}{1 - 2\lambda a^3 - \rho a^3 x^3}\, \chi'^1 - \frac{\gamma}{M} e^{\int \frac{\lambda dx^3}{M}} \frac{a^1_2}{1 - 2\lambda a^3 - \rho a^3 x^3},$$

$$\chi''^2 = \frac{2\rho a^3}{1 - 2\lambda a^3 - \rho a^3 x^3}\, \chi'^2 + \frac{\gamma e^{\int \frac{\lambda dx^3}{M}}}{M} \left[\left(\frac{\overline{M}}{M} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^2} \right].$$

Grupul de automorfisme are deci tot 9 parametri. Grupul de stabilitate al originii nu este liniar decît dacă $\gamma = 0$. Putem deci enunța

Teorema 9. *Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale* (VI) (*excluzînd cazurile* $p = c = -1$; $p = 0$, $c = 1$) *sînt spații euclidiene sau spații cu grup maxim cu* 9 *sau cu* 8 *parametri.*

6. Spațiile A_3 cu grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale (VII)

Transformările infinitezimale ale grupului de stabilitate sînt

$$\text{(VII)} \qquad X_4 = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1},\ X_5 = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2},\ X_6 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2},\ X_7 = x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + pU,$$

iar ecuațiile sale de structură se scriu

$$\begin{aligned} &(X_4X_5) = 0, \quad (X_4X_7) = 0, \quad (X_5X_7) = X_5, \\ &(X_4X_6) = X_5, \quad (X_5X_6) = 0, \quad (X_6X_7) = X_6. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Ținînd seama de teorema 3, precum și de formulele (5.20), rezultă că dacă $p \neq 0, 1, \frac{1}{2}$ spațiul este euclidian. Dacă $p = 1$, spațiul este fără curbură, tensorul de torsiune are o singură componentă distinctă nenulă T^2_{13}, iar tensorul său derivat este nul. Spațiul este în acest caz un spațiu cu torsiune cu grup maxim $\mathfrak{G}_9$. Dacă $p = \frac{1}{2}$ spațiul este fără torsiune tensorul de curbură are o singură componentă distinctă nenulă Γ^2_{331}, iar tensorul derivat al tensorului de curbură este nul. Avem deci un spațiu fără torsiune neproiectiv euclidian cu grup maxim $\mathfrak{G}_8$.

Putem enunța

Teorema 10. *Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale* (VII) ($p \neq 0$) *sînt spații euclidiene sau spații cu grup maxim cu* 9 *sau* 8 *parametri.*

Să presupunem acum $p = 0$. Putem alege atunci convenabil operatorii principali X_i, astfel încît să avem

$$\begin{aligned} &(X_1X_4) = c^\alpha_{14}X_\alpha, && (X_1X_5) = c^\alpha_{15}X_\alpha, \\ &(X_2X_4) = c^\alpha_{24}X_\alpha, && (X_2X_5) = c^\alpha_{25}X_\alpha, \\ &(X_3X_4) = X_1 + c^5_{34}X_5 + c^6_{34}X_6, && (X_3X_5) = X_2 + c^4_{35}X_1 + c^7_{35}X_7, \\ &(X_1X_6) = X_2 + c^\alpha_{16}X_\alpha, && (X_1X_7) = c^4_{17}X_4 + c^7_{17}X_7, \\ &(X_2X_6) = c^\alpha_{26}X_\alpha, && (X_2X_7) = X_2 + c^5_{27}X_5 + c^6_{27}X_6, \\ &(X_3X_6) = c^4_{36}X_4 + c^7_{36}X_7, && (X_3X_7) = c^4_{37}X_4 + c^7_{37}X_7. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Identitățile $(X_iX_\beta X_\gamma) = 0$ ne dau

$$\begin{aligned}
&(X_1X_4) = 2\rho X_4, \quad (X_1X_5) = \rho X_5, \quad (X_1X_6) = X_2, \quad (X_1X_7) = 0,\\
&(X_2X_4) = \rho X_5, \quad (X_2X_5) = 0, \quad (X_2X_6) = 0, \quad (X_2X_7) = X_2, \qquad (6.2')\\
&(X_3X_4) = X_1, \quad (X_3X_5) = X_2, \quad (X_3X_6) = 0, \quad (X_3X_7) = 0.
\end{aligned}$$

Ținînd seama de aceste ecuații în identitățile $(X_iX_jX_\alpha) = 0$, avem

$$\begin{aligned}
&(X_1X_2) = -\rho X_2 + c_{12}^5 X_5,\\
&(X_2X_3) = -2\lambda X_2 + \mu X_5 + c_{12}^5 X_6, \qquad (6.2'')\\
&(X_1X_3) = 2\lambda X_1 - 2\rho X_3 + \mu X_4 - c_{12}^5 X_7
\end{aligned}$$

și, însfîrșit, identitatea $(X_1X_2X_3) = 0$ ne dă

$$c_{12}^5 = 0, \quad \rho\mu = 0, \quad \rho\lambda = 0.$$

Sînt două probabilități

1° $\rho = 0$. Atunci

$$(X_1X_2) = 0, \quad (X_2X_3) = 2\lambda X_2 + \mu X_5, \quad (X_1X_3) = 2\lambda X_1 + \mu X_4.$$

Putem lua

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial x^3} + (2\lambda + \mu x^3)\, U.$$

Găsim conexiunea

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = \frac{\mu x^3 + \alpha + \beta}{M}, \quad \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{32}^2 = \frac{\mu x^3 + \alpha - \beta}{M}, \quad \Gamma_{33}^3 = \frac{2(\mu x^3 + \alpha)}{M}$$

$$M = 1 + 2\lambda x^3 + \mu (x^3)^2$$

și spațiul posedă un grup cu 9 parametri [39].

2° $\rho \neq 0$. Atunci

$$(X_1X_2) = -\rho X_2, \quad (X_2X_3) = 0, \quad (X_1X_3) = -2\rho X_3. \qquad (6.2''')$$

Integrînd ecuațiile de structură (6.2′) și (6.2″), rezultă

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1} - \rho x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \rho x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2} - \rho x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial x^3} - \rho x^1 \frac{\partial f}{\partial x^3}. \qquad (6.3)$$

Să facem $\rho = 1$. Transformările infinitezimale ale grupului se pot scrie

$$\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial x^3} - x^1 \frac{\partial f}{\partial x^3},\\
&X_4 = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad X_5 = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_6 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_7 = x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}
\end{aligned} \qquad (6.3')$$

Scriind ecuațiile (α) pentru toate aceste transformări, obținem conexiunea spațiului A_3 corespunzător. Componentele nenule sînt

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = (\alpha + \beta)(1 - x^1), \qquad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = (\alpha - \beta)(1 - x^1),$$
$$\Gamma^1_{21} = \Gamma^3_{31} = (\alpha + \beta)\, x^3, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = (\alpha - \beta)\, x^3, \tag{6.4}$$
$$\Gamma^1_{11} = 2\alpha x^3, \qquad \Gamma^3_{33} = 2\alpha(1 - x^1),$$

α și β fiind niște constante.

În general, spațiile A_n ($n \geqslant 3$) a căror conexiune este dată de formulele

$$\Gamma^1_{11} = 2\alpha x^2, \qquad \Gamma^2_{22} = 2\alpha(1 - x^1),$$
$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^i_{i2} = (\alpha + \beta)(1 - x^1), \qquad \Gamma^1_{21} = \Gamma^i_{2i} = (\alpha - \beta)(1 - x^1), \tag{6.5}$$
$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^i_{i1} = (\alpha + \beta)\, x^2, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^i_{1i} = (\alpha - \beta)\, x^2$$

(i este un indice care ia valori de la 3 pînă la n) au un grup de automorfisme cu $n^2 - n + 1$ parametri, transformările infinitezimale ale acestui grup fiind

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} - x^1 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad x^k \frac{\partial f}{\partial x^i}, \tag{6.6}$$

($i = 3, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n$).

Dacă tensorul de torsiune are toate componentele nule, adică dacă $\beta = 0$, atunci conexiunea spațiului este dată de formulele

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j\,, \tag{6.7}$$

unde vectorul de conexiune φ_k are componentele

$$\varphi_1 = \alpha x^2, \qquad \varphi_2 = \alpha(1 - x^1), \qquad \varphi_3 = \ldots = \varphi_n = 0. \tag{6.8}$$

Aceste spații sînt proiectiv euclidiene; ele au fost considerate prima oară de I. P. Egorov [21].

Putem enunța

Teorema 11. *Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale*

$$\text{(VII')} \qquad x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}$$

sînt sau spații cu grup maxim cu 9 parametri sau spațiile cu conexiune (6.5), *avînd grupul de automorfisme cu 7 parametri* (6.3').

7. Concluzii

Din cercetarea făcută rezultă că există cinci categorii de spații A_3 care admit un grup de automorfisme cu 7 parametri. Forma canonică a conexiunii acestor spații este dată de formulele (3.11),(3.11′), (4.11), (5.7), (5.15), (6.4) iar grupul de automorfisme este în primul caz grupul proiectiv cu 3 variabile care păstrează cuadrica $1 + 2\rho x^1 x^3 = 0$; în următoarele două cazuri grupurile (4.18), respectiv (5.9″), iar în ultimele două cazuri grupurile ai căror operatori ai transformărilor infinitezimale sînt (VI″), (5.13″), respectiv (3.6′).

Spațiile din prima și din ultima categorie cînd $\beta = 0$ sînt spații proiectiv euclidiene. Ele ne conduc la spații A_n $(n > 3)$ proiectiv euclidiene care posedă un grup de automorfisme cu $n^2 - n + 1$ parametri.

După cum a arătat matematicianul japonez Yosio Muto [40], există doar două categorii de spații A_n proiectiv euclidiene care au un grup cu $n^2 - n + 1$ parametri. În prima categorie intră spațiile A_n pentru care forma patratică $\psi = \Gamma rs\, dx^r\, dx^s$ $(\Gamma_{ji} = \Gamma^i_{ji1})$ este de rangul 2, iar forma biliniară $f = P_{kl}\,[dx^k\, dx^l]$ $(P_{kl} = \Gamma^i_{jil})$ este nulă. În a doua categorie intră spațiile A_n pentru care forma pătratică ψ este de rangul 1, iar forma biliniară f de rangul 2. Spațiile A_n avînd conexiunea (3.11), (3.11″) intră în prima categorie, iar spațiile A_n avînd conexiunea (6.5) (cu $\beta = 0$) intră în a doua categorie.

Din rezultatele obținute în alineatele 3 și 6, precum și din rezultatele lui Yosio Muto rezultă:

Teorema 12. *Conexiunea spațiilor A_n $(n \geqslant 2)$ proiectiv euclidiene cu grup de mișcări $\mathfrak{G}_{n^2-n+1}$ poate fi adusă sau la forma canonică* (3.11), (3.11″) *cînd spațiul este simetric în sensul lui Cartan sau la forma canonică* (6.5) *(cu $\beta = 0$) cînd spațiul are o formă Pfaff invariantă care nu este diferențială totală exactă.*

Celelalte trei categorii de spații A_3 sînt spații ale căror curbe autoparalele sînt curbe plane. Aceste spații nu sînt proiectiv euclidiene. Dacă presupunem conexiunea simetrică ($\beta = \gamma = 0$), spațiile corespunzătoare sînt spații ale lui Kagan subproiective de ordinul 1 ceea ce rezultă din formulele (4.21), (5.7) și (5.15). Putem enunța:

Teorema 13. *Spațiile A_3 fără torsiune și euclidian proiective cu grup tranzitiv $\mathfrak{G}_7$ sînt spații ale lui Kagan subproiective de ordinul 1. Toate aceste spații ne conduc la spații A_n $(n > 3)$ de $n - 2$ ori proiective și avînd un grup de automorfisme cu $n^2 - 2n + 4$ parametri.*

De asemenea, rezultă că există două spații A_3 neproiectiv euclidiene cu grup $\mathfrak{G}_7$ simetrice în sensul lui Cartan. Conexiunile acestor spații sînt date de formulele (4.11′) și (5.15″), în ultimele făcînd $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Într-o lucrare recentă [41] acad. G. Vrănceanu consideră spațiile A_3 neproiectiv euclidiene care admit un grup tranzitiv cu 7 parametri

și arată că în unul din cazuri grupul de stabilitate este dat de transformările

$$X_4 = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1},\quad X_5 = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2},\quad X_6 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \delta x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \alpha x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1},$$

$$X_7 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} \tag{7.1}$$

Din cele arătate mai sus rezultă că există spații A_3 cu grup tranzitiv $\mathfrak{G}_7$, astfel încît grupul de stabilitate să aibă respectiv transformările

$$X_4,\ X_5,\ X'_6 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2},\ X_7,$$

$$X_4,\ X_5,\ X''_6 = x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1},\ X_7, \tag{7.2}$$

$$X_4,\ X_5,\ X'''_6 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1},\ X_7,$$

în care X_4, X_5, X_7 au expresiile date de formulele (7.1). Observăm că transformarea X_6 poate fi scrisă ca o combinație liniară a transformărilor X'_6, X''_6, X'''_6, și anume

$$X_6 = X'_6 + \delta X''_6 + \alpha X'''_6. \tag{7.3}$$

Aceasta ne arată legătura dintre rezultatele expuse mai sus și rezultatele la care a ajuns pe altă cale acad. G. Vrănceanu.

În cazul spațiilor A_n cu conexiunea (5.10) tensorul derivat al tensorului de curbură are componente diferite de zero,

$$\Gamma^1_{223,3} = -\Gamma^1_{232,3} = 3,\qquad \Gamma^1_{332,1} = -\Gamma^1_{323,2} = 3,$$

prin urmare aceste spații nu sînt și nu pot fi simetrice în sensul lui Cartan. După cum am mai menționat, G. Vrănceanu a arătat că spațiile A_n ($n \geqslant 3$) neproiectiv euclidiene au un grup de automorfisme cu cel mult $n^2 - 2n + 5$ parametri și acest maxim este atins numai de o clasă de spații simetrice în sensul lui Cartan. Din rezultatele obținute în alineatul 5 rezultă :

Teorema 14. *Un spațiu A_n ($n \geqslant 3$) fără torsiune, neproiectiv euclidian și nesimetric în sensul lui Cartan posedă un grup de automorfisme cu cel mult $n^2 - 2n + 4$ parametri și acest maxim este atins.*

Trebuie în precizăm că în această teoremă este vorba de spații A_n care nu pot fi simetrice dacă particularizăm una din constantele care intră în expresiile conexiunii.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ A_3 С ГРУППОЙ $\mathfrak{S}_7$.

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Изучая пространства A_n, обладающие инвариантной формой Пфаффа, академик Г. Врэнчану встретил впервые пространства A_n с группой преобразований в себя с n^2 параметрами. Советский математик И. П. Егоров также показал, что неаффинно-евклидовое пространство A_n обладает группой автоморфизмов с n^2 параметрами, и что этот максимум достигается проективно-евклидовыми пространствами. Г. Врэнчану показал [27], что непроективно-евклидовые пространства A_n $(n \geqslant 3)$ обладают максимальной группой преобразования в себя с $m = 2n^2 - 2n + 5$ параметрами и что этот максимум достигается для пространств, всесоставляющие связности которых равны нулю, за исключением $\Gamma^1_{22} = x^3$. Г. Врэнчану также показал [28], что только непроективно-евклидовые пространства A_n обладают группой с m параметрами. Для случая 3-мерных пространств аффинной связности, $n^2 = 9$ и $m = 8$. Ставится вопрос об определении пространств A_3, имеющих группу автоморфизмов с $s < 8$ параметрами.

В настоящей работе автор производит классификацию пространств A_3, обладающих транзитивной группой автоморфизмов с 7 параметрами.

На основании результатов, полученных Г. Врэнчану, известно, что стационарная группа пространства A_n является в системе нормальных координат начала, подгруппой центроаффинной группы. Если группа устойчивости содержит отмеченное преобразование $U = x^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, то пространство — евклидово. Стационарная группа транзитивной группы с 7 параметрами имеет 4 параметра. Классификация Софуса Ли [32] дает все подгруппы с 4 параметрами центроаффинной группы 3 переменных. Имеется 7 категорий таких подгрупп, не содержащих преобразования U, причем их инфинитезимальные преобразования даны формулами (10).

Так как $X = a^j_k x^k \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ является преобразованием стационарной группы, формулы (4) дают условия, которые налагают на тензор кручения и тензор кривизны такое преобразование (в формулах (4) T^i_{jk}, Γ^i_{jkl} фигурируют со своими значениями в начале координат). Если формулы (4), записанные для всех преобразований стационарной группы, дают значения $T^i_{jk} = 0$, Γ^i_{jkl} в начале, то следовательно речь идет об евклидовом пространстве.

В общем определяются выражения главных операторов x_i транзитивной группы, статионарная группа которой есть группа (10), а далее из уравнения

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^s} \xi^s + \Gamma^i_{sk} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + \Gamma^i_{js} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} \qquad (\alpha)$$

будут получены составляющие связности соответствующего пространства A_3.

Будет показано, что существует лишь 4 различных стационарных групп пространства A_3, имеющего транзитивную группу автоморфизмов с

7 параметрами, Для всех других случаев либо пространство является евклидово-аффинным, либо оно обладает группой автоморфизмов с 9 или 8 параметрами.

Для обозрения пространств A_3 с транзитивной группой $\mathfrak{R}_7$ приведем несколько найденных теорем.

Теорема 4'. *Пространства A_3 со стационарной группой, имеющей инфинитезимальные преобразования*

$$(IV') \qquad x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2} x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^3 \frac{\partial f}{dx^3} x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}$$

является симметрическими проективно-евклидовыми пространствами со связностью (3.11), (3.11') и обладают семипараметрической группой автоморфизмов, инфинитезимальные преобразования которой выражаются (IV') и (3.7).

В общем случае пространства $A_n\,(n \geqslant 3)$ с связностью (3.11), (3.11') является симметрическими проективно евклидовыми пространствами, обладающими группой автоморфизмов с $n^2 - n + 1$ параметрами.

Теорема 6. *Пространствами A_3 со стационарной группой обладающей инфинитезимальными преобразованиями*

$$(V') \qquad x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \; x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \; x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \; x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}$$

являееся пространствами со связностью (4.11), обладающими семипараметрической группой автоморфизмов, уравнения которых даны формулами (4.18).

В формулах (4.11) функция B представляет собой голоморфный в начале координат интеграл уравнения Риккати (4.8), причем в формулах (4.18) $\varphi\,\psi$ суть общие интегралы уравнений (4.17).

Теорема 6'. *Пространства $A_n\,(n \geqslant 3)$ со связностью (4.19) суть пространства, обладающие группой автоморфизмов (4.20) с $n^2 - 2n + 4$ параметрами.*

Теорема 7. *Пространства A_3 со стационарной группой, обладающей инфинитезимальными преобразованиями*

$$(VI') \qquad x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \; x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \; x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \; 2x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}$$

являются непроективно-евклидовыми пространствами с максимальной группой $\mathfrak{G}_8$ или пространствами со связностью (5.7), обладающие семипараметрической группой автоморфизмов (5.9'').

В общем случае пространства $A_n\,(n \geqslant 3)$ со связностью (5.10) суть субпроективные пространства порядка $n - 2$, имеющие группу автоморфизмов (5.11') с $n^2 - 2n + 4$ параметрами.

Теорема 8. *Пространства A_3 со стационарной группой*

$$(VI'') \qquad x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \; x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \; x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \; x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}$$

суть пространства со связностью (5.15), обладающие семипараметрической группой автоморфизмов, инфинитезимальные преобразования которой суть (VI'') и (5.13'').

В формулах (5.15), (5.13'') функция представляет собой голоморфный в начале интеграл уравнения (14.5). Обобщая эти результаты, находим также пространства A_n $(n)^3$ с группой $\mathfrak{G}$ $n^2 - 2n + 4$. [См. формулы (5.16'), (5.16')].

Теорема 11. *Пространства A_3 со стационарной группой*

$$(\text{VII}') \qquad x^3 \frac{\partial f}{dx^1}, \quad x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}$$

суть пространства с максимальной группой $\mathfrak{G}_9$ или пространства со связностью (6.4), обладающие семипараметрической группой автоморфизмов (6.3).

В более общем случае пространства A_n $(n \geqslant 3)$ со связностью (6.5), (где i — порядковый индекс, принимающий значения от 3 до n), обладают группой преобразований (6.6) с $n^2 - n + 1$ параметрами.

Если связность симметричная, ее составляющие выражаются формулами (6.7), (6.8) и находим рассмотренные И. П. Егоровым проективно-евклидовые пространства.

Следовательно имеется лишь 3 класса непроективно-евклидовых пространств A_3 без кручения, с транзитивной группой $\mathfrak{G}_7$. Формулы (4.11), (5.15) (с $\beta = \gamma = 0$ и (5.7) дают связности.

Теорема 13. *Непроективно евклидовые пространства A_3 с симметричной связностью и с транзитивной группой $\mathfrak{G}_7$ суть субпроективные пространства Кагана первого порядка. Все эти пространства приводят к пространствам A_n $(n \geqslant 3)$ $n-2$ разпроективным с группой автоморфизмов с $n^2 - 2n + 4$ параметрами.*

Оказывается также, что существует два непроективно-евклидовых пространства с группой A_3, симметричных в смысле Картана. Их связности выражены формулами (4.11') и (5.15'').

DÉTERMINATION DES ESPACES A_3 À GROUPE $\mathfrak{G}_7$

(RÉSUMÉ)

G. Vrănceanu a rencontré pour la première fois des espaces A_n, ayant un groupe de transformation en eux-mêmes, à n^2 paramètres, en étudiant les espaces A_n, qui possèdent une forme de Pfaff invariante [12]. Par ailleurs, le mathématicien soviétique I. P. Egorov a montré qu'un espace A_n qui n'est pas affine euclidien possède un groupe d'automorphismes ayant au plus n^2 paramètres et que ce maximum est atteint par les espaces projectivement euclidiens. G. Vrănceanu a montré [27] que les espaces A_n $(n \geqslant 3)$, non projectivement euclidiens, possèdent un groupe maximum de transformation en eux-mêmes, à $m = 2n^2 - 2n + 5$ paramètres et que ce maximum est atteint par les

espaces dont la connexion a toutes les composantes nulles, sauf $\Gamma^1_{22} = x^3$. Il a également montré [28], que ce sont les seuls espaces A_n, non projectivement euclidiens, qui possèdent un groupe à m paramètres. Dans le cas des espaces à connexion affine à 3 dimensions, on a $n^2 = 9$ et $m = 8$. Le problème qui se pose est donc de déterminer les espaces A_3, ayant un groupe d'automorphisme à $s < 8$ paramètres.

Dans ce travail, l'auteur donne une classification des espaces A_3, qui possèdent un groupe transitif d'automorphismes à 7 paramètres.

On sait, d'après les résultats de G. Vrănceanu, que le groupe de stabilité d'un espace A_n est, dans un système de coordonnées normales de l'origine, un sous-groupe du groupe centro-affine. Si le groupe de stabilité contient la transformation distinguée $U = x_i \partial f/\partial x^i$, l'espace est euclidien. Le groupe de stabilité d'un groupe transitif à 7 paramètres a 4 paramètres. La classification de Sophus Lie [32] donne tous les sous-groupes à 4 paramètres, du groupe centro-affine en 3 variables. Il y a 7 catégories de tels sous-groupes qui ne contiennent pas la transformation U et leurs transformations infinitésimales sont données par les formules (10).

$X = a^j_k \, x^k \partial f/\partial x^i$ étant une transformation du groupe de stabilité, les formules (4) donnent les conditions qui imposent au tenseur de torsion et au tenseur de courbure une telle transformation. (Dans les formules (4) T^i_{jk}, Γ^i_{jkl} interviennent par leurs valeurs à l'origine). Si les formules (4), écrites pour toutes les transformations du groupe de stabilité, donnent. $T^i_{jk} = 0$, $\Gamma^i_{jkl} = 0$ à l'origine, il en résultera que l'espace est euclidien.

En général, on déterminera les expressions des opérateurs principaux X_i du groupe transitif dont le groupe de stabilité est un groupe (10); puis, les équations :

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial \Gamma_{jk}}{\partial x^s} \xi^s + \Gamma^i_{sk} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^s} + \Gamma^i_{js} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} \quad (\alpha)$$

donneront les composantes de la connexion d'espace A_3, correspondant.

On montrera qu'il y a seulement 4 groupes de stabilité distincts d'un espace A_3 ayant un groupe d'automorphismes transitif à 7 paramètres. Dans tous les autres cas, l'espace est euclidien affine ou bien possède un groupe d'automorphismes à 9 ou à 8 paramètres.

Pour mettre en évidence les espaces A_3, à groupe transitif $\mathfrak{G}_7$, on donne les théorèmes ci-après :

Théorème 4'. *Les espaces A_3, à groupe de stabilité ayant les transformations infinitésimales*

$$\text{(IV')} \quad x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}$$

projectivement euclidiens, symétriques ont la connexion (3.11) și (3.11') *et possèdent un groupe d'automorphismes à 7 paramètres, dont les transformations infinitésimales sont* (IV'), et (3.7).

D'une manière plus générale, les espaces A_n ($n \geqslant 3$) à connexion (3.11), (3.11') sont des espaces projectivement euclidiens symétriques qui possèdent un groupe d'automorphismes. à $n^2 - n + 1$ paramètres.

Théorème 6. *Les espaces A_3 à groupe de stabilité ayant les transformations infinitésimales*

$$\text{V}') \quad x^3\frac{\partial f}{\partial x^1},\quad x^3\frac{\partial f}{\partial x^2},\quad x^1\frac{\partial f}{\partial x^1},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}$$

sont des espaces qui ont la connexion (4.11) *et qui possèdent un groupe d'automorphismes à 7 paramètres, dont les équations sont données par les formules* (4.18).

Dans les formules (4.11) la fonction B est une intégrale holomorphe à l'origine de l'équation Riccati (4.8) et dans les formules (4.18), φ et ψ sont les intégrales générales des équations (4.17).

Théorème 6'. *Les espaces A_n ($n \geqslant 3$) à connexion* (4.19) *sont des espaces qui possèdent le groupe d'automorphismes* (4.20) *à n^2-2n+4 paramètres.*

Théorème 7. *Les espaces A_3 à groupe de stabilité ayant les transformations infinitésimales* :

$$\text{(VI}') \quad x^3,\frac{\partial f}{\partial x^1},\quad x^3\frac{\partial f}{\partial x^2},\quad x^1\frac{\partial f}{\partial x^2},\quad 2x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}+x^3\frac{\partial f}{\partial x^3}$$

sont des espaces non projectivement euclidiens, à groupe maximum $\mathfrak{G}_8$ ou bien les espaces à connexion (5.7), *qui possèdent le groupe d'automorphismes* (5.90) *à 7 paramètres.*

Plus généralement, les espaces A_n ($n \geqslant 3$) à connexion (5.10) sont des espaces sous-projectifs de l'ordre $n-2$ ayant le groupe d'automorphismes (5.11') à n^2-2n+4 paramètres.

Théorème 8. *Les espaces A_3 à groupe de stabilité* (VI'')

$$\text{(VI}'') \quad x^3,\frac{\partial f}{\partial x^1},\quad x^3\frac{\partial f}{\partial x^2},\quad x_1\frac{\partial f}{\partial x^2},\quad x^1\frac{\partial f}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}$$

sont des espaces qui ont la connexion (5.15) *et qui possèdent un groupe d'automorphismes à 7 paramètres dont les transformations infinitésimales sont* (VI'') *et* (5.13'').

Dans les formules (5.15), (5.13'') la fonction A est une intégrale holomorphe, à l'origine de l'équation (5.14). En généralisant ces résultats, on trouve aussi des espaces A_n $(n)^3$ à groupe $\mathfrak{G}_{n^2-2n+4}$ [voir les formules (5.16), (5.16')].

Théorème 11. *Les espaces A_3, à groupe de stabilité*

$$\text{(VII}') \quad x^3\frac{\partial f}{\partial x^1},\quad x^3\frac{\partial f}{\partial x^2},\quad x^1\frac{\partial f}{\partial x^2},\quad x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}$$

sont des espaces à groupe maximum $\mathfrak{G}_9$ ou bien les espaces à connexion (6.4) *qui possèdent le groupe d'automorphismes à 7 paramètres* (6.3').

Plus généralement, les espaces A_n ($n \geqslant 3$) à connexion (6.5) (i étant un indice de numérotation qui prend des valeurs de 3 à n), possèdent le groupe de transformation (6.6) à n^2-n+1 paramètres.

Si la connexion est symétrique, ses composantes s'expriment par les formules (6.7), (6.8) et l'on trouve des espaces projectivement euclidiens, considérés par I. P. Egorov.

En conclusion, il résulte qu'il n'y a que 3 classes d'espaces A_3 sans torsion, non projectivement euclidiens à groupe transitif $\mathfrak{G}_7$. Les formules (4.11), (5.15) (avec $\beta = \gamma = 0$) et (5.7) donnent leurs connexions.

Théorème 13. *Les espaces A_3 à connexion symétrique, non projectivement euclidiens à groupe transitif $\mathfrak{G}_7$ sont des espaces de Kagan sous-projectifs, du premier ordre. Tous ces espaces conduisent à des espaces A_n $(n \geqslant 3)$ $n-2$ fois projectifs ayant un groupe d'automorphismes à n^2-2n+4 paramètres.*

Il en résulte encore qu'il y a deux espaces A_3 non projectivement euclidiens, à groupe $\mathfrak{G}_7$, symétriques au sens de Cartan, les formules (4.11′) et (5.15″) (avec $\alpha = \beta = \gamma = 0$) donnent leurs connexions.

BIBLIOGRAFIE

1. Luigi Bianchi, *Sugli spazii a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti.* Soc. italiana delle scienze mem. di mat. 1897, seria a 4-a, vol. II, p. 267.
2. — *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni.* Pisa, 1918, p. 538.
3. G. Fubini, *Sugli spazii che ammettono un grupo continuo di movimenti.* Annali di Matematica pura ed applicata, 1903, nr. 8, seria a VIII-a, p. 39—81.
4. I.P. Egorov, *K usileniiu teoremî Fubini o poriadke grup dbijenii rimanovîh npostranstv.* D.A.N., 1949, t. 66, nr. 5, p. 793—796.
5. — *Maksimalno podvijnîi rimanovî proktranstva V_4 nepostoiannoi krivizni.* D.A.N., 1955, t. 103, nr. 1, p. 9—12.
6. G. Vrănceanu, *Sur les espaces V_4 ayant comme groupe de stabilité un G_4.* Publicationes Mathematicae, t. 3, fasc. 1, 2, 1953.
7. — *Asupra grupurilor de mișcare ale unui spațiu riemannian cu patru dimensiuni.* Studii și cercetări matematice, t. IV, nr. 1—2, ianuarie—iunie, 1953, p. 121.
8. — *Asupra unei clase de spații riemanniene omogene.* Studii și cercetări matematice, t.V, nr. 1—2, ianuarie—iunie 1954, p. 173.
9. G. Teleman, *Asupra grupurilor de mișcare maxime ale spațiilor riemanniene V_n.* Studii și cercetări matematice, t. V, nr. 1—2, ianuarie—iunie 1954, p. 143.
10. — *Asupra spațiilor V_5 simetrice.* Studii și cercetări matematice, t. VI, nr. 1—2, ianuarie—iunie 1955, p. 193.
11. — *Asupra grupurilor de mișcări tranzitive ale spațiilor V_5.* Studii și cercetări matemamatice, t. IV, nr. 3—4, iulie—decembrie 1954.
12. G. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială.* Ed. Acad. R.P.R., București, vol. I, p. 50—271.
13. Șt. Petrescu, *Despre clasificarea spațiilor cu conexiune afină cu două dimensiuni.* Bul. științ. Acad. R.P.R., seria mat. fiz. chim., t. II, nr. 8, august — octombrie 1950, p. 639.
14. — *Despre automorfismele spațiilor A_2 cu conexiune afină simetrică.* Bul. științ. Acad. R.P.R., secțiunea de științe matematice și fizice, t. III, nr. 2, aprilie—mai—iunie 1951, p. 149.
15. — *Clasificarea spațiilor cu conexiune afină A_2.* Studii și cercetări matematice, t. II, nr. 3—4, iulie—decembrie 1951, p. 322.
16. A. E. Liber, *O classifikații affinoi sviaznosti b prostrantstve dvuh izmerenii.* Mat. Sbornik, 1950, t. 27 (69), nr. 2, p. 249.
17. J. Levine, *Classification of collineations in projectively and affinely connected spaces of two dimensions.* Annals of Mathematics, vol. 52, nr. 2, septembrie 1950, p. 465.
18. V. Dumitraș, *Determinarea spațiilor A_3 care admit o rotație în fiecare punct.* Studii și cercetări matematice, t. IV, nr. 1—2, ianuarie—iunie 1953, p. 213.

19. I. P. Egorov, *O noriadke grup dvijenii npostranstva affinnoi sviaznosti.* D.A.N., 1947, vol. 57, nr. 9, p. 867.
20. — *O grupah dvijenii prostanstv nesimmetriceskoi affinnoi sbiaznosti.* D.A.N., vol. 64, nr. 5, p. 621.
21. — *Dvijenia v prostranstvah affinnoi sviaznosti.* D.A.N. 1952, t. 87, nr. 5, p. 693.
22. — *O dvijeniah v prostranstvah affinnoi sviaznosti.* D.A.N., 1953, t. 89, nr. 5, p. 781.
23. G. Vrănceanu, *Asupra spațiilor cu conexiune afină neeuclidiene cu grup maxim de transformări în ele înșile.* Bul. științ. Acad. R.P.R., seria mat. fiz., chim., t. I, nr. 9, 1949, p. 813.
24. G. Vrănceanu, *Grupurile de mișcare ale spațiilor cu conexiune.* Studii și cercetări matematice, t. II, nr. 3—4, iulie—decembrie 1951, p. 387.
25. — *Lecții de geometrie diferențială.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1951, vol. II.
26. I. P. Egorov, *O grupah dvijenii prostranstv obscei nesimmetriceskoi affinnoi sviaznosti.* D.A.N., 1950, vol. 83, p. 265.
27. G. Vrănceanu, *Sur les espaces à connexion à groupe maximum.* C.R. Acad. Sci. Paris, 1949, t. 292, p. 543.
28. — *Asupra spațiilor neproiective euclidiene A_n fără torsiune cu grup maxim.* Revista Universității „C.I. Parhon" și a Politehnicii, București, 1954, nr. 4—6, p. 87.
29. P. K. Rasevski, *Simmetriceskie prostranstva affinnoi sviaznosti kruceniem.* Trudî seminara pro vectornemu i tenzornamu analizu. Moscova, 1950, vol. VIII, p. 82—92.
30. G. Vrănceanu, *Sugli spasi omogeni a connessione affinne.* Rendiconti del circolo Matematico di Palermo, 1957 (sub tipar).
31. — *Sur le groupe de stabilité d'un espace à connexion affinne*, Bulletin Math., vol. 49, 1957 (sub presă).
32. Sophus Lie și F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen.* Leipzig, t. III, 1893, p. 117.
33. G. Vrănceanu, *Proprietăți diferențiale globale ale spațiilor A_n cu grup maxim $G_n 2$.* Bul. științ. Acad. R.P.R., secțiunea de științe matematice și fizice, t. VI, nr. 1, ianuarie—februarie—martie 1954, p. 49.
34. P. A. Șirokov, *Proektivo—evclidovî simmetriceskie prostranstva.* Trudî seminaro pro vectornamu i tenzornamu analizu. Moscova, 1950, vol. VIII, p. 73—81.
35. R. Cartan, *Gheometria grup Lie i simetriceskie npostranstva*, I.L., Moscova, 1949.
36. G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale.* Bologna, 1948, ed. a II-a, partea întîia, cap. II, paragraful 3.
37. E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, Gauthier—Villars, Paris, 1949, vol. II.
38. G. Vrănceanu, *Automorfismele spațiilor lui Kagan.* Lucrările sesiunii generale științifice, Acad. R.P.R., 1950, p. 251.
39. V. Dumitraș, *Asupra spațiilor A_3 cu grup maxim*, Analele Universității „C.I.Parhon", seria științele naturii, nr. 13, p. 23.
40. G. Vrănceanu, *La détermination des espaces A_3 non projectivement euclidiens à groupe G_7.*

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
Tomul VIII, nr. 1—2, 1957

ASUPRA UNICITĂŢII ELEMENTULUI DE CEA MAI BUNĂ APROXIMAŢIE ÎN SPAŢII BANACH OARECARE *)

DE

IVAN SINGER

1. Fie E un spaţiu Banach real oarecare, G un subspaţiu liniar al lui E şi x un element din E. Numim element de cea mai bună aproximaţie al elementului x orice element $g_0 \in G$ cu proprietatea

$$\| x - g_0 \| = \inf_{g \in G} \| x - g \| . \tag{1}$$

Problema unicităţii elementului de cea mai bună aproximaţie este următoarea : În ce condiţii are *orice* element $x \in E$ *cel mult* un element de cea mai bună aproximaţie?

Un caz particular important, pe care l-am considerat în lucrarea [4], este acela cînd $G = G_n = [x_1, \ldots, x_n]$, adică G este subspaţiul liniar al lui E generat de n elemente liniar independente date

$$x_1, \ldots, x_n. \tag{2}$$

În acest caz, numind *polinom* orice combinaţie liniară

$$p = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \tag{3}$$

a elementelor (2), avem problema unicităţii polinomului de cea mai bună aproximaţie, în care cuvintele „cel mult un" din enunţul de mai sus se înlocuiesc prin cuvintele „exact un", deoarece, după cum se ştie, orice element $x \in E$ are cel puţin un polinom de cea mai bună aproximaţie.

2. Vom rezolva acum problema unicităţii elementului de cea mai bună aproximaţie.

Teorema 1. *Pentru ca orice element $x \in E$ să aibă cel mult un element de cea mai bună aproximaţie, este necesar şi suficient să nu existe nici o funcţională liniară $f \in E^*$ şi nici un element $g_0 \in G$, $g_0 \neq \theta$ **), astfel încît*

$$\| f \| = 1, \tag{4}$$

$$f(g) = 0 \text{ pentru orice } g \in G, \tag{5}$$

$$\{ x \mid f(x) = \| x \| = \| x - g_0 \| \} \neq \Lambda. \tag{6}$$

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în şedinţa din 27 decembrie 1956.

**) Notăm prin θ elementul nul al spaţiului E, şi prin Λ mulţimea vidă.

Demonstrație. Necesitatea. Să presupunem că nu este satisfăcută condiția din teoremă, adică există o funcțională liniară $f \in E^*$ și un element $g_0 \in G$, $g_0 \neq 0$, astfel încît să avem (4), (5) și (6); fie x_0 un element al mulțimii (6) și să notăm $\| x_0 \| = c$. Atunci relațiile (4) și $f(x_0 - g) = c$, pentru orice $g \in G$, implică

$$\| x_0 - g \| \geqslant c \text{ pentru orice } g \in G;$$

deoarece prin ipoteză $\| x_0 - g_0 \| = \| x_0 \| = c$, rezultă că $g_0 \in G$ ($g_0 \neq 0$) și $0 \in G$ sînt elemente de cea mai bună aproximație ale elementului x_0.

Suficiența. Să presupunem că există un element $y_0 \in E$ care are două elemente de cea mai bună aproximație g_1 și $g_2 \neq g_1$. Atunci 0 și $g_0 = g_2 - g_1 \neq 0$ vor fi elemente de cea mai bună aproximație ale elementului $x_0 = y_0 - g_1$, adică vom avea

$$\| x_0 - g \| \geqslant \| x_0 \| = \| x_0 - g_0 \| \text{ pentru orice } g \in G.$$

Distanța elementului x_0 de la subspațiul liniar G este deci egală cu $\| x_0 \| = \| x_0 - g_0 \| > 0$. Prin urmare, în baza cunoscutei propoziții a lui S. Banach [1] *), există o funcțională liniară $f \in E^*$ avînd proprietățile

$$\| f \| = 1,$$

$$f(g) = 0 \text{ pentru orice } g \in G,$$

$$f(x_0) = \| x_0 \| = \| x_0 - g_0 \|,$$

adică avem (4), (5) și (6).

Teorema 1 este demonstrată.

Observația 1. Interpretarea geometrică a condiției din teorema 1 este următoarea: să nu existe nici un element $x_0 \in E$ și nici un hiperplan de sprijin H al sferei

$$S(x_0, \| x_0 \|) = \{ y \in E \mid \| y_0 - x_0 \| \leqslant \| x_0 \| \},$$

trecînd prin origine, cu proprietățile $H \supset G$ și $H \cap S \ni g_0 \neq 0$, $g_0 \in G$. Într-adevăr, ecuația hiperplanului H se poate scrie astfel: $-f(y - x_0) = \| x_0 \|$, $\| f \| = 1$.

Observația 2. Fie, în particular, E un spațiu strict convex. Atunci, după cum se știe, pentru orice funcțională liniară $f \in E^*$ există *cel mult un* element $z \in E$ astfel încît $f(z) = \| f \| . \| z \|$, deci condițiile (4), (5) și (6) nu pot fi niciodată satisfăcute simultan. Prin urmare, aplicînd teorema 1, rezultă următoarea propoziție cunoscută:

Oricare ar fi subspațiul liniar G al unui spațiu Banach strict convex E, orice element $x \in E$ are cel mult un element de cea mai bună aproximație.

3. Fie E un spațiu Banach real oarecare și fie (2) n elemente liniar independente din E. Mulțimea G_n a tuturor polinoamelor (3) este un subspațiu liniar al lui E, deci teorema 1 constituie o soluție a problemei unicității polinomului de cea mai bună aproximație. Însă, utilizînd și

*) p. 57, lema.

faptul că subspațiul G_n este de dimensiune finită n, se poate demonstra o teoremă mai tare, convenabilă pentru aplicațiile practice și anume

Teorema 2. *Pentru ca orice element $x \in E$ să aibă exact un polinom de cea mai bună aproximație, este necesar și suficient să nu existe h puncte extreme distincte neopuse două cîte două $f_1, \ldots, f_h$ ale sferei unitate $S^* \subset E^*$, unde $1 \leqslant h \leqslant n$, h numere nenule $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ cu $\sum_{i=1}^{h} |\lambda_i| = 1$ și un polinom $p_0 \neq 0$, astfel încît*

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i f_i(x_k) = 0, \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

$$\bigcap_{i=1}^{h} \{x \mid f_i(x) = \operatorname{sgn}\lambda_i, \ \|x\| = \|x - p_0\| = 1\} \neq \Lambda. \tag{8}$$

Demonstrație. Necesitatea. Dacă condiția nu este satisfăcută, adică dacă avem (7) și (8), atunci funcționala liniară $f = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_h f_h$ și polinomul p_0 satisfac (5) și (6). Însă, în același timp, avem și (4), deoarece, pe de o parte, notînd cu x_0 un element al mulțimii (8), relațiile $f(x_0) = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i f_i(x_0) = \sum_{i=1}^{h} |\lambda_i| = 1$ și $\|x_0\| = 1$ implică $\|f\| \geqslant 1$, iar pe de altă parte $\|f\| \leqslant \sum_{i=1}^{h} |\lambda_i| \cdot \|f_i\| = \sum_{i=1}^{h} |\lambda_i| = 1$. Prin urmare, în baza teoremei 1 rezultă că 0 și $p_0 \neq 0$ sînt atunci polinoame de cea mai bună aproximație ale elementului x_0.

Pentru demonstrarea *suficienței*, avem nevoie de două propoziții ajutătoare.

Propoziția 1. *Dacă E_k este un spațiu Banach de dimensiune finită k, și φ este o funcțională liniară pe E_k cu norma $\|\varphi\| = 1$, atunci există h puncte extreme distincte neopuse două cîte două $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ ale sferei unitate $S_k^* \subset E_k^*$, unde $1 \leqslant h \leqslant k$, și h numere pozitive $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ avînd suma egală cu 1, astfel încît $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_h \varphi_h$.*

Demonstrație. Deoarece $\|\varphi\| = 1$, φ aparține cel puțin unei fețe Γ a sferei S_k^*. Fața Γ este o mulțime convexă închisă și mărginită aparținînd unei varietăți liniare de dimensiune $k - 1$ a lui E_k^*; de aici rezultă ușor (de exemplu prin inducție completă) că există h puncte extreme distincte $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$ ale mulțimii Γ, unde $1 \leqslant h \leqslant k$, și h numere pozitive $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ avînd suma egală cu 1, astfel încît $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_h \varphi_h$. În același timp, fața Γ fiind o mulțime extremă a sferei unitate S_k^*, $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$ sînt puncte extreme și ale sferei S_k^* și sînt evident neopuse două cîte două.

Propoziția 2. *Dacă p este un număr întreg $\geqslant 2$ și $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $\mu_1, \ldots, \mu_p$ sînt $2p$ numere pozitive, există un indice j_1, $1 \leqslant j_1 \leqslant p$, astfel încît*

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_{j_1}} \geqslant \frac{\mu_j}{\mu_{j_1}}, \qquad (j = 1, \ldots, p). \tag{9}$$

Într-adevăr, fie întîi $p = 2$. Dacă $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \geqslant \frac{\mu_1}{\mu_2}$, atunci punînd $j_1 = 2$, avem (9); iar dacă $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < \frac{\mu_1}{\mu_2}$, atunci $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > \frac{\mu_2}{\mu_1}$ și, punînd $j_1 = 1$, avem din nou (9).

Să presupunem acum că propoziția 2 este adevărată pentru $2p - 2$ numere pozitive oarecare $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}, \mu_1, \ldots, \mu_{p-1}$ și fie

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_p$$

$2p$ numere pozitive. Prin ipoteza de inducție există un indice i_1, $1 \leqslant i_1 \leqslant p - 1$, astfel încît

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_{j_1}} \geqslant \frac{\mu_j}{\mu_{j_1}}, \qquad (j = 1, \ldots, p-1). \tag{10}$$

Dacă $\frac{\lambda_p}{\lambda_{i_1}} \geqslant \frac{\mu_p}{\mu_{i_1}}$, atunci luînd $j_1 = i_1$, avem (9). Dacă însă $\frac{\lambda_p}{\lambda_{i_1}} < \frac{\mu_p}{\mu_{i_1}}$, atunci

$$\frac{\lambda_{i_1}}{\lambda_p} > \frac{\mu_{i_1}}{\mu_p} \tag{11}$$

și, înmulțind relația (11) cu relațiile (10), obținem

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_p} \geqslant \frac{\mu_i}{\mu_p}, \qquad (j = 1, \ldots, p),$$

adică (9), cu $j_1 = p$. Propoziția 2 este demonstrată.

Acum putem demonstra *suficiența* condiției teoremei 2.

Să presupunem că există un element $y_0 \in E$ care are două polinoame de cea mai bună aproximație, p_1 și $p_2 \neq p_1$. Atunci 0 și $p_0 = \frac{p_2 - p_1}{\|y_0 - p_1\|}$ sînt polinoame de cea mai bună aproximație ale elementului $x_0 = \frac{y_0 - p_1}{\|y_0 - p_1\|}$, care are norma $\|x_0\| = 1$. În baza definiției polinoamelor de cea mai bună aproximație această proprietate are loc și în subspațiul $n + 1$ — dimensional $E_{n+1} = [x_1, \ldots, x_n, x_0]$ al lui E. În virtutea teoremei 1 există deci o funcțională liniară $\varphi \in E^*_{n+1}$ cu $\|\varphi\| = 1$, astfel încît

$$\varphi(x_k) = 0, \qquad (k = 1, \ldots, n),$$
$$\varphi(x_0) = \|x_0\| = 1 = \|x_0 - p_0\|.$$

Or, aplicînd propoziția 1 pentru $k = n+1$, rezultă că există h puncte extreme distincte neopuse două cîte două $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$ ale sferei unitate $S^*_{n+1} \subset E^*_{n+1}$, unde $1 \leqslant h \leqslant n + 1$, și h numere pozitive $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ avînd suma egală cu 1, astfel încît $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_h \varphi_h$, deci

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \varphi_i(x_k) = 0, \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{12}$$

$$\varphi_i(x_0) = \|x_0\| = \|x_0 - p_0\| = 1, \qquad (i = 1, \ldots, h). \tag{13}$$

Afirmăm că $h \leqslant n$. Pentru a vedea aceasta, vom arăta că dacă $h=n+1$, atunci putem scrie $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \varphi_i = \sum_{j=1}^{n+1} \nu_j \varphi_j$, unde $\nu_j \geqslant 0$, $j = 1,\ldots,n+1$, $\sum_{j=1}^{n+1} \nu_j = 1$ și $\nu_{j_1} = 0$ pentru un indice j_1, $1 \leqslant j_1 \leqslant n+1$. Într-adevăr, relațiile

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \varphi_i (x_0 - p_0) = 1, \quad \lambda_i > 0, \quad |\varphi_i (x_0 - p_0)| \leqslant 1, \quad (i = 1,\ldots,h)$$

implică imediat

$$\varphi_i (x_0 - p_0) = 1, \qquad (i = 1,\ldots, h);$$

în același timp, $\varphi_i (x_0) = 1$, $i = 1,\ldots, h$ și $p_0 \neq \theta$. Prin urmare, ecuațiile liniare neomogene

$$\varphi_i (x) = 1, \qquad (i = 1,\ldots,h)$$

cu $n+1$ necunoscute (anume coordonatele lui $x \in E_{n+1}$) au două soluții distincte x_0 și $x_0 - p_0$. De aceea, dacă $h = n+1$, atunci ele sînt liniar dependente, adică există numere reale $\mu_1,\ldots, \mu_{n+1}$ astfel încît

$$|\mu_1| + \ldots + |\mu_{n+1}| \neq 0, \tag{14}$$

$$\mu_1 \varphi_1 + \ldots + \mu_{n+1} \varphi_{n+1} = 0, \tag{15}$$

$$\mu_1 + \ldots + \mu_{n+1} = 0. \tag{16}$$

Din (14) și (16) rezultă că mulțimile de indici

$$P = \{ j \mid \mu_j > 0 \} \qquad \text{și} \qquad N = \{ k \mid \mu_k < 0 \}$$

sînt nevide, deci relațiile (15) și (16) se pot scrie sub forma

$$\sum_{j \in P} \mu_j \varphi_j = \sum_{k \in N} (-\mu_k) \varphi_k, \tag{17}$$

$$\sum_{j \in P} \mu_j = \sum_{k \in N} (-\mu_k), \tag{18}$$

în care figurează numai coeficienți pozitivi; totodată, notînd cu p numărul elementelor mulțimii P, putem evident presupune că $p \geqslant 2$ (dat fiind că $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n+1}$ sînt distincte și neopuse două cîte două).

Deoarece $\lambda_1,\ldots, \lambda_p$, $\mu_1,\ldots,\mu_p > 0$, în baza propoziției 2 există un indice $j_1 \in P$ astfel încît să avem (9). De aici, ținînd seama de (17), avem

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \varphi_i = \sum_{j \in P} \lambda_j \varphi_j + \sum_{i \notin P} \lambda_i \varphi_i =$$

$$= \frac{\lambda_{j_1}}{\mu_{j_1}} \sum_{j \in P} \mu_j \varphi_j + \sum_{j \in P} \left(\lambda_j - \frac{\lambda_{j_1} \mu_j}{\mu_{j_1}} \right) \varphi_j + \sum_{i \notin P} \lambda_i \varphi_i =$$

$$= \frac{\lambda_{j_1}}{\mu_{j_1}} \sum_{k \in N} (-\mu_k) \varphi_k + \sum_{j \in P} \left(\lambda_j - \frac{\lambda_{j_1} \mu_j}{\mu_{j_1}} \right) \varphi_j + \sum_{i \notin P} \lambda_i \varphi_i = \sum_{j=1}^{n+1} \nu_j \varphi_j.$$

Din inegalitățile $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} > 0$, $\mu_j > 0$ $(j \in P)$, $\mu_k < 0$ $(k \in N)$ și (9) rezultă că $\nu_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n+1$. Totodată, deoarece $j_1 \in P$, avem $\nu_{j_1} = \lambda_{j_1} - \frac{\lambda_{j_1}\mu_{j_1}}{\mu_{j_1}} = 0$. În sfîrșit, suma coeficienților este, ținînd seama de (18),

$$\sum_{j=1}^{n+1} \nu_j = \frac{\lambda_{j_1}}{\mu_{j_1}} \sum_{k \in N} (-\mu_k) + \sum_{j \in P} \left(\lambda_j - \frac{\lambda_{j_1}\mu_j}{\mu_{j_1}} \right) + \sum_{j \in P} \lambda_i =$$

$$= \frac{\lambda_{j_1}}{\mu_{j_1}} \sum_{j \in P} \mu_j + \sum_{j \in P} \left(\lambda_j - \frac{\lambda_{j_1}\mu_j}{\lambda_{j_1}} \right) + \sum_{i \in P} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1.$$

Așadar, avem (12) și (13) cu $h \leqslant n$.

Funcționalele liniare $\varphi_h, \ldots, \varphi_k$ se pot însă extinde *) pe tot spațiul E cu păstrarea normei pînă la h funcționale liniare $f_1, \ldots, f_h \in E^*$ astfel încît $f_1, \ldots, f_h$ să fie puncte extreme distincte neopuse două cîte două ale sferei unitate $S^* \subset E^*$. Din (12) și (13) rezultă atunci că avem (7) și (8), ceea ce termină demonstrația.

Observația 1. Dacă, în particular, E este spațiul $C(Q)$ al tuturor funcțiilor reale continue pe un spațiu Hausdorff bicompact Q, atunci din teorema 2 se regăsește cu ușurință teorema de unicitate clasică a lui A. Haar**).

Observația 2. Teorema 2 de mai sus nu este în esență altceva, decît teorema 2.2 din lucrarea [4]. Am considerat necesar să dăm demonstrația de mai sus, deoarece *demonstrația din [4] este incompletă.* De asemenea, demonstrația de față este elementară, cu mult mai simplă decît cea din lucrarea [4] (care a utilizat teoria mulțimilor regulat convexe a lui Krein, Milman și Șmulian precum și valorile medii în sensul lui Markov).

4. În sfîrșit, menționăm că în lucrarea [4] am dat încă un criteriu de unicitate a polinomului de cea mai bună aproximație, anume teorema 2.1. În legătură cu aceasta trebuie observat***) că proprietățile 1° și 2° de la p. 113 din lucrarea [4], ale valorilor medii în sensul lui Markov și teoremele ale căror demonstrații folosesc aceste proprietăți, sînt inexacte sub forma lor inițială. Ele devin însă exacte dacă înlocuim mulțimea $\mathfrak{F}$ de puncte extreme neopuse două cîte două ale sferei unitate $S^* \subset E^*$ prin închiderea slabă a ei și mulțimea $\{f \mid f \mathfrak{F},\ \mu(\{f\}) \neq 0\}$ prin *suportul* măsurii pozitive μ (în sensul lui N. Bourbaki [2]).

Modificînd astfel teorema 2.1 din lucrarea [4], obținem următorul criteriu de unicitate a polinomului de cea mai bună aproximație :

---

*) În baza teoremei 5 din lucrarea [3].

**) Vezi [4], p. 130, teorema 2.3.

***) Această observație mi-a fost făcută de acad. prof. Szökefalvi-Nagy Béla și conf. C.T. Ionescu Tulcea; cu această ocazie îi mulțumesc pentru ea precum și pentru citirea atentă a lucrării [4].

Pentru ca orice element $x \in E$ *să aibă un singur polinom de cea mai bună aproximație, este necesar și suficient ca,* $\mathfrak{F}$ *fiind o mulțime oarecare de puncte extreme neopuse două cîte două ale sferei unitate* $S^* \subset E^*$, *să nu existe nici o valoare medie* $\mathfrak{M}$ *definită în închiderea slabă a mulțimii* $\mathfrak{F}$ *și nici un polinom* $p_0 \neq 0$ *astfel încît*

$$m\ (x_k) = 0, \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{19}$$

$$\bigcap_{f \in \Sigma} \{ x \mid f(x) = \|x\| = \|x - p_0\| \} \neq \Lambda, \tag{20}$$

unde notațiile sînt cele din [4] *și prin* $\sum$ *am notat suportul măsurii* μ.

Din punctul de vedere al utilității practice prezintă însă interes numai teoremele 1 și 2 de mai sus, în special necesitatea condiției teoremei 1 și suficiența condiției teoremei 2.

ANEXĂ

Simplificarea demonstrației teoremei de caracterizare a polinoamelor de cea mai bună aproximație [5].

În lucrarea [5] am obținut următoarea teoremă de caracterizare a polinoamelor de cea mai bună aproximație*) :

T e o r e m ă. *Pentru ca polinomul* $q = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$ *să fie un polinom de cea mai bună aproximație al elementului* $x \in E \setminus G_n$, *este necesar și suficient să existe h puncte extreme distincte neopuse două cîte două* $f_1, \ldots, f_h$ *ale sferei unitate* $S^* \subset E^*$, *unde* $1 \leqslant h \leqslant n + 1$, *și h numere pozitive* $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ *avînd suma egală cu* 1, *astfel încît*

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i f_i(x_k) = 0, \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i f_i(-x) = \|q - x\|. \tag{15}$$

Demonstrația din lucrarea [5] s-a bazat pe două leme **), în care interveneau unele proprietăți generale ale valorilor medii în sensul lui Krein și Șmulian. Vom da acum o simplificare a demonstrației amintite, în care nu intervin decît valori medii în mulțimi finite și care nu mai utilizează cele două leme amintite : prima este de prisos, iar în loc de a doua ajunge să utilizăm una mai simplă, anume propoziția 1 din lucrarea de față.

Trecem la demonstrație.

*) Vezi [5], teorema 3.1.

**) Vezi [5], lemele 2,1. și 2, 2.

Necesitatea. Fie q un polinom de cea mai bună aproximație al elementului $x \in E \setminus G_n$. Atunci q este un polinom de cea mai bună aproximație al elementului x și în subspațiul $E_{n+1} = [x_1, \ldots, x_n, x]$ de dimensiune $n+1$. Prin urmare, în virtutea teoremei 1.1 din [5] există o funcțională liniară $\varphi \in E^*_{n+1}$ cu $\|\varphi\| = 1$, astfel încît

$$\varphi(x_k) = 0, \qquad (k = 1, \ldots, n),$$
$$\varphi(-x) = \|q - x\|.$$

În baza propoziției 1 există atunci h puncte extreme distincte neopuse două cîte două $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$ ale sferei unitate $S^*_{n+1} \subset E^*_{n+1}$, unde $1 \leqslant h \leqslant n+1$, și h numere pozitive $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ avînd suma egală cu 1, astfel încît $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_h \varphi_h$, deci, astfel încît

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \varphi_i(x_k) = 0, \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \varphi_i(-x) = \|q - x\|.$$

Or, funcționalele liniare $\varphi_1, \ldots, \varphi_h \in E^*_{n+1}$ se pot extinde*) pe tot spațiul E cu păstrarea normei pînă la h funcționale liniare $f_1, \ldots, f_h \in E^*$ astfel încît $f_1, \ldots, f_h$ să fie puncte extreme distincte neopuse două cîte două ale sferei unitate $S^* \subset E^*$.

Prin urmare condiția din teoremă este necesară.

Suficiența. Dacă condiția din teoremă este satisfăcută, funcționala liniară $f = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i f_i$ posedă proprietățile

$$f(z) = 0 \text{ pentru orice } z \in G_n,$$
$$f(-x) = \|q - x\|.$$

Totodată avem și $\|f\| = 1$, deoarece, pe de o parte, relațiile

$$f(q - x) = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i f_i(q - x) = \|q - x\| \quad \text{și} \quad \|x\| = 1$$

implică $\|f\| \geqslant 1$ și, pe de altă parte, $\|f\| \leqslant \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \|f_i\| = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i = 1$.

Prin urmare, în virtutea teoremei 1.1 din [5] q este un polinom de cea mai bună aproximație al elementului x.

Teorema este demonstrată.

*) În baza teoremei 5 din lucrarea [3].

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ЭЛЕМЕНТА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЛЮБЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Пусть E — любое вещественное банахово пространство, G — линейное подпространство E и $x \in E$. Будем называть элементом наилучшего приближения элемента x любой элемент $g_0 \in G$ со свойством (1).

Теорема 1. *Для того чтобы любой элемент $x \in E$ имел не более одного элемента наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы не существовало ни одного линейного функционала $f \in E^*$ и ни одного элемента $g_0 \in G$, $g_0 \neq 0$, такого, чтобы имело место* (4), (5) *и* (6).

В частности, если $G = G_n$ есть линейное подпространство, порожденное n линейно независимыми элементами (2), то будем называть полиномом любой элемент G_n.

Теорема 2. *Для того чтобы любой элемент $x \in E$ имел один и только один полином наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы не существовало h различных попарно непротивоположных экстремальных точек $f_1, \ldots, f_h$ единичной сферы $S^* \subset E^*$ $(1 \leqslant h \leqslant n)$, h ненулевых чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ с $\sum_{i=1}^{h} |\lambda_i| = 1$ и полинома $p_0 \neq 0$ такого, чтобы имело место* (7) *и* (8).

В сущности эта теорема является теоремой 2.2 из работы [4]. Доказательство ее является элементарным, оно гораздо проще, чем доказательство, приведенное в работе [4], которое к тому же, как было замечено впоследствии, было неполным.

В заключении исправляется ошибка из работы [4].

В приложении дается упрощение доказательства теоремы охарактеризования полиномов наилучшего приближения (см. [5], теорема 3.1).

SUR L'UNICITÉ DE L'ÉLÉMENT DE MEILLEURE APPROXIMATION DANS DES ESPACES DE BANACH QUELCONQUES

(RÉSUMÉ)

Soient E un espace de Banach quelconque, G un sous-espace de E et $x \in E$. On appelle élément de meilleure approximation de l'élément x tout élément $g_0 \in G$ jouissant de la propriété (1).

Théorème 1. *Pour que tout élément $x \in E$ ait au plus un élément de meilleure approximation, il faut et il suffit qu'il n' existe aucune fonctionnelle linéaire $f \in E^*$ et aucun élément $g_0 \in G$, $g_0 \neq 0$ tels que l'on ait* (4), (5) *et* (6).

En particulier, si $G = G_n$ est le sous-espace engendré par n éléments linéairement indépendants (2), on appelle polynôme tout élément de G_n.

Théorème 2. *Pour que tout élément* $x \in E$ *ait exactement un polynôme de meilleure approximation, il faut et il suffit qu'il n'existe pas* h *points extrêmes distincts non-opposés deux à deux* $f_1, \ldots, f_h$ *de la sphère unité* $S^* \subset E^*$, *où* $1 \leqslant h \leqslant n$, h *nombres non-nuls* $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ *avec* $\sum_{i=1}^{h} |\lambda_i| = 1$ *et un polynôme* $p_0 \neq 0$, *tels que l'on ait* (7) *et* (8).

Ce théorème n'est en essence que le théorème 2.2 de [4]. La présente démonstration est élémentaire, beaucoup plus simple que celle donnée dans [4], qui, d'ailleurs, ainsi qu'on l'a remarqué ultérieurement, était incomplète.

Enfin, on rectifie une erreur de [4].

Dans l'Annexe, on donne une simplification de la démonstration du théorème de caractérisation des polynômes de meilleure approximation (v. [5], théorème 3.1).

BIBLIOGRAFIE

1. Banach S., *Théorie des opérations linéaires*. Varşovia, 1932.
2. Bourbaki N., *Intégration*. Actualités Scientifiques et Industrielles, nº 1175, Paris, 1952.
3. Singer I., *Sur l'extension des fonctionnelles linéaires*, Revue de Math. Pures et Appl., 1956., t. I. nr. 2, p. 99—106.
4. — *Proprietăţi ale suprafeţei sferei unitate şi aplicaţii la rezolvarea problemei unicităţii polinomului de cea mai bună aproximaţie în spaţii Banach oarecare* Studii şi Cercetări Matematice, t. VII, 1—2, 1956, p. 95—145.
5. — *Caractérisation des éléments de meilleure approximation dans un espace de Banach quelconque*. Acta Sci. Math., (Szeged), 1956, t. 17, fasc, 3—4, p. 181—189.

LISTA COMUNICĂRILOR

ţinute în cadrul Institutului de matematică al Academiei R.P.R., în anul 1956

1. T. GANEA, Asupra unei teoreme a lui Hurewicz, 24 ianuarie 1956.
2. C. POPOVICI, Asupra unicităţii descompunerii în factori primi în inelul întregilor pătratic', 7 februarie 1956.
3. A. HALANAY şi I. BERSTEIN, Indicele punctului singular şi soluţii periodice, 6 martie 1956.
4. I. BERSTEIN, Despre soluţiile periodice ale sistemelor neliniare cu parametrul mic, 6 martie 1956.
5. A. CORNEA şi C. CONSTANTINESCU, Despre teorema Danjoy - Carleman - Ahlfors, 20 martie 1956.
6. RADU MIRON, Despre aducerea la forma canonică a unui grup întrinsec, 3 aprilie 1956.
7. M. JURCHESCU, Despre prelungirea suprafeţelor riemanniene deschise, 17 aprilie 1956.
8. GH. VRĂNCEANU, Spaţiile simetrice generalizate ale lui P.K. Rașevski, 24 aprilie.
9. GR. C. MOISIL şi C. IACOB, Raport asupra celui de-al IX-lea Congres de Mecanică aplicată de la Bruxelles, 26 octombrie 1956.
10. M. ROTH, Entropia cîmpurilor probabilistice, 2 octombrie, 1956.
11. M. ROTH, Entropia proceselor stohastice, 16 octombrie, 1956.
12. O. ONICESCU, Varietăţi riemanniene multilocale, 6 noiembrie 1956.
13. GR. C. MOISIL, Raportul delegaţiei romîne la sesiunea matematicienilor bulgari, 6 noiembrie 1956.
14. G. MARINESCU şi G. CIUCU, Raport asupra misiunii în cadrul colaborării tehnico-ştiinţifică cu R. Cehoslovacă, 20 noiembrie 1956.
15. V. VÎLCOVICI, Asupra mişcării staţionare a fluidelor perfecte, 4 decembrie 1956.
16. M BENADO, Asupra unei interpretări topologice a noţiunii de normalitate unitară, 18 decembrie 1956.

NOTĂ

În numerele anterioare ale revistei s-au strecurat o serie de greșeli a căror rectificare o dăm mai jos :

La articolul : *Sinteza schemelor cu relee ideale cu ajutorul corpurilor de imaginare ale lui Galois* de academician Gr. C. Moisil, din Buletinul științific, Secția de științe matematice și fizice, t. VIII, nr. 3, iulie—septembrie 1956 :

Pag.	rîndul	în loc de :	se va citi :
431	12 de sus	$(x \quad e_1)$	$(x-e_1)$
432	16 de jos	$\mathcal{GJ}\,(2)$	$\mathcal{GF}\,(2)$
433	9 de sus	$u+v=u\,v \cup v\,\overline{u}$	$u+v=u\,\overline{v} \cup v\,\overline{u}$
436	24 de jos	$\mathcal{GJ}\,(2^3)$	$\mathcal{GF}\,(2^3)$
443	7 de sus	$\mathcal{GJ}\,(2^4)$	$\mathcal{GF}\,(2^4)$
450	8 de sus	$x\,\overline{(z\,\overline{t} \cup y\,z)}$	$x\,\overline{(z\,\overline{t} \cup y\,z)}$
450	9 de sus	$y\,(x\,\overline{t}+z\,t+x\,\overline{t}\,z\,\overline{t})$	$y\,(x\,\overline{t}+z\,t+x\,\overline{t}\,z\,t)$

★

La articolul : *Analiza și sinteza schemelor cu comandă directă cu ajutorul imaginarelor lui Galois* de academician Gr. C. Moisil și Constantin P. Popovici, din Buletinul științific, Secția de științe matematice și fizice, t. VIII, nr. 3, iulie—septembrie 1956 :

Pag.	rîndul	în loc de :	se va citi :
456	7 de sus	$L_6\,(0)=1$	$L_0\,(0)=1$
461	17 de jos	$\sum_{=}^{14}$	$\sum_{n=1}^{14}$
467	20 de sus	$\mathcal{GJ}\,2^2)$	$\mathcal{GF}\,(2^2)$

★

La articolul : *Analiza, sinteza și simplificarea schemelor cu contacte și supape cu comandă directă* de academician Gr. C. Moisil și Mariana Nedelcu, din Buletinul științific, Secția de științe matematice și fizice, t. VIII, nr. 3, iulie—septembrie 1956 :

Pag.	rîndul	în loc de :	se va citi :
469	12 de jos	$\bar{\varepsilon}$	ε
469	5 de jos	II	II
471	4 de sus	$\ldots + \bar{a}\,\varepsilon\,e\,a\,d\,b + \ldots$	$\ldots + \bar{a}\,\varepsilon\,e\,a\,d\,\bar{b} + \ldots$
471	5 de sus	$\ldots + \bar{b}\,b\,\bar{\varepsilon}\,\varepsilon\,c + a\,\bar{b}\,c\,d\,\varepsilon\,\bar{e}$	$\ldots + \bar{b}\,\bar{b}\,\varepsilon\,\varepsilon\,c + a\,\bar{b}\,c\,d\,\varepsilon\,\bar{e}$
473	11 de sus	$\ldots (f + m) = \ldots$	$\ldots (\bar{f} + m) = \ldots$
473	12 de jos	$\ldots(\bar{c}\,f\,m\,c\,d + \ldots$	$\ldots(c\,\bar{f}\,m\,\bar{c}\,d + \ldots$
473	11 de jos	$\ldots + \bar{d}\,\bar{f}\,\bar{f}) + \ldots$	$\ldots + \bar{d}\,\bar{f}\,f) + \ldots$
473	9 de jos	$\ldots\varepsilon\,\bar{m}\,f\,\bar{c}\,\bar{d}\,\bar{e}\,\bar{f}\,\bar{d}$	$\ldots + \varepsilon\,\bar{m}\,f\,\bar{c}\,\bar{d}\,\bar{e}\,\bar{f}\,d$
474	2 de sus	$\ldots + a\,\bar{b}\,f\,f),$	$\ldots + a\,\bar{b}\,\bar{e}\,f),$
474	15 de jos	$\ldots + (a\,\varepsilon\,c + \ldots$	$,,, + (a\,\varepsilon\,\bar{c} + \ldots$
474	11 de jos	$\ldots + f\,d \ldots$	$\ldots + \bar{f}\,d \ldots$
474	7 de jos	$\ldots + d\,a\,b\,c\,\bar{c}\,\bar{f}$	$\ldots + d\,a\,b\,c\,\bar{e}\,\bar{f}$
474	5 de jos	$\ldots + c\,\varepsilon\,e\,\bar{\varepsilon}\,\bar{f}\,\bar{a}$	$\ldots + c\,\varepsilon\,e\,\bar{\varepsilon}\,\bar{f}\,\bar{a} =$
474	3 de jos	$\ldots + d\,a\,b\,\bar{c}\,f = \ldots$	$\ldots + d\,a\,b\,\bar{c}\,f = \ldots$
477	14 de jos	$\ldots + a\,\bar{3} = \ldots$	$\ldots + a\,\bar{\varepsilon} = \ldots$
477	1 de jos	$\ldots + \dot{c}) \ldots$	$\ldots + \bar{c})$
478	5 de jos	$\ldots + c\,b\,\bar{e}$	$\ldots + c\,\bar{b}\,e + \ldots$
479	7 de sus	$\ldots = b = \ldots$	$\ldots = d = \ldots$
479	1 de jos	$\ldots + \bar{c}\,d + \ldots$	$\ldots + c\,d + \ldots$
480	1 de sus	$\ldots [\bar{b}\,\bar{m} + \ldots$	$\ldots [\bar{b}\,m + \ldots$
480	10 de sus	$\ldots + a\,\bar{b}\,\bar{f}\,\bar{m}).$	$\ldots + a\,\bar{b}\,\bar{e}\,f\,\bar{m}).$
480	12 de sus	$\ldots(c\,d\,\bar{e}\,f + \bar{c}\,\bar{d}\,\bar{f}) + \varepsilon a\{\bar{c}\,d\ (\bar{b} + \ldots$	$\ldots(\bar{c}\,d\,\bar{e}\,f + c\,\bar{d}\,\bar{f}) + \varepsilon a\{\bar{c}\,d\,e\,(\bar{b} + \ldots$
480	13 de sus	$\ldots + \bar{a}\,b\,\bar{f}\,\bar{m}).$	$\ldots + a\,\bar{b}\,\bar{e}\,f\,\bar{m}).$
480	6 de jos	$\ldots + a\,b\,c\,d\,\bar{f}] \ldots$	$\ldots + a\,b\,c\,d\,\bar{e}\,\bar{f}] \ldots$
480	4 de jos	$\ldots + \bar{\bar{c}})] \ldots$	$\ldots + \bar{c})] \ldots$
48.	16 de jos	$\ldots + b).$	$\ldots + \bar{b}).$
485	14 de jos	$\ldots (\bar{c}\,d\,\bar{f} + \ldots$	$\ldots (\bar{c}\,d\,\bar{e}\,f + \ldots$
485	13 de jos	$\ldots + \varepsilon\,\bar{c}\,d \ldots$	$\ldots + \bar{\varepsilon}\,\bar{c}\,d \ldots$
485	12 de jos	$k\,(a, b, c, d\,e, f, m)$	$k\,(a, b, c, d, e, f, m)$

★

La articolul : *Cuantificarea spațiului cinci-dimensional* de M. Zăgănescu, din Buletinul științific, Secția de științe matematice și fizice, t. VIII, nr. 4, octombrie—decembrie 1956 :

Pag.	rîndul	în loc de :	se va citi :
716	formula (6)	$\varphi = \text{arc th } \frac{y}{c}$	$\varphi = \text{arg th } \frac{y}{c}$
717	9 de sus	... și coordonata x.	... și coordonata x_4.
717	formula (9)	$a\sigma^2 = a\tau^2 + \ldots$	$d\sigma^2 = -d\tau^2 + \ldots$
717	formula (10)	$\ldots = -c^2 d\tau^2 + \ldots$	$\ldots = -c^2 dl^2 + \ldots$
717	20 de sus	... prin $\Delta\psi$...	... prin $\Delta_5\psi$...
717	6 de jos	... spațiul R_4	... spațiul R_5
717	formula (15)	$\ldots = A^r_{i'} x_r$.	$\ldots A^r_{i'} x_r$,
718	formula (17)	$\partial' = \ldots$	$\vartheta' = \ldots$
718	formula (20)	$\alpha^2 - \beta^2 - \ldots$	$\alpha^2 + \beta^2 - \ldots$
719	formula (25)	$\xi 1 = \frac{x}{ct} \xi_2 = \ldots$	$\xi_1 = \frac{x}{ct}$, $\xi_2 = \ldots$
719	formula (26)	$\xi'_2 = \frac{A' \xi + \ldots}{\ldots}$	$\xi'_2 = \frac{A' \xi_1 + \ldots}{\ldots}$
719	formula (29)	$\eta' = \frac{\ldots}{b\eta + a}$	$\eta' = \frac{\ldots}{\overline{b}\eta + \overline{a}}$
719	6 de jos	$\overline{a}a - \overline{b}b = 1$	$a\overline{a} - \overline{b}b = 1$
720	7 de jos	$d\vartheta^2 = 0$	$d\sigma^2 = 0$
720	formula (34)	$d\partial = \ldots$	$d\vartheta = \ldots$
721	9 de sus	... stabilește între	... stabilește legătura între
721	17 de sus	$A\mu$ ($A_0 = \ldots$	$A\mu$ ($A_0 = \ldots$
721	formula (37)	$(V^2 + \ldots) A\mu = 0$	$\nabla^2 + \ldots) A\mu = 0$

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE,
PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII

I-762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

Institut de Documentare Tehnică
BUCUREȘTI
OBMEN - CHINE
VYMĚNA - WYMIANA
TAUSCH - СМЕНА

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

3-4

ANUL VIII

1957

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

MŰSZAKI KÖNYVTÁR·ORSZÁGOS·1883

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

3-4

ANUL VIII

1957

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACADEMICIAN S. STOILOW — *redactor responsabil;* ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU — redactor adjunct; ACADEMICIAN MIRON NICOLESCU; GH. MIHOC, membru corespondent al Academiei R. P. R.; N. TEODORESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.; T. GANEA; A. HALANAY.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul VIII, nr. 3—4 1957

SUMAR

Pag.

G. VRĂNCEANU, Tensori armonici şi grupuri de mişcare ale unui spaţiu Riemann 257

T. POSTELNICU, Studiul spaţiilor A_2 cu conexiune afină liniară local euclidiene 279

VIOREL DUMITRAŞ, Grupurile de mişcare cu şase parametri ale spaţiilor A_3 303

NICOLAE DINCULEANU, Spaţii Orlicz de cîmpuri de vectori 343

GEORGE CIUCU, Proprietăţi ergodice ale unor lanţuri cu legături complete 413

G. G. VRĂNCEANU, Determinarea transformărilor punctuale de speţă trei 447

DRAGOŞ VAIDA, Caracterizarea structurilor modulare prin sisteme cu axiome independente 457

IOAN FILIMON, Asupra corecţiilor de compresibilitate la mişcări continue subsonice. Cazul obstacolului eliptic 467

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MATHÉMATIQUES

Tome VIII, n° 3—4 1957

SOMMAIRE

Page

G. VRĂNCEANU, Tenseurs harmoniques et groupes de mouvement d'un espace de Riemann 257

T. POSTELNICU, Étude des espaces A_2 à connexion affine linéaire, localement euclidiens 279

VIOREL DUMITRAŞ, Les groupes de mouvement à 6 paramètres des espaces A_3 303

NICOLAE DINCULEANU, Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs 343

GEORGE CIUCU, Propriétés ergodiques de certaines chaînes aux liaisons complètes 413

G. G. VRĂNCEANU, Détermination des transformations ponctuelles d'espèce trois 447

DRAGOŞ VAIDA, Détermination des caractères des structures modulaires par des systèmes à axiomes indépendants 457

IOAN FILIMON, Sur les corrections de compressibilité aux mouvements continus subsoniques. Cas de l'obstacle elliptique 467

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том VIII, № 3—4 1957

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Г. ВРЭНЧАНУ, Гармонические тензоры и группы движения пространства Римана 257

Т. ПОСТЕЛНИКУ, Исследование локально-евклидовых пространств A_2 с линейной аффинной связностью 279

В. ДУМИТРАШ, 6-параметрические группы движения пространств A_3 . 303

Н. ДИНКУЛЯНУ, Пространства Орлича векторных полей 343

Г. ЧУКУ, Эргодические свойства некоторых цепей с полными связями . . 413

Г. ВРЭНЧАНУ, Определение точечных преобразований третьего рода . . 447

Д. ВАЙДА, Характеристика модулярных структур посредством систем независимых аксиом 457

И. ФИЛИМОН, О поправках на сжимаемость при непрерывных дозвуковых движениях. Случай эллиптического препятствия 467

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

TENSORI ARMONICI ȘI GRUPURI DE MIȘCARE ALE UNUI SPAȚIU RIEMANN *)

DE

G. VRANCEANU

Se știe, după rezultatele obținute de G. de Rham și W. Hodge [1], că fiind dat un spațiu Riemann compact orientabil, numărul de tensori armonici independenți de un ordin oarecare p pe care îi putem construi în spațiu, este egal cu numărul lui Betti B_p. Pe de altă parte, se știe, după o teoremă a lui K. Yano [2], că fiecare tensor armonic este un invariant în raport cu o mișcare a spațiului. Există deci o relație strînsă între numărul r al parametrilor grupului de mișcare al unui spațiu V_n compact și numărul Betti al acestui spațiu. Ținînd seamă că fiecare tensor armonic este în același timp un tensor cu derivată exterioară nulă, sau cum se mai spune, un tensor închis, există o relație strînsă între numărul tensorilor închiși invarianți și grupul G_r al spațiului.

Vom arăta în prima parte a lucrării că putem da maxime ale numărului r în cazul în care există în spațiu un vector închis invariant sau un tensor închis invariant de ordinul doi și, în particular, în cazul în care unul din numerele lui Betti, B_1 sau B_2, nu este nul.

În partea a doua, vom da cîteva formule care leagă tensorii închiși invarianți cu grupul de mișcare G_r al spațiului.

În partea a treia, vom presupune că spațiul V_n este raportat la un sistem de congruențe ortogonale și vom arăta că în cazul în care spațiul are un grup G_n simplu tranzitiv și utilizăm un sistem de congruențe ortogonale cu coeficienți de rotație constanți [3], studiul tensorilor armonici ai spațiului devine o problemă algebrică, ceea ce generalizează un rezultat al lui Hodge relativ la spațiile grupurilor semisimple. Se dau condiții necesare și suficiente relative la grupul G_n pentru ca spațiul să posede un număr oarecare de vectori armonici sau de tensori armonici de ordinul doi.

---

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în ședința din 23 mai 1957.

I

Fiind dat un spațiu Riemann V_n, definit ca o varietate diferențiabilă, a cărui metrică într-o vecinătate oarecare este dată de formula

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{1}$$

se spune că un vector φ_i este armonic în V_n dacă avem [2]*)

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{j,i}, \quad a^{ij}\varphi_{i,j} = 0, \tag{2}$$

unde a^{ij} sînt ca de obicei componentele contravariante ale tensorului a_{ij} și unde $\varphi_{i,j}$ sînt derivatele covariante

$$\varphi_{i,j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} - \left| \begin{matrix} s \\ i\,j \end{matrix} \right| \varphi_s,$$

$\left| \begin{matrix} s \\ i\,j \end{matrix} \right|$ fiind simbolurile lui Christoffel de speța a doua ale metricii (1). Vedem că formulele (2) pot de asemenea să fie scrise

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^j}. \tag{2'}$$

Aceasta înseamnă că covariantul biliniar al formei lui Pfaff $ds = \varphi_i\, dx^i$ asociată vectorului φ_i, este nul. Primele formule (2) sînt deci independente de metrica (1) a spațiului. Ele explică simplu faptul că forma ds este o diferențială totală exactă sau că vectorul φ_i este un gradient.

Să presupunem acum că spațiul V_n posedă o mișcare dată de transformarea infinitezimală

$$x'^i = x^i + \eta^i, \tag{3}$$

unde η^i trebuie să fie considerate ca funcții de x^i și cantități de primul ordin. Să presupunem că forma ds este invariantă prin această transformare, deci avem

$$\varphi'_i\, dx'^i = \varphi_i\, dx^i.$$

Neglijînd termenii de ordinul doi în η^i, obținem

$$L\varphi_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j}\eta^j + \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}\varphi_j = 0. \tag{3'}$$

Se spune de asemenea că $L\varphi_i$ este derivata lui Lie a vectorului φ_i în raport cu vectorul η^i. Deci forma ds este invariantă dacă derivata $L\varphi_i$ este nulă și invers.

Să considerăm acum produsul scalar

$$\varphi_i \eta^i = k. \tag{4}$$

*) p. 37.

Avem prin derivare

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i}\,\eta^j + \varphi_j \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} = \frac{\partial k}{\partial x^i},$$

de care dacă ținem seama în formulele (3'), obținem

$$L\varphi_i = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i}\right)\eta^j + \frac{\partial k}{\partial x^i}. \tag{4'}$$

Această formulă ne arată că în cazul în care φ_i este un gradient și dacă este de asemenea invariant în raport cu mișcarea η^i, atunci produsul scalar k este o constantă.

Avem deci următoarea teoremă :

Dacă diferențiala totală exactă $ds = \varphi_i\, dx^i$ *este invariantă prin transformarea* η^i *atunci produsul scalar* $\varphi_i \eta^i$ *este o constantă.*

Dacă vectorul φ_i este armonic și dacă η^i este o mișcare a spațiului V_n, rezultă, cu ajutorul teoremei lui Yano, că $ds = \varphi_i\, dx^i$ este invariantă prin η^i și deci teorema precedentă coincide cu teorema lui Bochner [2]*)

De altfel știm că η^i este o mișcare a spațiului V_n dacă derivata lui Lie a lui a_{ij} este nulă, deci dacă avem formulele

$$La_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\,\eta^k + a_{is}\frac{\partial \eta^s}{\partial x^j} + a_{sj}\frac{\partial \eta^s}{\partial x^i} = 0 \tag{5}$$

care sînt echivalente cu formulele lui Killing

$$\eta_{i,j} + \eta_{j,i} = 0, \tag{5'}$$

unde $\eta_{i,j}$ este derivata covariantă a lui $\eta_i = a_{ij}\eta^j$.

Într-o lucrare recentă, C. Constantinescu [4] a observat că ținînd seama de teorema lui Lefschetz care spune că într-un spațiu V_n, avînd caracteristica lui Euler-Poincaré, diferită de zero**), fiecare mișcare infinitezimală posedă un punct fix, deci există un punct unde η^i sînt nuli, constanta k trebuie să fie nulă, deci vectorii φ_i și η^i sînt ortogonali. Rezultă deci că în cazul în care spațiul V_n este omogen, nu există vectori armonici, deoarece nu putem avea un vector φ_i ortogonal cu n alți vectori, deci numărul B_1 al lui Betti este nul.

În cazul nostru avem teorema :

Într-un spațiu V_n *compact și omogen, cu caracteristica lui Euler-Poincaré nenulă, nu poate să existe un vector* φ_i *gradient invariant. Altfel spus, spațiul* V_n *nu poate să posede o formă a lui Pfaff invariantă.*

Să presupunem că există în spațiu un vector gradient φ_i, invariant prin toate mișcările spațiului. Acest spațiu posedă deci forma invariantă a lui Pfaff $ds = \varphi_i\, dx^i$. Printr-o transformare, de variabile putem presupune că avem, într-o vecinătate oarecare, $ds = dx^1$. Pe de altă

*) p. 43.

**) Scriind polinomul lui Poincaré $P(t) = B_0\, t^p + \ldots + B_p$, unde B sînt numerele lui Betti, caracteristica lui Euler-Poincaré este egală cu $P(-1)$.

parte, punînd $ds^1 = dx^1/\rho^2$, unde $\rho^2 = a^{ij}\varphi_i\varphi_j = a^{11}$ este pătratul lungimii vectorului φ_i, vectorul φ_i/ρ^2 este unitar în V_n și putem asocia lui ds^1 alte $n-1$ forme ale lui Pfaff ds^h $(h>1)$ care împreună cu ds^1 constituie un sistem de n congruențe ortogonale în V_n și în acest caz aceste forme sînt determinate printr-o transformare ortogonală de forma

$$d\bar{s}^1 = ds^1, \quad d\bar{s}^h = c_k^h\, ds^k, \quad (h, k = 2, \ldots, n). \tag{5''}$$

Cum sistemul lui Pfaff $ds^h = 0$ $(h>1)$ este evident complet integrabil, putem lua

$$ds^h = \lambda_i^h\, dx^i \quad (h, i = 2, \ldots, n)$$

astfel ca metrica lui V_n să se scrie

$$ds^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (ds^n)^2 = a_{11}(dx^1)^2 + a_{ij}\, dx^i\, dx^j \quad (i, j = 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Deoarece forma $ds = dx^1$ este un invariant, avem $dx'^1 = dx^1$ deci $x'^1 = x^1 + a$, unde a este o constantă. Vedem că în cazul în care spațiul V_n posedă translația $x'^1 = x^1 + a$ oricare ar fi a, coeficienții a_{11}, a_{ij} ai metricii (6) nu depind de variabila x^1.

Pe de altă parte, tensorul derivat $\varphi_{i,j}$ al vectorului invariant $\varphi_i\,(1, 0, \ldots, 0)$ este dat de formulele $\varphi_{i,j} = \left|\begin{matrix} 1 \\ i\ j \end{matrix}\right|$, care pot fi scrise, ținînd seama de formula (6),

$$\varphi_{1,1} = \frac{1}{2}\, a^{11}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1}, \quad \varphi_{1,j} = \frac{1}{2}\, a^{11}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^j}, \quad \varphi_{i,j} = -\frac{1}{2}\, a^{11}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^1}. \tag{6'}$$

Vectorul φ_i este deci armonic dacă avem

$$a^{11}\varphi_{1,1} + a^{ij}\varphi_{i,j} = a^{11}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} - a^{ij}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^1} = 0$$

și această ecuație este evident verificată dacă coeficienții metrici (6) nu depind de variabila x^1.

Avem deci următoarea teoremă:

Fiind dat un vector gradient $\varphi_i = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i}$, *acesta definește un vector armonic dacă spațiul* V_n *admite o mișcare* $\varphi' = \varphi + a$ *asociată acestui vector.*

Presupunînd că spațiul (6) posedă translația $x'^1 = x^1 + a$, grupul său total, ținînd seama de formulele (5), va fi de forma

$$x'^1 = x^1 + a, \quad x'^h = f^h(x^1, \ldots, x^n)$$

și acest grup poate să posede în plus $\dfrac{n(n-1)}{2}$ parametri și grupul maxim este atins dacă a_{11} este o constantă și dacă metrica $a_{ij}\, dx^i\, dx^j$ este metrica unui spațiu V_{n-1} cu curbură constantă.

Spațiul (6) este compact, x^1 este un unghi, deci definit, abstracție făcînd de un multiplu al lui 2π și dacă V_{n-1} este un spațiu compact cu curbură constantă pozitivă, adică este spațiul sferic sau spațiul eliptic, avem teorema :

Un spațiu V_n compact avînd un vector gradient invariant, posedă un grup maxim cu $\frac{n(n-1)}{2}+1$ parametri dacă este produsul direct al unui cerc și al unui V_{n-1} cu curbură constantă pozitivă.

Deoarece vectorul φ_i (1, 0, ..., 0) este în același timp armonic, rezultă că un spațiu V_n omogen compact cu numărul lui Betti $B_1 = 1$ posedă un grup de mișcare avînd cel mult $\frac{n(n-1)}{2}+1$ parametri și acest maximum este atins dacă spațiul este produsul direct al unui cerc și al unui V_{n-1} orientabil cu curbură constantă pozitivă.

Este de remarcat că, în acest caz, spațiul posedă de asemenea un cîmp de vectori armonici paraleli, deoarece derivatele covariante $\varphi_{i,j}$ date de formulele (6′) sînt toate nule. Deoarece spațiul V_n este produsul unui cerc C_1 și al unui V_{n-1} compact orientabil, se știe că polinomul lui Poincaré al acestui spațiu este egal cu produsul polinoamelor corespunzătoare ale lui C_1, care este $t+1$, și al lui V_{n-1}. Regăsim astfel rezultatul lui Lichnerowicz [5] care spune că dacă un spațiu V_n admite un cîmp de vectori armonici paraleli, deci cu derivată covariantă nulă, polinomul lui Poincaré al lui V_n este divizibil cu $t+1$.

Să presupunem acum că avem un tensor b_{ij} strîmb simetric. Dacă acest tensor admite mișcarea η^k, deci dacă derivata lui Lie a acestui tensor este nulă, avem

$$Lb_{ij} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k}\eta^k + b_{sj}\frac{\partial \eta^s}{\partial x^i} + b_{is}\frac{\partial \eta^s}{\partial x^j} = 0. \tag{7}$$

Să presupunem acum că derivata exterioară a acestui tensor este nulă. Avem

$$\Delta_k b_{ij} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial b_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial b_{ki}}{\partial x^j} = 0. \tag{8}$$

Tensorul b_{ij} este armonic, dacă alături de formulele (8) avem

$$a^{jk} b_{ij,k} = 0, \tag{8′}$$

unde $b_{ij,k}$ sînt derivatele covariante în raport cu tensorul a_{ij}.

Ținînd seama de formulele (8), formulele (7) devin

$$Lb_{ij} = \eta^k \Delta_k b_{ij} + \frac{\partial b_j}{\partial x^i} - \frac{\partial b_i}{\partial x^j} \quad (b_i = b_{si}\eta^s), \tag{9}$$

ceea ce ne spune că vectorul

$$b_i = b_{si}\eta^s \tag{9′}$$

este un gradient dacă Lb_{ij} și Δb_{ij} sînt nuli.

La fel, multiplicînd formulele (7) cu η^i și contractînd în raport cu i obținem formulele

$$\eta^i Lb_{ij} = \frac{\partial b_j}{\partial x^k}\eta^k + b_s \frac{\partial \eta^s}{\partial x^j} = Lb_j \tag{10}$$

ceea ce ne spune că b_i este un vector invariant, dacă b_{ij} este invariant.

Pe de altă parte, deoarece avem

$$b_{i.j} = b_{si.j}\eta^s + b_{si}\eta^s_{.j}$$

condiția ca b_i să fie armonic se scrie

$$a^{ij}b_{i.j} = a^{ij}b_{si.j}\eta^s + a^{ij}b_{si}\eta^s_{.j} = 0.$$

Vedem deci că în cazul în care b_{ij} este armonic, b_i este de as menea armonic dacă expresia

$$I = a^{ij}b_{si}\eta^s_{.j}$$

este nulă. Ținînd seama că $\eta^s_{.j} = a^{si}\eta_{li.j}$ și că tensorul $\eta_{li.j}$ este strîmb simetric dacă η^i este o mișcare a spațiului V_n, invariantul I se mai poate scrie sub forma

$$I = a^{ij}a^{sk}b_{si}\eta_{ik.j} = b^{kj}\eta_{ik.j}$$

ceea ce ne spune că I este totdeauna nul dacă η^i constituie un cîmp de vectori paraleli.

Fiind dat un tensor b_{ij} în spațiul V_n, se știe că putem alege un sistem de congruențe ortogonale astfel încît forma cvadratică strîmb simetrică $b_{ij}dx^i\delta x^j$, asociată tensorului b_{ij}, să fie dată de forma canonică

$$b_{12}[ds^1 ds^2] + \ldots + b_{2p-1\,2p}[ds^{2p-1}ds^{2p}], \tag{11}$$

unde $2p \leqslant n$ și unde am scris $[ds^1 ds^2] = ds^1\delta s^2 - ds^2\delta s^1$.

Să presupunem că $2p = n$, deci că spațiul V_n este de dimensiune pară $2p$ și că toți invarianții $b_{12}, \ldots, b_{2p-1\,2p}$ sînt egali. În acest caz, dacă b_{ij} este un tensor invariant, grupul de transformări ortogonale ale formelor ds^h, care păstrează forma canonică (11), este grupul ortogonal simplectic care posedă p^2 parametri. Grupul spațiului V_{2p} posedă deci cel mult $p^2 + 2p$ parametri și am arătat [6] că acest maximum este atins de o clasă de spații simetrice care coincid, de altfel, din punct de vedere global, cu spațiile proiective complexe. Am arătat de asemenea că aceste spații pot să fie considerate ca spații neolonome V^{2p}_{2p+1} pe o hipersferă a spațiului euclidian cu $2p + 2$ dimensiuni.

Avem deci teorema :

Fiind dat un spațiu V_{2p} compact al cărui număr B_2 al lui Betti este egal cu unitatea, acest spațiu posedă un grup de mișcare avînd cel mult $p^2 + 2p$ parametri și acest maximum este atins de spațiile proiective complexe.

Dacă $2p < n$, ceea ce este cazul general, cînd n este impar, grupul de transformări al congruențelor ortogonale care păstrează forma canonică (11) este un grup separabil care schimbă separat formele $ds^1, \ldots, ds^{2p}$ și formele $ds^{2p+1}, \ldots, ds^n$. În ceea ce privește grupul care schimbă $ds^1, \ldots, ds^{2p}$, coincide cu grupul ortogonal simplectic dacă invarianții $b_{12}, \ldots, b_{2p-1\,2p}$ sînt toți egali. Deoarece grupul ortogonal simplectic posedă p^2 parametri, rezultă că grupul spațiului posedă cel mult

$$M = p^2 + 2p + \frac{(n-2p)(n-2p+1)}{2}$$

parametri. Acest număr maxim M este atins dacă spațiul V_n este produsul direct al unui spațiu proiectiv complex V_{2p} și al unui spațiu cu curbură constantă V_{n-2p}. Deci avem următoarea teoremă:

Fiind dat un spațiu V_n compact avînd numărul lui Betti $B_2 = 1$, și al cărui tensor b_{ij} este de rang $2p$, acest spațiu posedă un grup de mișcare avînd cel mult M parametri și acest maximum este atins dacă V_n este produsul direct al unui spațiu proiectiv complex V_{2p} și al unui spațiu cu curbură constantă pozitivă V_{n-2p}.

Aceste considerații pot fi extinse și în cazul în care avem mai mulți tensori b_{ij} strîmb simetrici. Se pune atunci problema reducerii la forme canonice a acestor tensori cu ajutorul transformărilor ortogonale de congruențe. Ca un exemplu de spațiu al lui Riemann, V_{4p}, avînd trei tensori strîmb simetrici, b_{if}, avem spațiul proiectiv cuaternionic, despre care C. Teleman a arătat că poate fi definit ca un spațiu neolonom pe hipersferele S_{4p+3} ale spațiului euclidian E_{4p+4} prin trei ecuații ale lui Pfaff [7]. Fiecare din aceste ecuații introduce prin covariantul lor biliniar un tensor strîmb simetric cu derivată exterioară nulă; toți acești trei tensori dau naștere la un singur tensor armonic de gradul patru și numerele lui Betti B_{4s} ($s = 0, \ldots, p$) ale spațiului sînt egale cu unitatea iar celelalte sînt nule.

II

Să considerăm acum un tensor strîmb simetric b_{ijk} de ordinul trei. Acest tensor este invariant în raport cu mișcarea η^i dacă derivata lui Lie

$$Lb_{ijk} = \frac{\partial b_{ijk}}{\partial x^l}\eta^l + b_{sjk}\frac{\partial \eta^s}{\partial x^i} + b_{isk}\frac{\partial \eta^s}{\partial x^j} + b_{ijs}\frac{\partial \eta^s}{\partial x^k} \tag{12}$$

este nulă. Pe de altă parte, tensorul este închis dacă derivata exterioară

$$\Delta_1 b_{ijk} = \frac{\partial b_{ijk}}{\partial x^l} - \frac{\partial b_{ljk}}{\partial x^i} - \frac{\partial b_{ilk}}{\partial x^j} - \frac{\partial b_{ijl}}{\partial x^k} \tag{12'}$$

este nulă. Asociind tensorului b_{ijk} tensorul

$$c_{ij} = b_{ijl}\eta^l, \tag{13}$$

este uşor de văzut că avem formulele

$$L c_{ij} = \eta^l L b_{ij,l} \tag{13'}$$

$$\Delta_k c_{ij} = \eta^l \Delta_k b_{ijl} + L b_{ijk}$$

care exprimă derivatele exterioară şi a lui Lie ale tensorului asociat c_{ij} cu ajutorul derivatelor exterioare şi ale lui Lie ale tensorului b_{ijk}. Rezultă deci că în cazul în care tensorul b_{ijk} este închis şi invariant în raport cu mişcarea η^i, tensorul asociat (13) este de asemenea închis şi invariant, ceea ce constituie o extindere a formulelor (9) şi (10) la tensorii b_{ijk}.

Proprietatea este generală, adică dacă se consideră un tensor strîmb simetric oarecare $\xi_{i_1 \dots i_p}$ de ordinul p şi tensorul asociat

$$b_{i_1 \dots i_{p-1}} = \xi_{i_1 \dots i_{p-1} l} \eta^l \tag{13''}$$

avem formulele

$$\begin{aligned} L b_{i_1 \dots i_{p-1}} &= \eta^l L \xi_{i_1 \dots i_{p-1} l}, \\ \Delta_k b_{i_1 \dots i_{p-1}} &= \eta^l \Delta_k \xi_{i_1 \dots i_{p-1} l} + L \xi_{i_1 \dots i_{p-1} k}, \end{aligned} \tag{14}$$

unde am pus, în general,

$$L \xi_{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial \xi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} \eta^k + \xi_{s i_2 \dots i_p} \frac{\partial \eta^s}{\partial x^{i_1}} + \dots + \xi_{i_1 \dots i_{p-1} s} \frac{\partial \eta^s}{\partial x^{i_p}},$$

$$\Delta_k \xi_{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial \xi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_{k \dots i_p}}{\partial x^{i_1}} - \dots - \frac{\partial \xi_{i_1 \dots k}}{\partial x^{i_p}}, \tag{14'}$$

Pentru demonstrare se observă că prima din formulele (14'), dacă o utilizăm pe cea de-a doua (14') pentru a elimina derivata $\partial \xi_{i_1 \dots i_p} / \partial x^k$, devine a doua formulă (14) dacă observăm că $\Delta_k b_{i_1 \dots i_{p-1}}$, adică derivata exterioară a tensorului (13''), se mai poate scrie, ţinînd seama de strîmb simetria lui $\xi_{i_1 \dots i_p}$,

$$\Delta_k b_{i_1 \dots i_{p-1}} = \frac{\partial}{\partial x^k} (\xi_{i_1 \dots i_{p-1} s} \eta^s) + \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} (\xi_{s \dots k} \eta^s) + \dots + \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} (\xi_{i_1 \dots s k} \eta^s)$$

şi că avem $\eta^k \Delta_k \xi_{i_1 \dots l} = - \eta^l \Delta_k \xi_{i_1 \dots l}$.

De asemenea, rezultă cu uşurinţă primele formule (14).

Avem deci următoarea teoremă:

Fiind dat un tensor strîmb simetric de ordinul p închis, $\xi_{i_1 \dots i_p}$, invariant în raport cu mişcarea η^i, tensorul asociat (13'') *este de asemenea închis şi invariant în raport cu η^i.*

Luînd derivata covariantă din formula (13'') în raport cu x^j avem

$$b_{i_1 \dots i_{p-1}, j} = \xi_{i_1 \dots i_{p-1} i} \eta^i_{,j} + \xi_{i_1 \dots i_{p-1} i, j} \eta^i.$$

deci putem scrie formula

$$a^{sj} b_{i_1 \ldots i_{p-2} s, j} = a^{sj} \xi_{i_1 \ldots i_{p-2} s i} \eta^i_{rj} + a^{sj} \xi_{i_1 \ldots i_{p-2} s i, j} \eta^i . \tag{14''}$$

Ținînd seamă că tensorul $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ este armonic dacă avem

$$\xi_{i_1 \ldots i_p, j} = \xi_{j \ldots i_p, i_1} + \ldots + \xi_{i_1 \ldots j, i_p} ,$$

$$a^{sj} \xi_{i_1 \ldots i_{p-2} s i, j} = 0, \tag{14'''}$$

rezultă că pentru ca primul membru al formulei (14'') să fie de asemenea nul, deci pentru ca tensorul asociat (13'') să fie de asemenea armonic, trebuie ca tensorul

$$I_{i_1 \ldots i_{p-2}} = \xi_{i_1 \ldots i_{p-2} s i} \eta^i_{,j} a^{sj} = \xi_{i_1 \ldots i_{p-2} s r} a^{si} a^{rj} \eta_{ii,j}$$

să fie nul, ceea ce constituie o condiție necesară pentru ca tensorul b să fie armonic.

Să considerăm acum în spațiul $X_n (x^1, \ldots x^n)$ un grup G_r și fie $\eta^i_\alpha (\alpha = 1, \ldots, r)$ r vectori care definesc transformările infinitezimale ale grupului. Se știe că avem formulele

$$\eta^j_\alpha \frac{\partial \eta^i_\beta}{\partial x^j} - \eta^j_\beta \frac{\partial \eta^i_\alpha}{\partial x^j} = c^\rho_{\alpha\beta} \eta^i_\rho , \tag{15}$$

unde $c^\rho_{\alpha\beta}$ sînt constantele de structură ale grupului.

Să presupunem acum că avem un tensor strîmb simetric b_{ij} și să considerăm invariantul format cu acest tensor și doi vectori η^i_α, η^i_β,

$$b_{\alpha\beta} = b_{ij} \eta^i_\alpha \eta^j_\beta .$$

Să derivăm această formulă în raport cu x^k. Avem

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial x^k} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} \eta^i_\alpha \eta^j_\beta + b_{sj} \frac{\partial \eta^s_\alpha}{\partial x^k} \eta^j_\beta + b_{is} \eta^i_\alpha \frac{\partial \eta^s_\beta}{\partial x^k} .$$

Ținînd seamă de formula (8) și de (15) putem scrie formulele precedente sub forma

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial x^k} = \eta^i_\alpha \eta^j_\beta \Delta_k b_{ij} + \eta^i_\alpha L_\beta b_{ik} + \eta^j_\beta L_\alpha b_{kj} + b_{ks} c^\rho_{\alpha\beta} \eta^s_\rho , \tag{15'}$$

unde L_α sînt derivate ale lui Lie în raport cu vectorii η^i_α.

Vedem că în cazul în care tensorul b_{ij} este închis și invariant, avem formulele

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial x^k} = b_{ks} c^\rho_{\alpha\beta} \eta^s_\rho . \tag{15''}$$

Multiplicînd aceste formule cu η^k_γ, mai putem scrie

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial s^\gamma} = b_{\gamma\rho} C^\rho_{\alpha\beta} . \tag{15'''}$$

Avem deci teorema

Dacă un tensor strîmb simetric închis este invariant în raport cu grupul G_r, invarianții $b_{\alpha\beta}$ satisfac la formulele (15''').

Rezultă de asemenea din formulele (15'') că în cazul în care vectorii η^i_α, η^i_β formează un grup abelian, invariantul $b_{\alpha\beta}$ este o constantă.

Avem deci o teoremă care generalizează teorema lui Bochner.

Invariantul $b_{\alpha\beta} = b_{ij}\, \eta^i_\alpha\, \eta^j_\beta$ este constant dacă vectorii η^i_α, η^i_β determină un grup abelian cu doi parametri și dacă b_{ij} este închis și invariant în raport cu grupul.

Putem de asemenea observa că invariantul $b_{\alpha\beta}$ este nul dacă spațiul V_n este compact și dacă caracteristica lui Euler-Poincaré nu este nulă și η^i_α, η^i_β formează un grup abelian.

Vrem acum să arătăm că formulele (14) se pot generaliza pentru un tensor oarecare strîmb simetric $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ de ordinul p și doi vectori η^i_α, η^i_β și chiar la un număr oarecare de vectori. În adevăr, putem totdeauna considera tensorii asociați de ordinul $p-2$

$$\xi_{i_1 \ldots i_{p-2}\alpha\beta} = \xi_{i_1 \ldots i_{p-2} ij}\, \eta^i_\alpha\, \eta^j_\beta . \tag{16}$$

Vom demonstra, în primul rînd, formula

$$L_\alpha\, \xi_{i_1 \ldots i_{p-1}\beta} = \eta^j_\beta\, L_\alpha\, \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} j} + \xi_{i_1 \ldots i_{p-1}\rho}\, C^\rho_{\alpha\beta} \tag{16'}$$

în care am pus $\xi_{i_1 \ldots i_{p-1}\beta} = \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} j}\, \eta^j_\beta$. În adevăr, avem, potrivit cu primele formule (14'),

$$L_\alpha\, \xi_{i_1 \ldots i_{p-1}\beta} = \frac{\partial \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} j}}{\partial x^s}\, \eta^j_\beta\, \eta^s_\alpha + \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} j} \frac{\partial \eta^j_\beta}{\partial x^s}\, \eta^s_\alpha +$$

$$+ \xi_{s \ldots i_{p-1} j}\, \eta^j_\beta \frac{\partial \eta^s_\alpha}{\partial x^{i_1}} + \ldots + \xi_{i_1 \ldots sj}\, \eta^j_\beta \frac{\partial \eta^s_\alpha}{\partial x^{i_{p-1}}} .$$

Vedem că în membrul al doilea, termenii care au ca factor pe η^j_β constituie $L_\alpha\, \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} j}$ afară de ultimul termen care lipsește. Deci, în al doilea membru, în afară de termenul $\eta^j_\beta\, L_\alpha\, \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} j}$ rămîn termenii

$$\xi_{i_1 \ldots i_{p-1} j}\, \eta^s_\alpha \frac{\partial \eta^j_\beta}{\partial x^s} - \xi_{i_1 \ldots i_{p-1} s} \frac{\partial \eta^s_\alpha}{\partial x^j}\, \eta^j_\beta .$$

Schimbînd s cu j în al doilea din termenii precedenți și ținînd seama de formulele (15), rezultă formulele (16'), ceea ce constituie o generalizare a primelor formule (14).

Să considerăm acum $q+1$ vectori η^i_α, $\eta^i_{\alpha_1}$, ..., $\eta^i_{\alpha_q}$ ai grupului G_r și să considerăm tensorul de ordinul $p-q$

$$\xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\, \alpha_1 \ldots \alpha_q} = \eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q}\, \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\, j_1 \ldots j_q}. \tag{16''}$$

Avem deci formula

$$\begin{aligned} L_\alpha\, \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\, \alpha_1 \ldots \alpha_q} &= \eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q}\, L_\alpha\, \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\, j_1 \ldots j_q} + \\ &+ \xi_{i_1 \ldots i_{p-q} \rho}^{\quad\ \alpha_2 \ldots \alpha_q}\, c^\rho_{\alpha\alpha_1} + \ldots + \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\, \alpha_1 \ldots \rho}\, c^\rho_{\alpha\alpha_q}. \end{aligned} \tag{17}$$

Pentru demonstrare, observăm în acest caz de asemenea că avem

$$\begin{aligned} L_\alpha\, \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\, \alpha_1 \ldots \alpha_q} &= \frac{\partial \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\, j_1 \ldots j_q}}{\partial x^s}\, \eta^s_\alpha\, \eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q} + \\ &+ \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\, j_1 \ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q} \right) \eta^s_\alpha + \\ &+ \left(\xi_{s \ldots i_{p-q}\, j_1 \ldots j_q} \frac{\partial \eta^s_\alpha}{\partial x^{i_1}} + \ldots + \xi_{i_1 \ldots s_{j_1} \ldots j_q} \frac{\partial \eta^s_\alpha}{\partial x^{i_{p-q}}} \right) \eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q}. \end{aligned} \tag{17'}$$

Vedem că termenii din membrii doi care conțin ca factor pe $\eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q}$ reprezintă primii $n+1-q$ termeni ai derivatei lui Lie $L_\alpha\, \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\, j_1 \ldots j_q}$. Făcînd să apară în al doilea membru al lui (17′) această derivată, ceilalți termeni ai membrului doi din (17′) se scriu

$$\begin{aligned} &\xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\, j_1 \ldots j_q} \frac{\partial}{\partial y^s} \left(\eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q} \right) \eta^s_\alpha - \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\, s j_2 \ldots j_q} \frac{\partial \eta^s_\alpha}{\partial y^{j_1}}\, \eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q} - \ldots \\ &\qquad - \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\, j_1 \ldots s} \frac{\partial \eta^s_\alpha}{\partial y^{j_q}}\, \eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q} \end{aligned}$$

astfel încît, ținînd seama de formulele (15), rezultă formulele (17).

Să presupunem acum vă vectorii $\eta^i_{\alpha_1}$, ..., $\eta^i_{\alpha_q}$ determină un grup G_q cu q parametri, invariant în G_r. În acest caz indicele ρ în membrii doi ai lui (17) poate să ia numai valorile α_1, ..., α_q. Ținînd seama pe de altă parte de strîmb simetria lui $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ rezultă că putem avea termeni nenuli numai dacă în $c^\rho_{\alpha\alpha_1}$ punem $\rho = \alpha_1$. Rezultă deci că formulele (17) devin în acest caz

$$L_\alpha\, \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\, \alpha_1 \ldots \alpha_q} = \eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q}\, L_\alpha\, \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\, j_1 \ldots j_q} - k_\alpha\, \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\, \alpha_1 \ldots \alpha_q} \tag{17''}$$

unde am pus

$$k_\alpha = c^{\alpha_1}_{\alpha_1 \alpha} + \ldots + c^{\alpha_q}_{\alpha_q \alpha}.$$

Avem deci teorema :

Fiind dat un tensor strîmb simetric $\xi_{i_1 \ldots i_p}$ de ordinul p, invariant printr-o transformare η^i_α și un grup G_q de ordinul $q \leqslant p$ invariant în G_r,

tensorul asociat (16') grupului G_q este de asemenea invariant în raport cu η^i_α, în cazul în care, cantitatea k_α este nulă.

Putem observa că toate cantitățile k_α sînt nule dacă G_q este grupul derivat al lui G_r și dacă vectorul de structură al lui G_r este nul.

Să scriem acum formulele (16) sub forma

$$\xi_{i_1 \ldots i_{p-2}\,\alpha\beta} = \eta^i_\alpha \xi_{i_1 \ldots i_{p-2}\,i\beta} \qquad (\xi_{i_1 \ldots i_{p-2}\,i\beta} = \xi_{i_1 \ldots i_{p-2}\,ij}\,\eta^j_\beta)$$

și să luăm derivatele exterioare. Avem, aplicînd a doua formulă (14),

$$\Delta_k \xi_{i_1 \ldots i_{p-2}\,\alpha\beta} = \eta^i_\alpha \Delta_k \xi_{i_1 \ldots i_{p-2}\,i\beta} + L_\alpha \xi_{i_1 \ldots i_{p-2}\,k\beta}\,.$$

Ținînd seama de formulele (16) și de prima formulă din (14) obținem formula

$$\Delta_k \xi_{i_1 \ldots i_{p-2}\,\alpha\beta} = \eta^i_\alpha \eta^j_\beta \Delta_k \xi_{i_1 \ldots i_{p-2}\,ij} + \eta^i_\alpha L_\beta \xi_{i_1 \ldots i_{p-2}ik} +$$

$$+ \eta^j_\beta L_\alpha \xi_{i_1 \ldots i_{p-2}\,kj} + \xi_{i_1 \ldots i_{p-2}\,k\rho}\, c^\rho_{\alpha\beta}\,.$$

Să mai considerăm derivata exterioară a unui tensor asociat la trei vectori. Avem formula

$$\Delta_k \xi_{i_1 \ldots i_{p-3}\,\alpha\beta\gamma} = \eta^i_\alpha \Delta_k \xi_{i_1 \ldots i_{p-3}\,i\beta\gamma} + L_\alpha \xi_{i_1 \ldots i_{p-3}\,k\beta\gamma}\,. \tag{18}$$

Ținînd seama de formula (17) și (18) avem

$$\Delta_k \xi_{i_1 \ldots i_{p-3}\,\alpha\beta\gamma} = \eta^i_\alpha \eta^j_\beta \eta^l_\gamma \Delta_k \xi_{i_1 \ldots i_{p-3}\,ijl} + \eta^l_\beta \eta^l_\gamma L_\alpha \xi_{i_1 \ldots i_{p-3}\,kjl} +$$

$$+ \eta^i_\alpha \eta^l_\gamma L_\beta \xi_{i_1 \ldots i_{p-3}\,ikl} + \eta^i_\alpha \eta^j_\beta L_\gamma \xi_{i_1 \ldots i_{p-3}\,ijk} + S\, \xi_{i_1 \ldots i_{p-3}\,k\rho\alpha}\, c^\rho_{\beta\gamma}$$

unde S înseamnă că facem suma termenilor care se obțin prin permutările circulare ale indicilor α, β, γ.

Să considerăm acum derivata exterioară a tensorului (16''). Evident putem scrie.

$$\Delta_k \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\,\alpha_1 \ldots \alpha_q} = \eta^i_{\alpha_1} \Delta_k \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\,i\alpha_2 \ldots \alpha_q} + L_{\alpha_1} \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\,k\alpha_2 \ldots \alpha_q}\,. \tag{18'}$$

Trebuie acum să arătăm că avem formulele

$$\Delta_k \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\,\alpha_1 \ldots \alpha_q} = \eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q} \Delta_k \xi_{i_1 \ldots i_{p-q} j_1 \ldots j_q} +$$

$$+ \eta^{j_2}_{\alpha_2} \ldots \eta^{j_q}_{\alpha_q} L_{\alpha_1} \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\,kj_2 \ldots j_q} + \ldots + \eta^{j_1}_{\alpha_1} \ldots \eta^{j_{q-1}}_{\alpha_{q-1}} L_{\alpha_q} \xi_{i_1 \ldots i_{p-q} j_1 \ldots k} +$$

$$+ S\, \xi_{i_1 \ldots i_{p-q}\,k\rho\alpha_3 \ldots \alpha_q}\, c^\rho_{\alpha_1\alpha_2}\,, \tag{19}$$

unde S înseamnă că facem suma termenilor corespunzători tuturor combinațiilor care se obțin din $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ asociind fiecărei perechi α_i, α_j ceilalți $n - 2$ indici α_s $(s \neq i, j)$ astfel încît α_i, α_j, α_{s_1}, $\ldots$, $\alpha_{s_{q-1}}$ se obțin din $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ printr-o permutare pară.

Pentru demonstrare, să presupunem că formula (19) este verificată pentru $q-1$ vectori. În acest caz, ținînd seama de formula (18′) și de formulele (17), rezultă că formula (19) este de asemenea verificată pentru q vectori. În adevăr, este ușor de verificat că în al doilea membru din (18′) intervin termenii din membrul doi care conțin derivata exterioară Δ_k și derivatele lui Lie. În ceea ce privește termenii în $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ (din (18′) ei se scriu

$$\eta^{i}_{\alpha_1}\,\overline{S}\,\xi_{i_1\dots i_{p-q}\,ik\rho\alpha_4\dots\alpha_q}\,c^{\rho}_{\alpha_2\alpha_3}+\xi_{i_1\dots i_{p-q}\,k\rho\alpha_3\dots\alpha_q}\,c^{\rho}_{\alpha_1\alpha_2}+\dots \tag{19′}$$

$$\dots+\xi_{i_1\dots i_{p-q}\,k\,\alpha_2\dots\rho}\,c^{\rho}_{\alpha_1\alpha_q},$$

unde $\overline{S}$ înseamnă că facem suma în raport cu toate perechile formate cu $\alpha_2,\ \alpha_3,\dots,\ \alpha_q$. Dar primul termen poate de asemenea să fie scris

$$\overline{S}\,\xi_{i_1\dots i_{p-q}\,k\rho\alpha_1\alpha_4\dots\alpha_q}\,c^{\rho}_{\alpha_2\alpha_3}$$

și este ușor de văzut că formula (19′) coincide cu suma S a formulei (19), ceea ce demonstrează formula (19).

Deci formulele (17) și (18) pot să fie considerate ca o generalizare a formulelor (14) și avem următoarea teoremă :

Fiind dat un grup G_r și un tensor strîmb simetric $\xi_{i_1\dots i_p}$ diferiții tensori (16″) *asociați grupului, satisfac formulele* (17) *și* (19).

Să presupunem acum că $\eta^{i}_{\alpha_1},\dots,\ \eta^{i}_{\alpha_q}$ determină un grup G_q. În acest caz indicele ρ în formulele (19) poate să ia numai valorile α_i. Pe de altă parte, ținînd seama de strîmb simetria tensorului $\xi_{i_1\dots i_p}$ rezultă că formulele (19) se scriu, în cazul în care acest tensor este închis și invariant,

$$\Delta_k\xi_{i_1\dots i_{p-q}\alpha_1\dots\alpha_q}=-c_{\alpha_1}\xi_{i_1\dots i_{p-q}\,k\alpha_2\dots\alpha_q}+c_{\alpha_2}\xi_{i_1\dots i_{p-q}k\alpha_1\alpha_3\dots\alpha_q}+$$

$$\dots+(-1^{\rho})\,c_{\alpha_q}\xi_{i_1\dots i_{p-q}k\alpha_1\dots\alpha_{q-1}} \tag{20}$$

în care am pus $c_{\alpha_i}=c^{\rho}_{\rho\alpha_i}$, c_{α_i} fiind componentele vectorului de structură al grupului G_q.

Avem deci teorema :

Fiind dat un tensor strîmb simetric $\xi_{i_1\dots i_p}$ închis și invariant în raport cu grupul G_q, tensorul asociat (16″) *este de asemenea închis dacă vectorul de structură al grupului G_q este nul.*

Se știe că toate grupurile simple sau semisimple cît și grupurile care coincid cu grupul lor derivat au același vector de structură nul. Rezultă deci că dacă spațiul X_n posedă un grup cu q parametri cu vector de structură nul și dacă avem un tensor închis invariant $\xi_{i_1\dots i_q}$, cantitățile

$$\xi_{\alpha_1\dots\alpha_q}=\eta^{i_1}_{\alpha_1}\cdots\eta^{i_q}_{\alpha_q}\xi_{i_1\dots i_q} \tag{20′}$$

sînt constante ceea ce constituie o generalizare foarte largă a teoremei lui Bochner.

III

Să presupunem acum că considerăm în spațiul lui Riemann V_n un sistem de n congruențe ortogonale. Aceasta înseamnă că metrica (1) a fost scrisă sub forma canonică

$$ds^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (ds^n)^2 \tag{21}$$

și că avem formule de forma

$$ds^a = \lambda_i^a dx^i, \quad dx^i = \mu_a^i ds^a, \quad \lambda_i^a \mu_b^i = \delta_b^a, \tag{21'}$$

$$a_{ij} = \lambda_i^a \lambda_j^a, \quad a^{ij} = \mu_a^i \mu_a^j$$

și spunem, după Ricci și Levi-Civita, că μ_a^i $(a = 1, \ldots, n)$ sînt parametrii a n congruențe ortogonale și $\lambda_i^a (a = 1, \ldots, n)$ sînt momentele. Mai spunem că ds^a sînt diferențialele arcelor congruențelor, căci dacă toate ds^a sînt nule, afară de una, să zicem ds^1, atunci avem o deplasare pe prima congruență.

Să presupunem acum că am avea o transformare (3) a spațiului V_n, deci că formulele (5) sînt verificate. Ținînd seama de formulele (21') putem scrie formulele (5) sub forma

$$La_{ij} = \lambda_j^a L\, \lambda_i^a + \lambda_i^a L\, \lambda_j^a = 0, \tag{22}$$

unde am scris

$$L\, \lambda_i^a = \frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} \eta^j + \lambda_j^a \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}. \tag{22'}$$

Multiplicînd cu μ_b^i, μ_c^j și sumînd obținem formulele

$$\mu_b^i L\, \lambda_i^c + \mu_c^i L\, \lambda_i^b = 0. \tag{23}$$

Să presupunem acum că spațiul V_n posedă un grup de mișcare simplu tranzitiv G_n definit de n vectori $\eta_\alpha^i (\alpha = 1, \ldots, n)$. Avem deci formulele de forma (15), unde $c_{\beta\gamma}^\alpha$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n)$ sînt constantele de structură ale grupului. În acest caz putem găsi un sistem de congruențe ortogonale în spațiul V_n care să fie în același timp invariant în raport cu grupul G_n, deci astfel încît să avem

$$L_\alpha\, \lambda_i^a = \frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} \eta_\alpha^j + \lambda_j^a \frac{\partial \eta_\alpha^j}{\partial x^i} = 0. \tag{24}$$

Este ușor de văzut că congruențele (λ) astfel definite formează și ele cu vectorii μ_α^i un grup simplu tranzitiv H_n și putem face astfel încît H_n să aibă aceleași constante de structură ca și G_n, deoarece cele două grupuri sînt reciproce [8], [9]. În acest caz, coeficienții de rotație ai lui Ricci ale celor n congruențe (λ) sînt constante definite de formulele

$$\gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}(c_{bc}^a + c_{ca}^b + c_{ba}^c). \tag{24'}$$

Să considerăm acum un tensor strîmb simetric $\xi_{i_1 \dots i_p}$ și fie $\xi_{a_1 \dots a_p}$ componentele sale pe congruențele (λ). Avem deci formulele

$$\xi_{i_1 \dots i_p} = \xi_{a_1 \dots a_p} \lambda^{a_1}_{i_1} \dots \lambda^{a_p}_{i_p}; \quad \xi_{a_1 \dots a_p} = \xi_{i_1 \dots i_p} \mu^{i_1}_{a_1} \dots \mu^{i_p}_{a_p}.$$

Dacă considerăm acum derivatele exterioare, este ușor de văzut că obținem formulele

$$\Delta_k \xi_{i_1 \dots i_p} = \Delta_a \xi_{a_1 \dots a_p} \lambda^{a_1}_{i_1} \dots \lambda^{a}_{i_p} \lambda^{a}_{k},$$

unde am pus

$$\Delta_a \xi_{a_1 \dots a_p} = \frac{\partial \xi_{a_1 \dots a_p}}{\partial s^a} - \frac{\partial \xi_{a \dots a_p}}{\partial s^{a_1}} - \dots - \frac{\partial \xi_{a_1 \dots a}}{\partial s^{a_p}} + \xi_{f \dots a_p} w^f_{a_1 a} + \dots$$
$$\dots + \xi_{a_1 \dots f} w^f_{a_p a} - \xi_{fa \dots a_p} w^f_{a_1 a_2} - \dots - \xi_{a_1 \dots fa} w^f_{a_{p-1} a_p} \tag{25}$$

termenii negativi din membrul al doilea din 25 provin din termenul general

$$- \xi_{a_1 \dots a_{s-1} f \dots a_{q-1} a \dots a_p} w^f_{a_s a_q},$$

unde $s < q$.

În ceea ce privește cantitățile w^a_{bc}, ele sînt coeficienții covarianților biliniari Δs^a ale formelor ds^a și avem

$$\Delta s^a = \delta ds^a - d \delta s^a = w^a_{bc} \, ds^b \, \delta s^c. \tag{26}$$

Altfel spus, Δs^a sînt derivatele exterioare ale formelor ds^a, exprimate cu ajutorul formelor $ds^1, \dots, ds^n$. Vedem deci că condiția pentru ca tensorul $\xi_{a_1 \dots a_p}$ să fie închis este dată în sistemul de congruențe (λ) de condiția $\Delta_a \xi_{a_1 \dots a_p} = 0$. Pe de altă parte, considerînd derivata lui Lie a tensorului, avem formulele

$$L \xi_{i_1 \dots i_p} = \left[\frac{\partial \xi_{a_1 \dots a_p}}{\partial x^k} \gamma^k_i + \xi_{f \dots a_p} \mu^i_{a_1} L\lambda^f_i + \dots + \xi_{a_1 \dots f} \mu^i_{a_p} L\lambda^f_i \right] \lambda^{a_1}_{i_1} \dots \lambda^{a}_{i_p}. \tag{26'}$$

Să presupunem acum că spațiul V_n posedă un grup simplu tranzitiv G_n și că congruențele (λ) sînt invariante prin acest grup. În acest caz, avem precum am arătat mai sus, $L_\alpha \lambda^f_i$ sînt toate nule și w^a_{bc} sînt egale cu constantele c^a_{bc} de structură ale grupului G_n. Ecuațiile (26') ne spun că tensorul $\xi_{i_1 \dots i_p}$ este invariant prin grupul G_n dacă componentele $\xi_{a_1 \dots a_p}$ sînt toate constante și formula (25) ne spune că tensorul $\xi_{a_1 \dots a_p}$ este în același timp închis dacă avem

$$\xi_{fa_2 \dots a_p} c^f_{a_1 a} + \dots + \xi_{a_1 \dots f} c^f_{a_p a} - \xi_{fa \dots a_p} c^f_{a_1 a_2} - \dots - \xi_{a_1 \dots fa} c^f_{a_{p-1} a_p} = 0. \tag{27}$$

Avem deci următoarea teoremă :

Fiind dat un spațiu V_n posedînd un grup simplu tranzitiv G_n, studiul tensorilor strîmb simetrici închiși și invarianți, se reduce la studiul soluțiilor ecuațiilor algebrice (27).

Să considerăm acum derivatele covariante, ale tensorului $\xi_{a_1 \ldots a_p}$. Ținînd seama că componentele $\xi_{a_1 \ldots a_p}$ sînt constante și că coeficienții conexiunii în sistemul de congruențe (λ) sînt γ^a_{bc} avem

$$\xi_{a_1 \ldots a_p, a} = \xi_{f \ldots a_p} \gamma^f_{a_1 a} + \ldots + \xi_{a_1 \ldots f} \gamma^f_{a_p a} \tag{27'}$$

și este ușor de văzut că putem exprima formulele (27) și sub forma

$$\xi_{a_1 \ldots a_p, a} - \xi_{a \ldots a_p, a_1} - \ldots - \xi_{a_1 \ldots a, a_p} = 0.$$

deci primele condiții (14''') pentru ca tensorul ξ să fie armonic sînt verificate.

Ținînd seama că într-un sistem de congruențe ortogonale, componentele tensorului metric sînt δ^a_b rezultă că, punînd în formulele (27') $a_1 = a$ și contractînd, obținem drept condiții pentru ca tensorul să fie armonic formulele secunde (14''')

$$\xi_{fa_2 \ldots a_p} \gamma^f_{aa} + \xi_{af \ldots a_p} \gamma^f_{a_2 a} + \ldots + \xi_{aa_2 \ldots f} \gamma^f_{a_p a} = 0. \tag{28}$$

Condițiile (27) și (28) reprezintă deci condițiile necesare și suficiente pentru ca tensorul $\xi_{a_1 \ldots a_p}$ să fie armonic.

Vedem de asemenea că o condiție suficientă este ca

$$\xi_{a_1 \ldots a_p, a} = \xi_{f \ldots a_p} \gamma^f_{a_1 a} + \ldots + \xi_{a_1 \ldots f} \gamma^f_{a_p a} = 0. \tag{28'}$$

Ținînd seama de formulele (24'') obținem

$$\gamma^f_{aa} = c^a_{af} = c_f,$$

unde c_f este ceea ce numim vectorul de structură al grupului G_n și ecuațiile (28) se scriu, ținînd seama de formulele (24'),

$$\xi_{f \ldots a_p} c_f + \xi_{as \ldots a_p} c^{a_2}_{as} + \ldots + \xi_{aa_2 \ldots s} c^{a_p}_{as} = 0, \tag{29}$$

unde indicele a este mai mic decît s. Avem deci teorema :

Fiind dat un spațiu V_n compact orientabil posedînd un grup simplu tranzitiv G_n, studiul tensorilor armonice revine la studiul soluțiilor ecuațiilor algebrice (27) *și* (29).

Să presupunem acum că am avea un vector armonic ale cărui componente pe congruențele (λ) sînt ξ_a. Acest vector este închis dacă avem, conform ecuațiilor (27),

$$\xi_f c^f_{ab} = 0. \tag{30}$$

Aceste ecuații nu posedă soluții dacă grupul G_n coincide cu grupul său derivat. Nu mai există deci vector armonic și avem teorema :

Fiind dat un spațiu V_n compact cu grup G_n care coincide cu grupul său derivat, numărul lui Betti B_1 este nul.

Dacă grupul derivat al lui G_n este un grup G_{n-m} $(m > 0)$ ecuaţiile (30) posedă m soluţii. Ţinînd seama că ecuaţiile (29) se scriu

$$\xi_f \, c_f = 0 \tag{30'}$$

rezultă că una din soluţiile ecuaţiilor (30) ne dă un vector armonic dacă produsul său scalar cu vectorul c_a este nul. Avem următoarea teoremă:

Numărul lui Betti B_1 al unui spaţiu V_n compact cu grup G_n posedînd un grup derivat G_{n-m} este egal cu $m-1$ sau cu m.

În adevăr, să presupunem că am ales transformările infinitezimale ale grupului G_n astfel încît $X_\alpha f$ $(\alpha = m+1, \ldots, n)$ să fie transformările lui G_{n-m}. În acest caz, $c^h_{ab} = 0$ $(h = 1, \ldots, m)$ şi vectorul c_f este egal cu $c^\alpha_{\alpha f}$. Deoarece fiecare vector $(\xi_1, \ldots, \xi_m, 0, \ldots, 0)$ este închis, acest vector este armonic dacă avem

$$\xi_h \, c_h = 0 \quad \left(c_h = c^\alpha_{\alpha h}\right) \quad (h = 1, \ldots, m) \tag{30''}$$

şi numărul lui Betti este egal cu $m - 1$ dacă c_h $(h = 1, \ldots, m)$ nu sînt toate nule, altfel este egal cu m. Rezultă, în particular că numărul lui Betti B_1 este egal cu m dacă vectorul de structură al grupului este nul.

Să căutăm acum tensorii închişi de al doilea ordin. Trebuie să satisfacă ecuaţiile (27), care, în acest caz, se scriu

$$\xi_{fb} \, c^f_{ac} + \xi_{fa} \, c^f_{cb} + \xi_{fc} \, c^f_{ba} = 0. \tag{31}$$

Pentru ca tensorul să fie armonic trebuie să satisfacă de asemenea formulele

$$\xi_{fb} \, c_f + \xi_{as} \, c^b_{as} = 0, \quad (a < s). \tag{32}$$

Putem acum să observăm că formulele (31) sînt totdeauna satisfăcute punînd

$$\xi_{fb} = a_h \, c^h_{fb},$$

unde a_h sînt constante oarecare, deci există o infinitate de tensori închişi de-al doilea ordin.

Pentru ca un astfel de tensor să fie armonic, trebuie ca el să satisfacă formulele (32) care se scriu

$$a_h \left(c^h_{fb} \, c_f + c^h_{as} \, c^b_{as}\right) = 0. \tag{32'}$$

Trebuie deci ca acest sistem să posede soluţii în a_h.

Să presupunem că avem o soluţie ξ_{ab}. Putem totdeauna, printr-o transformare ortogonală cu coeficienţi constanţi, să reducem tensorul ξ_{ab} la forma canonică în care toate componentele sînt nule, afară de $\xi_{12}, \ldots, \xi_{2q-1,\,2q}$, unde $2q \leqslant n$. Vom presupune că $2q < n$. În acest caz, dacă în ecuaţiile (31) indicii b, c variază de la $2q+1$ la n, avem condiţiile

$$\xi_{2s-1\,2s} \, c^{2s}_{\beta\gamma} = 0, \quad \xi_{2s-1\,2s} \, c^{2s-1}_{\beta\gamma} = 0, \qquad (\beta, \gamma < 2q),$$

unde s este un indice fix avînd valorile $1, \ldots, q$. Aceasta ne spune că

trebuie să avem $c^h_{\beta\gamma} = 0$ $(h \leqslant 2q)$ deci operatorii $X_\beta f$ $(\beta > 2q)$ formează un subgrup cu $n - 2q$ parametri ai grupului G_n. Avem deci teorema :

O condiție necesară pentru ca un spațiu V_n cu grup simplu tranzitiv G_n să posede un tensor armonic de ordinul $2q$ este ca grupul G_n să posede un subgrup G_{n-2q}.

Să presupunem această condiție verificată și să mai presupunem că grupul G_{n-2q} este un subgrup invariant. În acest caz putem presupune în ecuațiile (31) că indicii a, b, c au valori mai mici ca $2q+1$ și formulele (32) se scriu

$$\xi_{fb}\, c_f + \xi_{as}\, c^b_{as} = 0, \quad \xi_{as}\, c^\alpha_{as} = 0. \tag{33}$$

Vedem că ecuațiile (31) sînt identic verificate dacă operatorii $X_a f$ $(a = 1, \ldots, 2q)$ formează un grup abelian și ecuațiile (33) sînt atunci verificate dacă $c_f = 0$. Avem deci teorema :

O condiție suficientă pentru ca un spațiu V_n să posede un tensor arbitrar armonic de ordinul doi și de rang $2q$ este ca grupul G_n să posede un subgrup invariant G_{n-2q}, un grup complementar G_{2q} abelian și ca vectorul de structură al lui G_n să fie nul.

Să presupunem acum că vrem ca tensorul armonic să fie de rangul doi, deci $q = 1$. În acest caz, ecuațiile (31) și (32) se scriu

$$\xi_{12}\left(c^1_{1\alpha} + c^2_{2\alpha}\right) = 0, \quad \xi_{12}\, c_1 + \xi_{21}\, c_{12} = 0$$

$$\xi_{21}\, c_2 + \xi_{12}\, c^1_{12} = 0, \quad c^\alpha_{12} = 0, \quad c^h_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 3, \ldots, n)$$

deci $X_1 f$ și $X_2 f$ formează de asemenea un grup. Ținînd seama de valorile lui c_1, c_2 avem condițiile

$$c^\alpha_{\alpha 1} = 0, \quad c^\alpha_{\alpha 2} = 0, \quad c^1_{1\alpha} = -\, c^2_{2\alpha}$$

Avem deci teorema :

O condiție necesară și suficientă pentru ca un spațiu V_n cu grup simplu tranzitiv G_n să posede un tensor armonic de ordinul doi și de rangul doi este ca structura grupului G_n să fie de forma

$$\begin{gathered}(X_1 X_2) = a X_1 + b X_2, \quad (X_\beta X_j) = c^\rho_{\beta j} X_\rho, \\ (X_1 X_\alpha) = a_\alpha X_1 + b_\alpha X_2 + m^\rho_\sigma X_\rho, \quad (X_2 X_\alpha) = c_\alpha X_1 - a_\alpha X_2 + n^\rho_\alpha X_\rho,\end{gathered} \tag{34}$$

unde $m^\alpha_\alpha = n^\alpha_\alpha = 0$.

Rezultă deci că dacă un spațiu V_n închis orientabil posedă grupul simplu tranzitiv (34), numărul lui Betti B_2 este cel puțin egal cu unitatea.

Să presupunem acum că grupul G_n este un grup semisimplu. Știm că în acest caz tensorul simetric

$$c_{hk} = c^s_{hp}\, c^p_{ks}$$

nu este degenerat și dacă grupul G_n este un grup închis, tensorul c_{hk} este definit negativ. Dacă presupunem acest tensor redus la forma canonică

— δ_k^h constantele de structură c_{kl}^h sînt strîmb simetrice în fiecare pereche de indici. Ținînd seama de formulele (24''), rezultă $\gamma_{kl}^h = \frac{c_{kl}^h}{2}$. Spunem atunci că spațiul V_n este spațiul reprezentativ al grupului semisimplu G_n. Avem deci teorema:

Determinarea tensorilor armonici ai unui spațiu V_n reprezentativ al unui grup semisimplu închis se reduce la studiul soluțiilor ecuațiilor (27) *și* (29) *cu $c_f = 0$ și c_{kl}^h strîmb simetrici în fiecare pereche de indici* *).

Ținînd seama de faptul că un grup G_n semisimplu coincide cu grupul său derivat, rezultă, după o teoremă demonstrată mai sus, că spațiul are primul număr al lui Betti B_1 nul, ceea ce este bine cunoscut. De asemenea, pentru a demonstra că numărul B_2 este și el nul, observăm că multiplicînd ecuațiile (31) cu c_{ac}^h și sumînd în raport cu c și a avem, ținînd seama de strîmb simetria lui c_{bc}^a,

$$c_{hf}\,\xi_{bf} + 2\,\xi_{fa}\,c_{fs}^b\,c_{ha}^s = 0. \tag{35}$$

Pe de altă parte, ținînd seama de identitățile lui Lie, avem

$$2\,\xi_{fa}\,c_{fc}^b\,c_{ha}^c = \xi_{fa}\,c_{af}^s\,c_{sh}^b$$

al cărui membru al doilea este nul în virtutea formulelor (32) și datorită faptului că avem $c_f = 0$. Formulele (35) se reduc deci la primii termeni și deoarece determinantul $|c_{hk}|$ este diferit de zero, rezultă $\xi_{bf} = 0$, deci numărul B_2 este de asemenea nul.

Să presupunem acum că se consideră tensorii închiși de ordinul trei. În acest caz formulele (27) și (29) se scriu

$$\begin{gathered}\xi_{fbc}\,c_{ad}^f + \xi_{afc}\,c_{bd}^f + \xi_{abf}\,c_{cd}^f - \xi_{fdc}\,c_{ab}^f - \xi_{fbd}\,c_{ac}^f - \xi_{afd}\,c_{bc}^f = 0,\\ \xi_{as\alpha_3}\,c_{as}^{a_2} - \xi_{a\alpha_2 s}\,c_{as}^{a_3} = 0.\end{gathered} \tag{36}$$

Dacă grupul G_n semisimplu este închis și tensorul c_{hk} a fost redus la forma canonică — δ_k^h este ușor de văzut că aceste ecuații admit soluția $\xi_{fbc} = c_{bc}^f$, deoarece primele ecuații (36) sînt verificate din cauza identităților lui Lie ale grupului G_n și ultimele din cauza faptului că $c_{a_2 a_3} = 0$. Rezultă în mod simplu rezultatul cunoscut că numărul $B_3 \geqslant 1$. Pe de altă parte, calculul direct al tuturor numerelor lui Betti ale grupurilor simple făcut de H o d g e arată că pentru fiecare grup simplu $B_3 = 1$ deci avem $B_3 = l$, pentru spațiul V_n cu grup G_n semisimplu și care este produsul a l grupuri simple.

---

*) W. H o d g e arată în cartea sa, *Harmonics integrals*, p. 255, că condițiile suficiente (28') sînt și necesare în cazul unui spațiu V_n reprezentativ al unui grup G_n semisimplu.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ТЕНЗОРЫ И ГРУППЫ ДВИЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА РИМАНА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

По результатам, полученным Ж. де Рамом и В. Ходжем, [1] известно, что если дано компактное, ориентируемое пространство Римана, то число независимых гармонических тензоров какого-либо порядка p, которые можно построить в пространстве, равно числу Бетти-B_p. С другой стороны, по теореме К. Яно [2] известно, что каждый гармонический тензор представляет инвариант по отношению к движению пространства. Следовательно, существует тесное соотношение между числом r параметров группы движения какого-либо компактного пространства V_n и числом Бетти этого пространства. С другой стороны, так как каждый гармонический тензор является в то же время тензором с нулевой внешней производной, или, как еще говорится, замкнутым тензором, существует тесное соотношение между числом инвариантных замкнутых тензоров и группой G_r пространства.

В первой части показывается, что можно оценить сверху r в случае, если в пространстве существует замкнутый инвариантный вектор, или замкнутый инвариантный тензор второго порядка, в частности, в том случае, если одно из чисел Бетти B_1 или B_2 не равно нулю.

Во второй части даются некоторые формулы, связывающие замкнутые инвариантные тензоры с группой движения пространства G_r.

В третьей части предполагается, что пространство V_n отнесено к системе ортогональных конгруенций и показывается, что в том случае, если пространство имеет простую транзитивную группу G_n и применяется система ортогональных конгруенций с постоянными коэффициентами вращения, исследование гармонических тензоров пространства становится алгебраической задачей, что обобщает результаты, полученные Ходжем для пространств полупростых групп. Даются необходимые и достаточные условия, относящиеся к группе G_n, для того чтобы пространство имело любое число гармонических векторов и гармонических тензоров второго порядка.

TENSEURS HARMONIQUES ET GROUPES DE MOUVEMENTS D'UN ESPACE DE RIEMANN

(RÉSUMÉ)

On sait, d'après des résultats dus à G. Rham et W. Hodge, [1], qu'étant donné un espace de Riemann compact orientable, le nombre des tenseurs harmoniques indépendants d'un ordre donné p, qu'on peut construire dans l'espace, est égal au nombre de Betti B_p. On sait d'autre part, d'après un théorème de K. Yano [2], que chaque tenseur harmonique

est un invariant par rapport à un mouvement de l'espace. Il y a donc une relation étroite entre le nombre r des paramètres du groupe de mouvement d'un espace V_n compact et le nombre de Betti de cet espace. D'autre part, comme chaque tenseur harmonique est en même temps un tenseur à dérivée extérieure nulle ou, comme on dit encore, un tenseur fermé, il y a une relation étroite entre le nombre des tenseurs fermés invariants et le groupe G_r de l'espace.

Dans la première partie, on montre qu'on peut donner des maximums de r, lorsqu'il y a dans l'espace un vecteur fermé invariant ou un tenseur fermé invariant du second ordre et, en particulier, dans le cas ou l'un des nombres de Betti B_1 ou B_2 n'est pas nul.

Dans la seconde partie, on donne certaines formules qui lient les tenseurs fermés invariants aux groupes de mouvement G_r de l'espace.

Dans la troisième, partie on suppose que l'espace V_n est rapporté à un système de congruences orthogonales et l'on montre que lorsque l'espace possède un groupe G_n simplement transitif et que l'on utilise les congruences orthogonales à coefficients de rotation constants [3], la recherche des tenseurs harmoniques de l'espace devient un problème algébrique, ce qui généralise un résultat de Hodge ayant trait aux espaces des groupes semi-simples. On donne des conditions nécéssaires et suffisantes relatives au groupe G_n, afin que l'espace possède un certain nombre de vecteurs harmoniques ou des tenseurs harmoniques du second ordre.

BIBLIOGRAFIE

1. W. Hodge, *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*. Cambridge, Univ. Press, 1952.
2. K. Yano, *Curvature and Betti numbers*. Annals of Math. studies, Princeton, 1953, p. 48.
3. G. Vrănceanu, *Sur les espaces de Riemann ayant leurs coefficients de rotation constants*. C. R., Paris, 1929, t. 189, p. 386.
4. C. Constantinescu, *Mobilität und Bettische Zahlen der Riemannschen Mannigfaltigkeiten*. Revue de Mathématiques pures et appliquées, București, 1957, vol. II.
5. A. Lichnerowicz, *Généralisations de la géométrie Kählerienne globale*. Colloque de géométrie différentielle, Louvain, 1951, p. 111.
6. G. Vrănceanu, *Asupra unei clase de spații riemaniene omogene*. Studii și cercetări matematice, t. V, nr. 1–2, 1954. p. 173.
7. C. Teleman, *Sur certains espaces symétriques*. Bul. științ. Acad. R. P. R. Secțiunea de științe matematice și fizice, t. VII, nr. 4, 1955, p. 977.
8. G. Vrănceanu, *Leçons de géométrie différentielle*. București, 1947, vol. I., p. 291.

STUDIUL SPAȚIILOR A_2 CU CONEXIUNE AFINĂ LINIARĂ, LOCAL EUCLIDIENE *)

DE

TIBERIU POSTELNICU

INTRODUCERE

Această lucrare se referă la determinarea și studiul proprietăților globale ale spațiilor A_2 cu conexiune afină liniară. Prin proprietăți globale sau topologice se înțeleg, în geometria diferențială, acele proprietăți care au loc pentru spațiul întreg.

Dacă spațiul este cu conexiune afină și local euclidian și conexiunea este definită de funcții întregi, se poate pune problema de a vedea dacă spațiul este echivalent global cu spațiul euclidian. Aceasta revine a vedea în ce condiții transformarea de la variabilele spațiului la coordonatele lui carteziene este o transformare topologică. Acest lucru nu se întîmplă, în general, și constituie o problemă greu de rezolvat. De aceea, cercetările întreprinse în cadrul catedrei de geometrie de la Facultatea de matematică și fizică din București, de sub conducerea acad. Gh. Vrănceanu, au început prin considerarea acestei probleme pentru clase speciale de spații cu conexiune afină, prima clasă fiind aceea a spațiilor cu conexiune constantă, local euclidiene [1]**).

Lucrarea de față are menirea să rezolve, în cazul spațiilor cu conexiune afină liniară cu două dimensiuni, pe de o parte problema determinării conexiunilor local euclidiene, iar pe de altă parte, problema echivalenței globale. Acestea sînt și temele celor două capitole ale lucrării.

Țin să exprim acad. Gh. Vrănceanu recunoștința și mulțumirile mele pentru prețioasa îndrumare continuă ce mi-a acordat-o în ducerea la bun sfîrșit a acestei lucrări.

---

*) Disertație susținută la 13 mai 1957 pentru obținerea titlului de candidat în științele fizico-matematice.

**) Pentru bibliografie se mai poate consulta Gh. Vrănceanu, *Leçons de géométrie différentielle*, Ed. Acad. R. P. R., București, 1957, vol. II, cap. VI.

Capitolul I

DETERMINAREA SPAȚIILOR A_2 CU CONEXIUNE AFINĂ LINIARĂ, LOCAL EUCLIDIENE

1. Unei varietăți diferențiale $A_n(x^1, \ldots, x^n)$ cu conexiune afină Γ^i_{jk} i se asociază tensorii de torsiune și de curbură și varietatea se zice local euclidiană dacă în fiecare vecinătate acești tensori sînt nuli, adică

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = 0, \tag{1}$$

$$\Gamma^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\Gamma^s_{jk} = 0. \tag{2}$$

Se știe [2] că există atunci un sistem de coordonate $u^1, \ldots, u^n$, numite carteziene, în care componentele conexiunii sînt nule și care satisfac ecuațiile

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^s_{jk}\frac{\partial u^i}{\partial x^s} = 0. \tag{3}$$

În aceste coordonate geodezicele sînt linii drepte. Determinarea spațiului euclidian $E_n(u^1, \ldots, u^n)$ corespunzător revine la integrarea sistemului (3) care este un sistem complet integrabil datorită ecuațiilor (1) și (2).

Dacă spațiul A_n, local euclidian, coincide cu spațiul euclidian E_n, corespondența fiind biunivocă, atunci se spune [1] că avem o echivalență în mare sau echivalență globală și deci transformarea de variabile

$$u^i = u^i(x^1, \ldots, x^n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

este topologică.

Problema echivalenței globale a unui spațiu cu conexiune afină, local euclidian, cu spațiul euclidian corespunzător constituie o extensie la cazul afin a aceleiași probleme relativă la spațiile riemanniene, considerată de E. Cartan *). Este cunoscut rezultatul său general care afirmă că un spațiu riemannian simplu conex, normal și local euclidian este echivalent global cu spațiul euclidian.

Proprietatea spațiului de a fi simplu conex este o proprietate pur topologică și ea este valabilă și pentru spațiile cu conexiune afină. Proprietatea de a fi normal sau complet este legată de metrică.

În cazul unui spațiu cu conexiune afină, local euclidian, problema a fost mai întîi considerată de acad. Gh. Vrănceanu cînd spațiul A_n este dat de o singură vecinătate și componentele conexiunii sînt funcții analitice [1]**) și a fost apoi completată [3] pentru cazul cînd A_n este definit ca o varietate diferențială globală printr-o mulțime numărabilă de vecinătăți. În fiecare vecinătate se pot introduce coordonate carteziene,

*) E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Gauthier-Villars, Paris, 1946, ed. a II-a.

**) p. 350.

trecerea de la un sistem de coordonate la altul în regiunea comună a două vecinătăți făcîndu-se printr-o transformare liniară. Dacă spațiul A_n este simplu conex și local euclidian se poate aranja astfel încît în părțile comune ale vecinătăților, transformarea de coordonate carteziene să fie întotdeauna identitatea. Se extinde astfel teorema lui Cartan în sensul că fiecărui punct P al unui spațiu A_n local euclidian și simplu conex îi corespunde în spațiul euclidian E_n un singur punct.

Pot exista însă puncte în E_n cărora să le corespundă o infinitate de puncte în A_n, pot exista puncte în E_n care să nu aibă corespondente în A_n și se poate întîmpla ca regiunea din E_n să nu mai fie simplu conexă.

Pentru a apropia rezultatele de teorema lui Cartan s-au considerat spații A_n cu anumite proprietăți speciale, care să constituie un echivalent al proprietății de completitudine.

Astfel, sînt spațiile A_n cu conexiune constantă introduse de acad. G h. V r ă n c e a n u [1]*) ca spații avînd un sistem de variabile în care coeficienții Γ^i_{jk} să fie constanți. Aceste spații sînt caracterizate de faptul că posedă un grup de mișcare simplu tranzitiv abelian.

Echivalența spațiilor A_n cu conexiune constantă, local euclidiene, cu spațiul E_n este definită de n soluții independente ale sistemului (3), care este în acest caz cu coeficienți constanți. Acad. G h. V r ă n c e a n u pentru cazul cu două dimensiuni [4], iar P. M o c a n u, pentru n dimensiuni [5], au demonstrat că echivalența globală are loc dacă vectorul de conexiune al spațiului, ce se obține prin contractare,

$$\Gamma_k = \Gamma^i_{ik} = \frac{\partial w}{\partial x^k}, \tag{5}$$

este nul, unde w este o anumită funcție de $x^1, \ldots, x^n$.

S-a arătat, de asemenea, că unui spațiu A_n cu conexiune constantă i se poate asocia o algebră de n numere hipercomplexe și a afirma că spațiul A_n este local euclidian revine la a spune că algebra este asociativă și comutativă, și invers.

După studiul spațiilor cu conexiune constantă s-a impus ca etapă următoare studiul spațiilor cu conexiune polinomială, în particular liniară, de forma

$$\Gamma^i_{jk} = A^i_{jkl} x^l + C^i_{jk} \qquad (A, C = \text{const.}),$$

acestea fiind cazurile cele mai simple în care conexiunile sînt definite în tot spațiul și nu au nici un fel de singularități.

Utilizînd formele canonice la care au fost aduse de acad. G h. V r ă n c e a n u [6] componentele Γ^1_{11}, Γ^2_{11} ale unui spațiu A_2 cu conexiune liniară, după cum acestea sînt forme liniar independente, nu sînt liniar independente sau sînt constante, am determinat [7] spațiile A_2 cu conexiune afină liniară local euclidiene. Pentru aceasta am folosit o metodă directă, pur algebrică, ce constă din discutarea și rezolvarea sistemelor

*) p. 354.

în A^i_{jkl}, C^i_{jk} se ce obțin din anularea componentelor tensorului de curbură

$$\Gamma^1_{112}, \quad \Gamma^1_{212}, \quad \Gamma^2_{112}, \quad \Gamma^2_{212},$$

ceea ce exprimă faptul că spațiul este local euclidian, conexiunea fiind presupusă simetrică. Am obținut astfel din anularea coeficienților variabilelor x^1, x^2 și din termenii liberi ai componentelor tensorului de curbură sisteme de 19 ecuații, care m-au condus la determinarea conexiunilor liniare, local euclidiene, bidimensionale.

2. Metoda utilizată în lucrarea menționată necesita calcule destul de complicate și nu permitea să se vadă ușor dacă conexiunile obținute erau independente față de o transformare liniară a variabilelor. Am reluat această problemă pe o cale mai simplă, sugerată de modul cum acad. Gh. Vrănceanu a găsit soluțiile liniare în cazul în care conexiunea contractată este nulă [8].

În cazul unui spațiu A_2 avem din (5)

$$\Gamma_1 = \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Gamma_2 = \Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22} = \frac{\partial w}{\partial y}; \tag{6}$$

unde am pus $x^1 = x$, $x^2 = y$.

Dacă notăm pentru simplicitate

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{22} = a, \ \Gamma^2_{11} = b, \ \Gamma^1_{12} = u, \ \Gamma^2_{12} = v, \\ &\Gamma^1_{11} = \frac{\partial w}{\partial x} - v = \alpha, \ \Gamma^2_{22} = \frac{\partial w}{\partial y} - u = \beta, \end{aligned} \tag{7}$$

ecuațiile care arată că A_2 este local euclidian se scriu, cum este ușor de văzut,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} + v\left(\frac{\partial w}{\partial x} - 2v\right) + b\left(\frac{\partial w}{\partial y} - 2u\right) = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial x} + a\left(\frac{\partial w}{\partial x} - 2v\right) + u\left(\frac{\partial w}{\partial y} - 2u\right) = 0, \\ &\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + uv - ab = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Ne punem problema de a găsi soluții liniare pentru aceste ecuații, deci a, b, u, v să fie funcții liniare, iar w funcție pătratică de x, y ce satisfac sistemul (8). Vom pune deci

$$\begin{aligned} &a = a_1 x + a_2 y + a_0, \qquad b = b_1 x + b_2 y + b_0, \\ &u = u_1 x + u_2 y + u_0, \qquad v = v_1 x + v_2 y + v_0, \\ &w = \frac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey), \end{aligned} \tag{9}$$

unde a_i, b_i, v_i, A, B, C, D, E $(i = 0, 1, 2)$ sînt constante.

Să presupunem mai întîi că a, b nu sînt amîndouă constante. Atunci putem presupune, schimbînd eventual variabilele, că a nu este o constantă și deci putem lua, utilizînd o translație, $a = a_1 x + a_2 y$, unde cel puțin una din constantele a_1, a_2 este diferită de zero.

Să arătăm că putem întotdeauna să ne reducem la acest caz.

Într-adevăr, să presupunem că a și b sînt constante; în acest caz, ultima ecuație (8) ne spune că u, v sînt și ele constante, eventual nule.

Considerăm atunci transformarea de variabile

$$x' = x + \rho y, \qquad y' = y.$$

Cum în general față de o transformare liniară de forma

$$x'^i = a^i_j x^j + a^i$$

Γ^i_{jk} se comportă ca un tensor [2], adică

$$\Gamma'^i_{rs}\, a^r_j\, a^s_k = \Gamma^s_{jk}\, a^i_s,$$

obținem în cazul nostru

$$\Gamma'^1_{11} = \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{11},$$

$$\Gamma'^1_{11}\rho + \Gamma'^1_{12} = \Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{12}\rho,$$

$$\Gamma'^1_{11}\rho^2 + 2\Gamma'^1_{12}\rho + \Gamma'^1_{22} = \Gamma^1_{22} + \Gamma^2_{22}\rho$$

și avem deci, ținînd seama de (7),

$$a' = \Gamma'^1_{22} = \Gamma^1_{22} + \rho(\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12}) + \rho^2(\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12}) + \rho^3\Gamma^2_{11} =$$

$$= a + \rho\left(\frac{\partial w}{\partial y} - 3u\right) + \rho^2\left(\frac{\partial w}{\partial x} - 3v\right) + \rho^3 b.$$

Presupunînd că $a = a_0$, $b = b_0$, rezultă din relația de mai sus că pentru ca și $a' = a'_0 = \text{const.}$ trebuie ca

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 3u + k_1, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 3v + k_2, \quad (k_1, k_2 = \text{const.}),$$

care introduse în primele două ecuații (8) ne impun să admitem $u = u_0$, $v = v_0$ și în acest caz am fi conduși la o conexiune constantă. Deci a' poate fi adus cu siguranță la o formă efectiv liniară. Rezultă astfel că

Pentru găsirea soluțiilor liniare ale sistemului (8) *nu trebuie să considerăm decît cazul în care avem*

$$a = a_1 x + a_2 y,$$

unde a_1, a_2 *nu sînt în același timp nuli.*

Să considerăm atunci transformarea liniară

$$x' = \lambda x, \qquad y' = \mu x + \nu y,$$

care ne dă

$$\Gamma_{22}'^{1}\,\nu^2 = \Gamma_{22}^{1}\lambda,$$

și impunînd condiția de invarianță

$$\left(a_1' x' + a_2' y'\right)\nu^2 = (a_1 x + a_2 y)\,\lambda,$$

obținem

$$a_1' = \frac{1}{\nu^2}\,a_1 - \frac{\mu}{\nu^3}\,a_2, \quad a_2' = \frac{\lambda}{\nu^3}\,a_2. \tag{10}$$

Avem deci următoarele două posibilități :

I. dacă $a_2 \neq 0$, utilizînd μ facem $a_1 = 0$ și avem $a = y$;

II. dacă $a_2 = 0$ obținem $a = \varepsilon x$ cu $\varepsilon = \pm 1$.

Vom considera deci în primul rînd cazul în care $a = \Gamma_{22}^{1} = y$. În acest caz, formulele (10) ne arată că transformarea

$$x' = \nu^3 x + \tau, \qquad y' = \nu\, y \tag{11}$$

păstrează forma canonică a lui Γ_{22}^{1} și schimbă $u = \Gamma_{22}^{1}$ după formulele

$$\Gamma_{12}'^{1}\,\nu = \Gamma_{12}^{1},$$

ceea ce ne dă

$$\left[u_1'\left(\nu^3 x + \tau\right) + u_2'\nu y + u_0'\right]\nu = u_1 x + u_2 y + u_0$$

și prin urmare avem

$$u_1'\,\nu^4 = u_1, \quad u_2'\,\nu^2 = u_2, \quad \left(u_1'\tau + u_0'\right)\nu = u_0.$$

Rezultă că dacă $u_1 \neq 0$ putem face să avem $u_1 = \varepsilon$, $u_0 = 0$, deci

$$u = \varepsilon x + u_2 y,$$

unde $\varepsilon = \pm 1$, $u_2 = \text{const.}$ Dacă $u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$ putem face să avem

$$u = \varepsilon y + u_0, \qquad (u_0 = \text{const.})$$

și, în sfîrșit, mai putem avea

$$u = \eta, \qquad (\eta = 0,\ 1).$$

1) Să considerăm deci cazul în care avem

$$a = y, \qquad u = \varepsilon x + u_2 y,$$

cînd sistemul (8) corespunzător se scrie

$$v_1 - b_2 + v\left(\frac{\partial w}{\partial x} - 2v\right) + b\left(\frac{\partial w}{\partial y} - 2\varepsilon x - 2u_2 y\right) = 0,$$

$$u_2 + y\left(\frac{\partial w}{\partial x} - 2v\right) + (\varepsilon x + u_2 y)\left(\frac{\partial w}{\partial y} - 2\varepsilon\, x - 2u_2 y\right) = 0,$$

$$B - \varepsilon - v_2 + (\varepsilon x + u_2 y)\,v - by = 0,$$

obținînd din a doua ecuație $u_2 = 0$. De asemenea, cum u nu este proporțional cu y, rezultă din grupul de termeni, din ultima ecuație, care conțin pe x, y, că trebuie să avem

$$v = \rho y + m, \qquad b = \rho \varepsilon x + n,$$

care scriind că verifică această ecuație ne dau $m = n = 0$ și deci putem lua de la început

$$v = \rho y, \qquad b = \varepsilon \rho x, \qquad B = \varepsilon + \rho.$$

Tot ecuația a doua ne dă atunci

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2\rho y + k\varepsilon x, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2\varepsilon x - ky,$$

de unde

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = B = 2\varepsilon = 2\rho = \varepsilon + \rho,$$

adică $\rho = \varepsilon$. Obținem astfel conexiunea local euclidiană

$$a = y, \quad b = x, \quad u = \varepsilon x, \; v = \varepsilon y, \quad \alpha = \varepsilon (kx + y), \quad \beta = \varepsilon x - ky, \qquad (12)$$

unde $\varepsilon = \pm 1$ și k este o constantă.

2) Dacă

$$a = y, \qquad u = \varepsilon y + u_0,$$

obținem din sistemul (8) ecuațiile

$$\begin{aligned} &v_1 - b_2 + \iota \left(\frac{\partial w}{\partial x} - 2v \right) + b \left(\frac{\partial w}{\partial y} - 2\varepsilon y - 2u_0 \right) = 0, \\ &\varepsilon + y \left(\frac{\partial w}{\partial x} - 2v \right) + (\varepsilon y + u_0) \left(\frac{\partial w}{\partial y} - 2\varepsilon y - 2u_0 \right) = 0, \qquad (13) \\ &B - v_2 + (\varepsilon y + u_0) v - by = 0. \end{aligned}$$

Dacă $u_0 = 0$, a doua ecuație (13) ne duce la contradicția $\varepsilon = 0$. Vom considera deci $u_0 \neq 0$. Ultima ecuație (13), care se mai scrie

$$B - v_2 + y (\varepsilon v + u_0 v_2 - b) + u_0 v_1 x + u_0 v_0 = 0,$$

ne dă

$$B - v_2 + u_0 v_0 = 0, \quad v_1 = 0, \quad b = \varepsilon v + u_0 v_2. \qquad (13')$$

A doua ecuație (13) se scrie

$$\varepsilon + y \left(\frac{\partial w}{\partial x} - 2v + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial y} - 2y - 4\varepsilon u_0 + Cu \right) + Bu_0 x - Eu_0 - 2u_0^2 = 0$$

și deci avem

$$B = 0,\ Eu_0 - 2u_0^2 + \varepsilon = 0,$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2v - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial y} + 2y + 4\varepsilon u_0 - Cu_0, \tag{13''}$$

iar din relațiile (13') rezultă

$$v = v_0 (u_0 y + 1), \qquad b = \varepsilon v + u_0^2 v. \tag{13'''}$$

Dacă ținem seama de valoarea lui $\frac{\partial w}{\partial x}$ din (13'') în prima ecuație (13), obținem

$$v_0 (\varepsilon - C + u_0 E - 2u_0^2) = 0, \tag{14}$$

iar a treia relație (13'') ne mai dă

$$A = 0,\ \ 2u_0 v_0 - 2C + 2 = 0,\ \ D = 2v_0 - \varepsilon E + 4\varepsilon u_0 - Cu_0. \tag{14'}$$

Presupunînd mai întîi că $v_0 = 0$ în (14) și ținînd seama de (13''), (13''') și (14') obținem soluția

$$a = y,\ u = \varepsilon y + u_0,\ b = v = 0,\ \alpha = \frac{1}{u_0},\ \beta = \varepsilon y + u_0 - \frac{\varepsilon}{u_0}, \tag{15}$$

unde $\varepsilon = \pm 1$ și $u_0 \neq 0$.

Dacă $v_0 \neq 0$ rezultă din (13'') și (14)

$$C = 0,\ \ u_0 v_0 + 1 = 0$$

și obținem astfel conexiunea local euclidiană

$$a = y,\ u = \varepsilon y + u_0,\ b = -\left(\varepsilon y + \frac{\varepsilon}{u_0} + u_0\right),$$
$$v = -\left(y + \frac{1}{u_0}\right),\ \alpha = y + 2\varepsilon u_0,\ \beta = -\varepsilon y + u_0 - \frac{\varepsilon}{u_0}, \tag{16}$$

unde $\varepsilon = \pm 1$ și $u_0 \neq 0$,

Utilizînd acum transformarea de variabile

$$x' = x + \varepsilon y,\ \ y' = y + u_0 + \frac{1}{u_0},$$

conexiunea (16) se aduce la forma

$$a = u = \beta = 0,\ b = -\varepsilon y + (\varepsilon - 1)\, u_0,\ v = \varepsilon u_0,\ \alpha = \varepsilon u_0 - \frac{1}{u_0}, \tag{17}$$

unde am revenit la variabilele neaccentuate.

3) Dacă

$$a = y, \qquad u = \eta, \qquad (\eta = 0, 1)$$

pentru $\eta = 0$, sistemul (8) se scrie

$$v_1 - b_2 + v\left(\frac{\partial w}{\partial x} - 2y\right) + b\frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$y\left(\frac{\partial w}{\partial x} - 2v\right) = 0, \qquad B - v_2 - by = 0.$$

Ultimele două ecuații ne dau

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2v, \quad b = 0, \quad B = v_2 = 0,$$

iar din prima avem $v_1 = 0$. Rezultă soluția

$$a = y, \quad b = u = 0, \quad v = \alpha = v_0, \quad \beta = Cy + E. \tag{18}$$

Considerînd transformarea (11) care păstrează forma canonică a componentelor Γ^1_{22} și Γ^1_{12} și pentru care avem

$$\Gamma'^1_{11} = \Gamma'^2_{22} = \frac{v_0}{\nu^3}, \quad \Gamma'^2_{11} = 0, \quad \Gamma'^2_{22} = \frac{C}{\nu^2}y' + \frac{E}{\nu},$$

soluția (18) ne dă următoarele conexiuni după cum v_0 este sau nu diferit de zero :

$$a = y, \quad b = u = 0, \quad v = \alpha = 1, \quad \beta = Cy + E, \tag{19}$$

$$a = y, \quad b = u = v = \alpha = 0, \quad \beta = \tau y + \rho, \tag{20}$$

unde $\tau = 0, \pm 1$, iar C, E și ρ sînt constante cu $\rho = 1$ cînd $C = 0$.

Pentru $\eta = 1$ sistemul corespunzător este

$$v_1 - b_2 + v\left(\frac{\partial w}{\partial x} - 2v\right) + b\left(\frac{\partial w}{\partial y} - 2\right) = 0,$$

$$y\left(\frac{\partial w}{\partial x} - 2v\right) + \frac{\partial w}{\partial y} - 2 = 0, \tag{21}$$

$$B - v_2 + v - by = 0.$$

Ultima ecuație (21) ne dă atunci

$$b = b_0, \quad v = b_0 y + v_0, \quad B - v_2 + v_0 = 0 \tag{21'}$$

și, înlocuind expresiile derivatelor în a doua ecuație (21), obținem

$$A = 0, \quad B = 0, \quad E = 2, \quad B - v_2 + v_0 = 0. \tag{21''}$$

De asemenea, înlocuind pe $\frac{\partial w}{\partial y}$ din a doua ecuație (21) în prima ecuație,

rezultă $b = 0$, $v = v_0$ de care ținînd seama în (21′) și (21″) avem $v_0 = 0$, $C = -D$. Obținem astfel soluția

$$a = y, \quad u = 1, \quad b = v = 0, \quad \alpha = D, \quad \beta = -Dy + 1, \tag{22}$$

unde D este o constantă arbitrară.

Să considerăm în al doilea rînd cazul în care

$$a = \Gamma^1_{22} = \varepsilon x \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Această formă este conservată de transformarea

$$x' = \lambda x, \quad y' = \mu x + y + \tau, \tag{23}$$

care ne dă

$$\Gamma'^1_{12} = \Gamma^1_{12} - \mu \Gamma'^1_{22}$$

și deci putem presupune

$$u = \Gamma^1_{12} = u_2 y,$$

sistemul corespunzător fiind

$$\begin{aligned} &v_1 - b_2 + v\left(\frac{\partial w}{\partial x} - 2v\right) + b\left(\frac{\partial w}{\partial y} - 2u_2 y\right) = 0, \\ &u_2 - \varepsilon + \varepsilon x\left(\frac{\partial w}{\partial x} - 2v\right) + u_2 y\left(\frac{\partial w}{\partial y} - 2u_2 y\right) = 0, \\ &B - v_2 + u_0 v y - \varepsilon b x = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Ultima ecuație (24) ne dă

$$b = k u_2 y, \; v = k \varepsilon x$$

și deci $B = v_2 = 0$, de care ținînd seama în primele două ecuații (24), pe care le scădem, obținem $u_2 = \varepsilon$, rezultînd soluția

$$a = \varepsilon x, \quad u = \beta = \varepsilon y, \quad v = \alpha = \varepsilon k x, \quad b = \varepsilon k y, \tag{25}$$

Utilizînd transformarea (23) pentru care avem

$$\begin{aligned} &\Gamma'^1_{11}\lambda = \Gamma^1_{11} - 2\mu\,\Gamma^1_{12} + \mu^2 \Gamma^1_{22}, \\ &\Gamma'^2_{22} = \Gamma^1_{22}\,\mu + \Gamma^2_{22}, \\ &\Gamma'^2_{12}\lambda = \mu\,\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{12} - \mu^2 \Gamma^1_{22} - \mu \Gamma^2_{22}, \end{aligned}$$

soluția (25) ne dă conexiunea local euclidiană

$$a = \varepsilon x, \quad b = \varepsilon' y. \quad u = \beta = \varepsilon y, \quad v = \alpha = \varepsilon' x, \tag{26}$$

nnde $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$.

Am obținut astel conexiunile liniare euclidiene date de (12), (15), (17), (19), (20), (22) și (26).

3. Reducerea la formele canonice ale conexiunilor liniare ale spațiilor A_2 local euclidiene nu este în general invariantivă, deoarece am utilizat în unele cazuri numai o parte din grupul de transformări liniare.

Am stabilit [7] un criteriu după care putem recunoaște dacă o formă este sau nu distinctă de anumite cazuri considerate. Acest criteriu afirmă că pentru o anumită conexiune determinată, dacă ecuația

$$a_2\mu^4 + (a_1 + 2u_2 - \beta_2)\,\mu^3 + (2u_1 + \alpha_2 - \beta_1 - 2v_2)\,\mu^2 + \\ + (\alpha_1 - 2v_1 - b_2)\,\mu - b_1 = 0 \tag{27}$$

admite două rădăcini distincte, reale și nenule, ea face parte din clasa pentru care avem

$$a = a_1 u + a_0, \quad b = b_2 y + b_0. \tag{28}$$

Considerînd acum acest criteriu la conexiunile local euclidiene determinate, ecuația (27) se scrie pentru conexiunea (12)

$$\mu^4 + k\mu^3 + \varepsilon k\mu - 1 = 0$$

și admite întotdeauna două rădăcini nenule, reale și distincte. De asemenea, pentru conexiunea (26) obținem ecuația

$$\mu\,(\varepsilon\mu^2 - \varepsilon') = 0$$

și putem aplica criteriul pentru $\varepsilon' = \varepsilon$.

Pentru celelalte conexiuni ecuația (27) respectivă nu satisface condițiile cerute. Cum conexiunea (26) este unica din clasa (28) dintre cele determinate, rezultă că putem, printr-o transformare corespunzătoare, să reducem conexiunea (12) la (26), pentru care vom studia problema de echivalență.

Avem deci următorul rezultat :

Spațiile A_2 cu conexiune afină liniară local euclidiene sînt date de (15), (17), (19), (20), (22) *și* (26).

Capitolul II

ECHIVALENȚA GLOBALĂ A SPAȚIILOR A_2 CU CONEXIUNE LINIARĂ, LOCAL EUCLIDIENE

1. Fiind dat un spațiu A_n $(x^1, \ldots, x^n)$ cu conexiune afină Γ^i_{jk}, local euclidian, putem asocia spațiului sistemul de ecuații cu derivate parțiale (3) care este complet integrabil în virtutea condițiilor (1), (2) și care posedă n soluții independente (4).

Invers, la o transformare invertibilă (4) se poate asocia prin ecuațiile (3) un spațiu A_n euclidian, variabilele u^i fiind pentru spațiul A_n coor-

donate carteziene. Astfel, rezolvînd formulele (3) în raport cu Γ^i_{jk}, se obține [1]*),

$$\Gamma^i_{jk} = -\frac{\Delta^i_{jk}}{\Delta},$$

unde Δ este determinantul funcțional al transformării de coordonate (4) și Δ^i_{jk} se obțin din acest determinant înlocuind elementele liniei i cu cantitățile

$$\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^j \partial x^k}, \ldots, \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^j \partial x^k}.$$

Pentru cazul transformărilor cremoniene întregi, adică transformările (4) polinoame, care admit transformări inverse tot polinoame, acad. Gh. Vrănceanu a demonstrat [9] că la orice astfel de transformare corespunde un spațiu A_n local euclidian, echivalent global cu spațiul euclidian E_n, cu conexiune afină polinomială și cu conexiune contractată nulă. Pentru $n = 2$ s-a găsit o conexiune liniară cu $\Gamma_k = 0$ și pentru care transformarea asociată nu este cremoniană; deci, în general, reciproca nu este adevărată. Menționăm că pentru clasa spațiilor cu conexiune constantă reciproca este adevărată.

Fiind date ecuațiile (4), care fac să corespundă unui punct oarecare $(x^1, \ldots, x^n)$ al spațiului A_n, un punct $(u^1, \ldots, u^n)$ al spațiului E_n, problema de a decide dacă această transformare este biunivocă este, în general, destul de dificilă. Pentru a stabili că transformarea (4) realizează o echivalență globală, trebuie să vedem dacă aceste ecuații sînt rezolubile în raport cu $x^1, \ldots, x^n$ și dacă fiecărui punct din E_n putem face să-i corespundă în mod univoc un punct din A_n căruia el să-i fie imagine.

J. Hadamard a dat [10] condițiile necesare și suficiente ca o transformare univocă și continuă a unui spațiu n-dimensional într-un subspațiu să fie biunivocă și bicontinuă. Treorema sa are dezavantajul că face să intervină o condiție metrică, fiind vorba de lungimea unei curbe. Ea a fost generalizată de acad. S. Stoilov [11]. Astfel, o transformare între două spații topologice, primul conex iar al doilea simplu conex, supusă la condițiile:

1° transformarea să fie continuă;

2° orice punct al spațiului inițial să posede cel puțin o vecinătate în care transformarea să fie biunivocă;

3° nici o curbă continuă care nu posedă punct limită să nu se transforme într-o curbă continuă tinzînd către un punct limită;

este topologică și transformă un spațiu în altul.

Pentru determinantul funcțional Δ al transformării se poate arăta [1] că avem

$$\Delta = \Delta_0 e^{w_0 - w},$$

unde Δ_0 este valoarea lui Δ într-un punct, iar w satisface formulele (5)

*) p. 351.

și deci dacă Δ este diferit de zero într-un punct, el este diferit de zero în orice punct al domeniului de analiticitate al funcțiilor Γ^i_{jk}. În cazul nostru Γ^i_{jk} sînt funcții întregi, deci formulele (4) sînt determinate în tot spațiul și iacobianul este diferit de zero în tot spațiul. Se pune problema cînd sînt definite în mod unic în tot spațiul și formulele inverse, pentru considerațiile noastre este util de a obține și un răspuns negativ, aceasta permițîndu-ne să rezolvăm unele cazuri ce pun probleme dificile relative la unele tipuri de ecuații diferențiale.

În ipotezele noastre, condiția de continuitate este îndeplinită prin analiticitatea soluțiilor ecuațiilor diferențiale obținute din sistemul (3). De asemenea, orice punct posedă cel puțin o vecinătate în care transformarea este biunivocă, deoarece iacobianul este nenul într-un punct. În ceea ce privește condiția 3°, acad. Gh. Vrănceanu a demonstrat[8] că ne putem restrînge numai la clasa curbelor autoparalele și a obținut condițiile necesare și suficiente de invertibilitate a transformării (4).

Interpretînd spațiul $A_n\,(x^1, \ldots, x^n)$ ca un spațiu afin și deci transformarea (4) ca o corespondență între două spații afine A_n și E_n, rezultă atunci că o condiție necesară și suficientă pentru echivalența globală este ca la dreptele din E_n să corespundă în A_n curbe ce se îndepărtează la infinit în ambele direcții. Problema se poate evident inversa considerînd dreptele lui A_n și curbele corespunzătoare în E_n. Obținem astfel următorul rezultat pe care-l vom utiliza în paragraful următor :

Dacă pentru transformările (4) dintr-un spațiu A_n cu conexiune afină, local euclidian, și spațiul E_n corespunzător există o curbă ce se depărtează la infinit în A_n în ambele sensuri care se transformă în E_n într-o semidreaptă, sau există o dreaptă în A_n ce se transformă în E_n într-o curbă ce tinde către un punct la distanță finită, atunci nu se realizează o echivalență globală.

2. Să considerăm sistemul (3) pentru conexiunile determinate în capitolul precedent. Cu notația (7) folosită, acest sistem devine

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u^i}{\partial x} + b \frac{\partial u^i}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial y^2} + a \frac{\partial u^i}{\partial x} + \beta \frac{\partial u^i}{\partial y} = 0, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial u^i}{\partial x} + v \frac{\partial u^i}{\partial y} = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

El va avea o soluție de forma

$$U = C_0 + C_i u^i (x, y), \tag{30}$$

care ne va da transformarea (4) corespunzătoare.

Astfel, în cazul spațiului dat de (15), acest sistem se scrie

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{u_0}\frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + y\frac{\partial U}{\partial x} + \left(\varepsilon x + u_0 - \frac{\varepsilon}{u_0}\right)\frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + (\varepsilon y + u_0)\frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Prima ecuație ne conduce la soluția

$$U = f(y)\, e^{-\frac{x}{u_0}} + g(y)\, u_0,$$

care introdusă în celelalte ecuații ne dă

$$f' + (\varepsilon y + u_0) f = 0,\ g'' + \left(\varepsilon y + u_0 - \frac{\varepsilon}{u_0}\right) g' = 0$$

și obținem soluția

$$U = C_1 e^{-\frac{\varepsilon}{2}y^2 - u_0 y - \frac{1}{u_0}x} + C_2 u_0 \int_0^y e^{-\frac{\varepsilon}{2}y^2 - \left(u_0 - \frac{\varepsilon}{u_0}\right)y}\, dy + C_0.$$

Spațiul E_2 corespunzător va fi astfel dat de

$$u^1 = e^{-\frac{\varepsilon}{2}y^2 - u_0 y - \frac{\varepsilon}{u_0}x},$$

$$u^2 = \int_0^y e^{-\frac{\varepsilon}{2}y^2 - \left(u_0 - \frac{\varepsilon}{u_0}\right)y}\, dy,$$

și cum u^1, u^2 nu pot fi negativi, nu se realizează o echivalență în mare, și avem ca imagine fie o semibandă din primul cadran, fie întreg cadranul întîi al planului u^1, u^2 după cum $\varepsilon = +1$ sau -1 respectiv.

Pentru conexiunea (17) sistemul (29) este

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(\varepsilon u_0 - \frac{1}{u_0}\right)\frac{\partial U}{\partial x} + [\varepsilon y + (\varepsilon - 1) u_0]\frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \varepsilon u_0 \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \tag{31}$$

Din a doua ecuație a sistemului avem soluția

$$U = f(x)\, y + g(x),$$

care introdusă în celelalte două ecuații ne dă

$$f' + \varepsilon u_0 f = 0,$$
$$g'' + \left(\varepsilon u_0 - \frac{1}{u_0}\right) g' + (\varepsilon - 1)\, u_0 C_1\, e^{-u_0 x} = 0 \tag{31'}$$

și astfel spațiul E_2 respectiv este

$$u^1 = e^{-\left(\varepsilon u_0 - \frac{1}{u_0}\right)x},$$
$$u^2 = [y + (\varepsilon - 1)\, u_0]\, e^{-\varepsilon u_0 x}. \tag{31''}$$

Din cauza funcției exponențiale, care este mereu pozitivă, nu avem o echivalență globală, domeniul corespunzător fiind întreg semiplanul $u^1 > 0$.

Dacă însă din exponentul lui u^1 avem

$$\varepsilon u_0^2 - 1 = 0,$$

adică

$$\varepsilon = 1, \quad u_0 = \pm 1, \tag{32}$$

ecuațiile (31') devin

$$f' + u_0 f = 0, \quad g'' = 0$$

și obținem soluțiile

$$u^1 = x, \quad u^2 = y\, e^{-u_0 x} \tag{33}$$

ale căror formule inverse sînt

$$x = u^1, \quad y = u^2\, e^{u_0 u^1}. \tag{33'}$$

Se realizează astfel o echivalență globală în cazul conexiunii (17) pentru valorile (32) ale constantelor, iar conexiunea contractată nu este nulă, adică pentru

$$a = u = \alpha = \beta = 0, \quad b = -y, \quad v = \pm 1. \tag{17'}$$

Conexiunea (17) ne mai dă cazul în care conexiunea contractată Γ_k este nulă și anume pentru $\varepsilon = 1$, $u_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, iar transformarea este dată de

$$u^1 = e^x, \; u^2 = y e^{-x},$$

adică nu se realizează o echivalență în mare. Aceasta este forma la care poate fi adusă conexiunea prin care acad. Gh. Vrănceanu a arătat că reciproca teoremei privind transformările cremoniene nu este totdeauna adevărată.

Componentele spațiului A_2, date de (19), ne dau sistemul

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + y\frac{\partial U}{\partial x} + (Cy + E)\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \tag{34}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

Din prima ecuație a sistemului obținem soluția

$$U = f(y)\, e^{-x} + g(y),$$

care scriind că verifică ultima ecuație obținem $g' = 0$ și deci putem lua de la început

$$U = f(y)\, e^{-x},$$

care în cea de-a doua ecuație din sistemul (34) ne dă

$$f'' + (Cy + E) f' - yf = 0. \tag{35}$$

și deci obținem transformarea care leagă spațiile A_2 și E_2:

$$u^1 = f_1(y)\, e^{-x}, \quad u^2 = f_2(y)\, e^{-x}, \tag{36}$$

unde f_1, f_2 sînt două soluții independente ale ecuației (35).

Considerăm o valoare $y = y_0$ pentru care funcțiile f_1, f_2 sînt definite obținînd o valoare constantă bine determinată și atunci formulele (36) ne arată că pentru $x \to +\infty$ avem $u^1, u^2 \to 0$. Rezultă că dreapta infinită paralelă la Ox se transformă într-o semidreaptă ce tinde către origine și deci aplicînd criteriul obținut în paragraful precedent, din teorema Hadamard - Stoilov - Vrănceanu, rezultă că nu avem o echivalență globală. Domeniile imagine sînt în formă de unghiuri cu vîrful în origine, a căror poziție depinde de semnul pe care-l au funcțiile f_1 și f_2.

În cazul spațiului dat de (20), componenta $\beta = \Gamma^2_{22}$ poate avea expresia

$$\beta = \varepsilon y + \rho,$$

unde $\varepsilon = \pm 1$ și ρ este constant, sau poate fi egală cu $\eta = 0{,}1$. În primul caz, sistemul (29) se scrie

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + y\frac{\partial U}{\partial x} + (\varepsilon y + \rho)\frac{\partial U}{\partial y} = 0. \tag{37}$$

Soluția

$$U = f(y)\, x + g(y)$$

obținută din prima ecuație (37) verifică celelalte ecuații ale sistemului, dacă

$$f'(y) = 0,$$

deci

$$f(y) = C = \text{const.}$$

și dacă

$$g'' + (\varepsilon y + \rho)\, g' + Cy = 0,$$

a cărei soluție este

$$g = C_1 \int_0^y e^{-\frac{\varepsilon}{2} y^2 - \rho y}\, dy - Cy + C\rho \int_0^y e^{-\frac{\varepsilon}{2} y^2 - \rho y} \left(\int_0^y e^{-\frac{\varepsilon}{2} y^2 + \rho y}\, dy \right) dy.$$

Deci spațiul E_2 corespunzător este dat de

$$u^1 = \int_0^y e^{-\frac{\varepsilon}{2} y^2 - \varepsilon y}\, dy,$$

$$u^2 = x - y + \int_0^y e^{-\frac{\varepsilon}{2} y^2 - \rho y} \left(\int_0^y e^{\frac{\varepsilon}{2} y^2 + \rho y}\, dy \right) dy$$

și cum $u^1 > 0$ nu se realizează o echivalență în mare.

Pentru valoarea $\eta = 1$ a componentei β, sistemul (37) devine

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + y \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

și obținem soluția

$$u^1 = e^{-y}, \quad u^2 = x - y, \tag{37'}$$

care nu ne dă o echivalență globală din cauză că $u^1 > 0$.

Pentru $\eta = 0$ avem

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + y \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

și deci

$$u^1 = y, \; u^2 = x - \frac{y^3}{6}. \tag{38}$$

Transformarea inversă a lui (38) fiind dată prin formulele

$$x = \frac{1}{6}(u^1)^3 + u^2, \quad y = u^1 \tag{38'}$$

și fiind valabilă de asemenea în tot spațiul A_2, rezultă că spațiul A_2 local euclidian dat de (20) cu $\tau = 0$, $\varrho = 0$,

$$a = y, \quad b = u = v = \alpha = \beta = 0, \tag{20'}$$

este echivalent în mare cu spațiul euclidian E_2 și conexiunea contractată este nulă. Acest spațiu intră ca un caz particular în spațiul A_2, găsit de acad. G h. V r ă n c e a n u [1]*), avînd conexiunea

$$b = \Gamma^2_{11} = \varphi''(x),$$

toate celelalte componente fiind nule și $\varphi(x)$ fiind o funcție întreagă.

Conexiunea (22) ne conduce la sistemul

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + D\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + y\frac{\partial U}{\partial x} + (1 - Dy)\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Din a doua ecuație (39) obținem soluția

$$U = f(x)\, e^{-y} + g(y),$$

care în celelalte două ecuații ne dă

$$\begin{aligned} &f'' + Df' = 0, \\ &g'' + (1 - Dy)\, g' + CDye^{-y} = 0 \qquad (C = \text{const.}) \end{aligned}$$

obținînd astfel pentru $D \neq 0$ spațiul E_2 dat de

$$u^1 = e^{-Dx - y},$$

$$u^2 = \int_0^y e^{-D\frac{y^2}{2} - y}\, dy$$

și cum $u^1 > 0$ nu există o corespondență topologică între cele două spații.

Pentru $D = 0$, obținem din (39) soluția

$$U = f(y)\, x + g(y),$$

care ne dă

$$f' + f = 0, \quad g'' + g' + C_1 y e^{-y} = 0$$

*) p. 354.

și deci soluțiile sînt

$$u^1 = e^{-y},$$

$$u^2 = \left(x + \frac{1}{2} y^2 + y + 1 \right) e^{-y} \tag{40}$$

și deoarece u^1 tinde către zero cînd y tinde către $+\infty$ nu există o echivalență globală, proprietate care de altfel se vede și direct.

Pentru conexiunea local euclidiană dată de (26) vom considera separat două cazuri, ținînd seama de valorile coeficienților. Astfel cînd $\varepsilon' = \varepsilon$ sistemul (29) se scrie

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \varepsilon x \frac{\partial U}{\partial x} + \varepsilon y \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \varepsilon x \frac{\partial U}{\partial x} + \varepsilon y \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \varepsilon y \frac{\partial U}{\partial x} + \varepsilon x \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

Diferența primelor două ecuații ne dă

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

a cărei soluție

$$U = f(x + y) + g(x - y)$$

verifică sistemul de mai sus pentru

$$f'' + \varepsilon (x + y) f' = 0,$$

$$g'' + \varepsilon (x - y) g' = 0,$$

adică avem

$$u^1 = \int_0^{\xi} e^{-\varepsilon \frac{\xi_2}{2}} d\xi, \quad u^2 = \int_0^{\eta} e^{-\varepsilon \frac{\eta^2}{2}} d\eta,$$

unde am pus $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, și, cum aceste integrale sînt pozitive, nu se realizează o echivalență în mare.

Dacă $\varepsilon' = -\varepsilon$ sistemul (29) corespunzător conexiunii (26) este

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \varepsilon x \frac{\partial U}{\partial x} - \varepsilon y \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \varepsilon x \frac{\partial U}{\partial x} + \varepsilon y \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \varepsilon y \frac{\partial U}{\partial x} - \varepsilon x \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

Adunînd primele două ecuații obținem ecuația de tip Laplace

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

care admite soluția de forma

$$U = f(x + iy) + g(x - iy).$$

Scriind că această soluție verifică prima și a treia ecuație rezultă :

$$f'' + \varepsilon \xi f' = 0, \; g'' + \varepsilon \eta g' = 0,$$

unde $\xi = x + iy$, $\eta = x - iy$ și care integrate ne dau

$$f = \int_0^{\xi} e^{\varepsilon \frac{\xi^2}{2}} d\xi, \quad g = \int_0^{\eta} e^{\varepsilon \frac{\eta^2}{2}} d\eta.$$

Trecînd la variabile reale avem

$$f = \int_{(0,\,0)}^{(x,\,y)} e^{\varepsilon \frac{x^2 - y^2}{2}} (\cos \varepsilon xy + i \sin \varepsilon xy)\,(dx + idy),$$

$$g = \int_{(0,\,0)}^{(x,\,y)} e^{\varepsilon \frac{x^2 - y^2}{2}} (\cos \varepsilon xy - i \sin \varepsilon xy)\;(dx - idy).$$

Observăm că schimbînd i cu $-i$, integralele se transformă una în alta. De aceea, vom considera ca soluții partea reală și argumentul părții imaginare dintr-una din integralele de mai sus, adică vom lua

$$u^1 = \mathrm{Re} f, \; u^2 = \mathrm{Im} f,$$

sau

$$u^1 = \int_{(C)} e^{\varepsilon \frac{x^2 - y^2}{2}} (\cos \varepsilon xy\, dx - \sin \varepsilon xy\, dy),$$

$$u^2 = \int_{(C)} e^{\varepsilon \frac{x^2 - y^2}{2}} (\cos \varepsilon xy\, dy + \sin \varepsilon xy\; dx).$$

Acestea sînt integrale curbilinii din diferențiale totale exacte, care integrate, prima pe axul Oy și pe o paralelă la Ox pînă într-un punct $P(x,y)$ iar a doua pe drumul complementar, ne dau :

$$u^1 = \int_0^x e^{\varepsilon \frac{w^2 - y^2}{2}} \cos \varepsilon xy\; dx, \; u^2 = \int_0^y e^{\varepsilon \frac{x^2 - v^2}{2}} \cos \varepsilon xy\; dy.$$

Să considerăm axul Ox, ale cărui puncte se transformă prin integrala lui u^1 în semiaxa pozitivă ; rezultă, aplicînd criteriul din paragraful precedent, că nu se realizează o echivalență în mare.

Avem astfel următorul rezultat :

Spațiile A_2 cu conexiune afină liniară, local euclidiene, sînt echivalente global cu spațiul euclidian, dacă componentele sînt date de (17') și (20'), formulele de transformare fiind date de (33) și (38) respectiv.

Dintre toate celelalte cazuri de neechivalență globală, putem, de exemplu, afirma, că transformarea de la spațiul A_2 local euclidian, dat de (17), la semiplanul $u^1 > 0$ este biunivocă, deoarece formulele (31'') se pot inversa și avem

$$x = \ln (u^1)^{\frac{u_0}{1-\varepsilon u_0^2}},$$

$$y = u^2 (u^1)^{\frac{\varepsilon u_0^2}{1-\varepsilon u_0^2}} - (\varepsilon - 1)\, u_0;$$

de asemenea, formulele (37') ale căror inverse sînt

$$x = u^2 - \ln u^1, \quad y = -\ln u^1$$

precum și transformarea (40) realizează o corespondență biunivocă între spațiul cu conexiune afină local euclidian și domeniul corespunzător din spațiul euclidian.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНО-ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ A_2 С ЛИНЕЙНОЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Первая глава работы посвящена определению локально-евклидовых пространств A_2 с линейной аффинной связностью, то есть удовлетворяющих условиям (1) и (2). В первом параграфе представлены исследования относительно локально-евклидовых пространств с аффинной связностью в общем виде, в частности, с постоянной связностью, а также результаты, полученные автором в предыдущей работе (7).

Во втором параграфе задача упрощается и сводится к определению линейных решений для системы (8). После того как показывается, что для этого достаточно рассмотреть лишь случай, в котором $a = \Gamma^1_{22} = a_1 x + a_2 y$, применяются некоторые линейные преобразования для получения канонической формы этой компоненты и определяются 7 линейных локально-евклидовых связностей.

В третьем параграфе, пользуясь ранее установленным критерием [7], показано, что две связности являются эквивалентными. Таким образом выводится заключение, что локально-евклидовы пространства A_2 с линейной аффинной связностью даны в (15), (17), (19), (20) и (26).

Вторая глава посвящена исследованию общей эквивалентности локально-евклидовых пространств A_2 с линейной связностью, с соответ-

ствующим евклидовым пространством, полученным интегрированием полностью интегрируемой системы (3). Сначала показывается, в первом параграфе, как можно применить теорему Адамара-Стойлова относительно взаимнооднозначности семейства преобразований, в случае A_n, для получения критерия неэквивалентности в целом. Для этого используется уточнение этой теоремы, данное Г. Врэнчану.

Второй параграф этой главы занимается фактическим определением соответствующих пространств E_2 и случаев эквивалентности в целом. В результате получается, что локально евклидовы пространства с линейной аффинной связностью, данные (17′) и (20′), эквивалентны в целом евклидовым пространствам, а соответствующие формулы преобразований даются в (33) и (38). Свертывание связности дает нуль для связности (20′) и для связности (17) с $\varepsilon = 1$, $u_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, когда все же не получается эквивалентности в целом.

В случаях неэквивалентности в целом, соответстующие области на плоскости E_2, например, таковы: весь первый квадрант плоскости, полуполоса из первого квадранта, полуплоскость $u^1 > 0$, углы с вершиной в начале координат. Преобразование является взаимнооднозначным в случае связностей (17), (20) с $\tau = 0$, $\rho = 1$ и (22) с $D = 0$.

ÉTUDE DES ESPACES A_2 À CONNEXION AFFINE LINÉAIRE, LOCALEMENT EUCLIDIENS

(RÉSUMÉ)

Le premier chapitre du travail est consacré à la détermination des espaces A_2, à connexion affine linéaire, localement euclidiens, c'est-à-dire satisfaisant aux conditions (1) et (2). Dans le premier paragraphe, on présente les recherches concernant les espaces à connexion affine localement euclidiens en général, à connexion constante en particulier, ainsi que les résultats obtenus par l'auteur dans un travail antérieur [7].

Dans le second paragraphe, on reprend le problème d'une manière plus simple, en le ramenant à la détermination des solutions linéaires pour le système (8). Après avoir montré qu'il suffit pour cela de considérer le cas seul où $a = \Gamma^1_{22} = a_1 x + a_2 y$, l'auteur utilise certaines transformations linéaires pour l'obtention de certaines formes canoniques de cette composante et l'on détermine 7 connexions linéaires localement euclidiennes.

Dans le troisième paragraphe, utilisant un critérium établi antérieurement [7], on montre que deux connexions sont équivalentes. On conclut ainsi que les espaces A_2, à connexion affine linéaire, localement euclidiens, sont donnés par (15), (17), (19), (20), (22) et (26).

Le second chapitre est consacré à l'étude de l'équivalence globale des espaces A_2 à connexion linéaire, localement euclidiens, avec l'espace

euclidien correspondant, obtenu par l'intégration du système (3) complètement intégrable. On montre tout d'abord, dans le premier paragraphe, comment on peut appliquer le théorème d'Hadamard-Stoilov, sur la biunivocité d'une famille de transformations, dans le cas A_n pour l'obtention d'un critérium de non-équivalence globale. On utilise pour cela un certain aspect de ce théorème donné par l'académicien G. Vrănceanu.

Le second paragraphe de ce chapitre s'occupe de la détermination effective des espaces E_2, correspondant aussi aux cas d'équivalence globale. On obtient le résultat que les espaces A_2 à connexion affine linéaire localement euclidiens, donnés par (17′) et (20′), sont globalement équivalents à l'espace euclidien, — les formules de transformation étant respectivement données par (33) et (38). La connexion contractée est nulle pour la connexion (20′) et pour la connexion (17) avec $\varepsilon = 1$, $u_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ à condition qu'on ne réalise pas une équivalence totale.

Dans les cas de non-équivalence globale, les domaines correspondants de plan E_2 sont, par exemple : tout le premier quadrant du plan ; une demi-bande dans le premier quadrant ; le demi-plan $u^1 > 0$; des angles ayant le sommet dans l'origine. La transformation est bi-univoque dans le cas des connexions (17), (20) avec $\tau = 0$, $\rho = 1$ et (22) avec $D = 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1951, vol. II.
2. — *Leçons de géométrie différentielle*. Ed. Acad. R. P. R., București, 1947, vol. I și ed. romînă din 1952.
3. — *Sur les éspaces à connexion affine localement euclidiens*. Publ. Math., 1956, t.4, p. 359.
4. — *Spații cu conexiune afină constantă local euclidiene*. Comunicările Acad. R. P. R., t. I, nr. 1, ianuarie 1951, p. 29.
5. P. Mocanu, *Spații cu conexiune afină constantă echivalente în mare cu spațiul euclidian*. Comunicările Acad. R. P. R., t. II, nr. 7—8, iulie-august 1952, p. 389.
6. Gh. Vrănceanu, *Reducerea la o formă canonică a unei conexiuni liniare în spațiul A_2*. Bul. Științ. Acad. R. P. R., Secția de științe matematice și fizice, t. V, nr. 4, octombrie-decembrie 1953 , p. 481.
7. T. Postelnicu, *Spații cu conexiune afină liniară A_2 local euclidiene*, Rev. Univ., 1954, „C.I. Parhon", nr. 4 — 5, p. 101.
8. Gh. Vrănceanu, *Sur les espaces à connexion affine localement euclidiens et les transformations crémoniennes entières*. Revue de Mathématiques pures et appliquées, 1957, t. II, nr. 1 (sub tipar).
9. — *Les transformations crémoniennes entières et les espaces à connexion affine*. C.R. de l'Académie des Sciences de Paris, 1956, t. 243, nr. 25, p. 1997.
10. J. Hadamard, *Sur les transformations ponctuelles*. Bull. de la Soc. Math. de France, 1906, t. 34, p. 71.
11. S. Stoilov, *Sur les transformations continues des espaces topologiques*. Bull. Math. de la Soc. Roum. de Sci., 1933, t. 35, p. 229.

GRUPURILE DE MIȘCARE CU ȘASE PARAMETRI ALE SPAȚIILOR A_3 *)

DE

VIOREL DUMITRAȘ

Într-o lucrare anterioară [1], autorul a determinat spațiile cu conexiune afină cu 3 dimensiuni, A_3, care admit un grup tranzitiv de mișcări (automorfisme) cu șapte parametri. Folosind aceeași metodă vom căuta să determinăm spațiile A_3 care admit un grup tranzitiv cu șase parametri, deci un grup de stabilitate cu trei parametri. Putem să ne alegem un sistem de coordonate astfel încît grupul de stabilitate al unui punct fix, pe care-l luăm drept origine, să fie un subgrup al grupului centroafin.

Grupurile centroafine cu trei parametri, și în trei variabile le avem din clasificarea lui S. Lie [2]. Grupurile centroafine care conțin transformarea distinsă $U = x^1p_1 + x^2p_2 + x^3p_3$ sau transformări de forma $x^i p_j + U\,(i \neq j)$, nu pot fi grupuri totale de stabilitate ale unui spațiu A_3 neeuclidian după cum a arătat acad. G. Vrănceanu [3] și autorul [4]. Există 10 categorii de grupuri centroafine G_3 în trei variabile, neasemenea și operatorii transformărilor lor infinitezimale se scriu sub forma

$$
\begin{array}{lll}
\text{(I)} & x^3p_2, \quad x^1p_2, \quad x^3p_1 + x^2p_2 + aU, \\
\text{(II)} & x^3p_1, \quad x^3p_2, \quad x^3p_2 - x^3p_3 + aU, \\
\text{(III)} & x^3p_1 + x^1p_2, \quad x^1p_3 + x^2p_1, \quad x^2p_2 - x^3p_3, \\
\text{(IV)} & x^1p_2, \quad x^2p_1, \quad x^1p_1 - x^2p_2, \\
\text{(V)} & x^3p_1, \quad x^3p_2, \quad x^1p_2, \\
\text{(VI)} & x^3p_2, \quad x^3p_1 + x^1p_2, \quad x^2p_2 - x^3p_3 + aU, \\
\text{(VII)} & x^3p_2, \quad x^1p_1 + aU, \quad x^2p_2 + bU, \\
\text{(VIII)} & x^3p_2, \quad x^1p_2, \quad x^1p_1 + cx^2p_2 + aU, \\
\text{(IX)} & x^3p_2, \quad x^1p_2, \quad x^2p_2 + aU, \\
\text{(X)} & x^3p_1, \quad x^3p_2, \quad x^1p_1 + cx^2p_2 + aU,
\end{array}
\qquad \text{(A)}
$$

*) Lucrare prezentată la Institutul de matematică în ședința din 23 mai 1957.

a, b și c fiind niște constante, iar

$$U = x^1 p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3, \qquad p_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{1}$$

Vom căuta acum care dintre aceste grupuri este grupul total de stabilitate al unui spațiu A_3.

În cele ce urmează indicii notați cu litere grecești iau valorile 4, 5, 6, iar indicii notați cu litere latine iau valorile 1, 2, 3 exceptînd formulele care se referă la spații cu mai mult de 3 dimensiuni.

Capitolul I

DETERMINAREA GRUPURILOR DE STABILITATE ALE SPAȚIILOR A_3 CU GRUP TRANZITIV G_6

§ 1. Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale (I)

Operatorii transformărilor infinitezimale ale grupului de stabilitate se scriu

$$X_4 = x^3 p_2, \quad X_5 = x^1 p_2, \quad X_6 = x^3 p_1 + x^2 p_2 + aU. \tag{2}$$

După cum se știe, dacă $X = a_k^j x^k p_j$, este o transformare a grupului de stabilitate, avem [5]*)

$$\begin{aligned} &T^i_{sk} a^s_j + T^i_{js} a^s_k - T^s_{jk} a^i_s = 0, \\ &\Gamma^i_{skl} a^s_j + \Gamma^i_{jsl} a^s_k + \Gamma^i_{jks} a^s_l - \Gamma^s_{jkl} a^i_s = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

unde T^i_{jk} și Γ^i_{jkl} sînt componentele tensorului de torsiune respectiv ale tensorului de curbură calculate în origine.

Scriind ecuațiile (3) pentru transformările X_4, X_5, X_6 de mai sus, avem

$$\begin{aligned} &T^i_{2k}\delta^3_j + T^i_{j2}\delta^3_k - T^3_{jk}\delta^i_2 = 0, \\ &T^i_{2k}\delta^1_j + T^i_{j2}\delta^1_k - T^1_{jk}\delta^i_2 = 0, \\ &T^i_{j1}\delta^3_k + T^i_{1k}\delta^3_j - T^3_{jk}\delta^i_1 + a(\tau_1 + \tau_3) + (1+a)\tau_2 = 0, \\ &\Gamma^i_{2kl}\delta^3_j + \Gamma^i_{j2l}\delta^3_k + \Gamma^i_{jk2}\delta^3_l - \Gamma^3_{jkl}\delta^i_2 = 0, \\ &\Gamma^i_{2kl}\delta^1_j + \Gamma^i_{j2l}\delta^1_k + \Gamma^i_{jk2}\delta^1_l - \Gamma^1_{jkl}\delta^i_2 = 0, \\ &\Gamma^i_{1kl}\delta^3_j + \Gamma^i_{j1l}\delta^3_k + \Gamma^i_{jk1}\delta^3_l - \Gamma^3_{jkl}\delta^i_1 + a(\Sigma_1 + \Sigma_3) + (1+a)\Sigma_2 = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

unde am notat

$$\begin{aligned} \tau_m &= T^i_{mk}\delta^m_j + T^i_{jm}\delta^m_k - T^m_{jk}\delta^i_m, \\ \Sigma_m &= \Gamma^i_{mkl}\delta^m_j + \Gamma^i_{jml}\delta^m_k + \Gamma^i_{jkm}\delta^m_l - \Gamma^m_{jkl}\delta^i_m, \end{aligned} \tag{5}$$

m fiind un indice fix care ia valorile 1, 2, 3.

*) p. 219.

Din relațiile (4) rezultă că dacă $a \neq 0, 1, \frac{1}{2}$ toate componentele tensorului de torsiune și ale tensorului de curbură sînt nule în origine, prin urmare spațiul este euclidian [6]. Dacă $a = 1$, tensorul de curbură este nul, iar tensorul de torsiune are o singură componentă nenulă T^2_{13}*), tensorul derivat al tensorului de torsiune fiind nul; spațiul este prin urmare un spațiu A_3 cu conexiune nesimetrică generală cu grup maxim G_9, [7]. Dacă $a = 1/2$ tensorul de torsiune este nul, tensorul de curbură are o singură componentă nenulă Γ^2_{313}, iar tensorul derivat al tensorului de curbură este nul; spațiu este deci un spațiu A_3 neproiectiv euclidian cu grup maxim G_8, [8].

Să presupunem acum $a = 0$. Notînd operatorii principali cu X_i, ecuațiile de structură ale grupului tranzitiv G_6 al cărui subgrup de stabilitate este dat de transformările (1), se vor scrie

$$\begin{aligned}
&(X_4 X_5) = 0, && (X_4 X_6) = X_4, && (X_5 X_6) = X_5 - X_4,\\
&(X_1 X_4) = c^\alpha_{14} X_\alpha, && (X_1 X_5) = X_2 + c^\alpha_{15} X_\alpha, && (X_1 X_6) = c^\alpha_{16} X_\alpha,\\
&(X_2 X_4) = c^\alpha_{24} X_\alpha, && (X_2 X_5) = c^\alpha_{25} X_\alpha, && (X_2 X_6) = X_2 + c^\alpha_{26} X_\alpha,\\
&(X_3 X_4) = X_2 + c^\alpha_{34} X_\alpha, && (X_3 X_5) = c^\alpha_{35} X_\alpha, && (X_3 X_6) = X_1 + c^\alpha_{36} X_\alpha,\\
&(X_j X_k) = c^s_{jk} X_j + c^\alpha_{jk} X_\alpha.
\end{aligned} \tag{6}$$

Făcînd transformarea de operatori

$$\begin{aligned}
\overline{X}_1 &= X_1 - (c^4_{16} + c^5_{16}) X_4 - c^5_{16} X_5 + c^6_{36} X_6,\\
\overline{X}_2 &= X_2 + (c^4_{15} + c^6_{36}) X_4 + c^4_{26} X_5 + c^6_{26} X_6,\\
\overline{X}_3 &= X_3 - (c^5_{36} + c^4_{36} + c^4_{16} + 2c^5_{16}) X_4 - (c^5_{36} + c^5_{16}) X_5 + (c^4_{34} - c^4_{15} - c^6_{36}) X_6,
\end{aligned}$$

avem, dacă notăm noii operatori principali tot cu X_i,

$$\begin{aligned}
&(X_1 X_6) = c^6_{16} X_6, && (X_1 X_5) = X_2 + c^5_{15} X_5 + c^6_{15} X_6,\\
&(X_2 X_6) = X_2 + c^5_{26} X_5, && (X_3 X_4) = X_2 + c^5_{34} X_5 + c^6_{34} X_6,\\
&(X_3 X_6) = X_1.
\end{aligned} \tag{6'}$$

Identitățile $(X_i X_4 X_6) = 0$, se scriu

$$\begin{aligned}
[(X_1 X_4) X_6] - (X_1 X_4) + c^6_{16} X_4 &= 0,\\
[(X_2 X_4) X_6] - 2(X_2 X_4) &= 0,\\
[(X_3 X_4) X_6] - (X_3 X_4) - (X_1 X_4) &= 0,
\end{aligned}$$

și ne dau $c^5_{26} = c^6_{16}$ și

$$(X_1 X_4) = c^4_{14} X_4 + c^6_{16} X_5, \; (X_2 X_4) = 0, \; (X_3 X_4) = X_2 - c^4_{14} X_5. \tag{6''}$$

*) Cînd vom spune că o componentă T^i_{jk} a tensorului de torsiune este nulă sau nenulă, vom înțelege că același lucru este valabil și pentru componenta T^i_{kj} obținută prin permutarea indicilor inferiori; la fel cînd vom spune că o componentă Γ^i_{jkl} a tensorului de curbură este nulă sau nenulă, vom înțelege că același lucru este valabil și pentru componenta Γ^i_{jlk} obținută prin permutarea ultimilor doi indici de covarianță.

Ținînd seama de aceste expresii, identitățile $(X_i X_5 X_6) = 0$ se vor scrie

$$\begin{aligned}
&[(X_1 X_5) X_6] - (X_1 X_5) + (X_1 X_4) + c_{16}^6 (X_5 - X_4) = 0,\\
&[(X_2 X_5) X_6] - 2(X_2 X_5) = 0,\\
&[(X_3 X_5) X_6] - (X_3 X_5) + (X_3 X_4) - (X_1 X_5) = 0,
\end{aligned}$$

și obținem

$$\begin{aligned}
&(X_1 X_4) = 0, \quad (X_1 X_5) = X_2, \quad (X_1 X_6) = 0,\\
&(X_2 X_4) = 0, \quad (X_2 X_5) = 0, \quad (X_2 X_6) = X_2,\\
&(X_3 X_4) = X_2, \quad (X_3 X_5) = c_{35}^4 X_4, \quad (X_3 X_6) = X_1.
\end{aligned} \tag{7}$$

În sfîrșit, identitățile $(X_i X_j X_6) = 0$, $(X_1 X_3 X_4) = 0$, $(X_1 X_3 X_5) = 0$ ne dau

$$\begin{aligned}
&(X_1 X_2) = -\mu X_4, \ (X_2 X_3) = \lambda X_2 +\\
&\quad + \mu(X_4 - X_5), \ (X_1 X_3) = \lambda X_1 + \mu X_6,
\end{aligned} \tag{7'}$$

iar identitatea $(X_1 X_2 X_3) = 0$ ne dă $\mu = 0$ și deci avem

$$(X_1 X_2) = 0, \ (X_2 X_3) = \lambda X_2, \quad (X_1 X_3) = \lambda X_1. \tag{7''}$$

Se poate arăta că trebuie să avem $c_{35}^4 = 0$ deoarece în caz contrar grupul considerat nu poate fi grupul de mișcări al unui spațiu A_3. Putem deci lua

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \qquad X_3 = p_3 + \lambda U$$

și folosind ecuațiile transformărilor infinitezimale ale mișcărilor spațiului A_3

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} \xi^s + \Gamma_{sk}^i \frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + \Gamma_{js}^i \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} - \Gamma_{jk}^s \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} \tag{8}$$

putem determina toate componentele conexiunii. Găsim astfel că singurele componente nenule ale conexiunii sînt

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = \frac{\alpha + \beta}{1 + \lambda x^3}, \ \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{32}^2 = \frac{\alpha - \beta}{1 + \lambda x^3}, \ \Gamma_{33}^3 = \frac{2\alpha}{1 + \lambda x^3}.$$

Aceste spații au, după cum se știe [9], un grup de mișcări cu nouă parametri. Putem enunța

L e m a 1. *Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate* (I) : $x^3 p_2$, $x^1 p_2$, $x^3 p_1 + x^2 p_2 + aU$ *sînt sau spații euclidiene sau spații cu grup maxim.*

§ 2. Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale (VII)

Operatorii transformărilor infinitezimale ale grupului de stabilitate sînt

$$\text{(VII)} \quad X_4 = x^3 p_2, \quad X_5 = x^1 p_1 + aU, \quad X_6 = x^2 p_2 + bU.$$

După cum am arătat [4] dacă spațiul nu este un spațiu cu grup maxim, parametrii constanți a și b nu pot lua decît una din valorile $0, -1, -\frac{1}{2}$. Scriind ecuațiile (3) pentru transformările X_4, X_5, X_6 de mai sus, avem

$$
\begin{aligned}
&T^i_{2k}\delta^3_j + T^i_{j2}\delta^3_k - T^3_{jk}\delta^i_2 = 0,\\
&\Gamma^i_{2kl}\delta^3_j + \Gamma^i_{j2l}\delta^3_k + \Gamma^i_{jk2}\delta^3_l - \Gamma^3_{jkl}\delta^i_2 = 0,\\
&(1+a)\,\tau_1 + a(\tau_2 + \tau_3) = 0,\\
&(1+a)\,\Sigma_1 + a(\Sigma_2 + \Sigma_3) = 0,\\
&(1+b)\,\tau_2 + b(\tau_1 + \tau_3) = 0,\\
&(1+b)\,\Sigma_2 + b(\Sigma_1 + \Sigma_3) = 0
\end{aligned}
$$

și rezultă că dacă sîntem în unul din cazurile $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$; $a = b = -\frac{1}{2}$, $a = b = -1$; $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$; $a = 0$, $b = -1$ spațiul este local euclidian [10]*); dacă $a = -1$, $b = 0$ tensorul de torsiune și tensorul de curbură au singurele componente nenule $T^2_{21} = T^3_{31}$, respectiv $\Gamma^2_{112} = \Gamma^3_{113}$ și spațiul intră în categoria spațiilor A_3 cu grup maxim G_{n^2} [11]. Dacă $a = b = 0$ componentele nenule ale tensorului de torsiune sînt T^1_{31}, T^2_{32}, iar cele ale tensorului de curbură Γ^1_{313}, Γ^2_{323} și avem un spațiu A_3 cu grup G_7 [1]**). Se poate arăta că în cazul $a = 0$, $b = -\frac{1}{2}$ spațiul este euclidian.

Rezultă

Lema 2. *Spațiile A_3, care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale (VII), sînt spații care au un grup de mișcări G_r $(r > 6)$ dacă excludem cazul $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$.*

Urmînd aceeași metodă putem exclude toate cazurile în care spațiul A_3 admite un grup de mișcări cu un număr de parametri superior lui 6. Astfel găsim că grupul (II) nu poate fi grupul total de stabilitate al unui A_3, de asemenea grupul (VI) dacă avem $a \neq 1$, grupul (IX) dacă $a \neq 0$, grupul (VIII) dacă nu sîntem în unul din cazurile $a = -c = -\frac{1}{2}$; $a = c = -1$ și grupul (X) dacă nu sîntem în unul din cazurile $a = c = 0$; $a = -c = -\frac{1}{2}$; $a = -1$, $c = 2$; $a = 0$, $c = 1$.

De observat că grupurile (X) cu $a = -c = -\frac{1}{2}$ și $a = -1$, $c = 2$ nu sînt distincte; în adevăr, în primul caz ultima transformare se scrie $X_6 = \frac{1}{2}(x^1p_1 - x^3p_3)$, iar în al doilea caz $X_6 = x^2p_2 - x^3p_3$ și fă-

*) p. 350.
**) p. 203.

cînd abstracție de factorul constant $\frac{1}{2}$ rezultă că X_6' se obține din X_6 prin permutarea variabilelor x^1 și x^2, permutare care păstrează ansamblul primelor două transformări.

§ 3. Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate G_3 dat de transformările infinitezimale (III)

Operatorii transformărilor infinitezimale ale grupului (III) sînt

$$(\mathrm{III})\ X_4 = x^3 p_1 + x^1 p_2,\quad X_5 = x^1 p_3 + x^2 p_1,\quad X_6 = x^2 p_2 - x^3 p_3,$$

iar ecuațiile sale de structură se scriu

$$(X_4 X_6) = X_4,\quad (X_5 X_6) = -X_5,\quad (X_4 X_5) = -X_6. \tag{9}$$

Alegînd convenabil operatorii principali X_i, parantezele $(X_i X_\alpha)$, $(X_i X_j)$ se vor scrie

$$\begin{aligned}
&(X_1 X_4) = X_2 + c_{14}^5 X_5 + c_{14}^6 X_6, && (X_1 X_6) = c_{16}^6 X_6,\\
&(X_2 X_4) = c_{24}^\alpha X_\alpha, && (X_2 X_6) = X_2 + c_{26}^4 X_4,\\
&(X_3 X_4) = X_1 + c_{34}^4 X_4 + c_{34}^5 X_5, && (X_3 X_6) = -X_3 + c_{36}^5 X_5,\\
&(X_1 X_5) = X_3 + c_{15}^4 X_4 + c_{15}^5 X_5, && (X_j X_k) = c_{jk}^s X_s + c_{jk}^\alpha X_\alpha,\\
&(X_2 X_5) = X_1 + c_{25}^\alpha X_\alpha,\\
&(X_3 X_5) = c_{35}^\alpha X_\alpha.
\end{aligned} \tag{10}$$

Identitățile $(X_i X_\alpha X_\beta) = 0$ ne dau

$$c_{14}^5 = c_{14}^6 = c_{24}^\lambda = c_{34}^4 = c_{34}^5 = c_{15}^4 = c_{15}^5 = c_{25}^\lambda = c_{35}^\lambda = c_{16}^6 = c_{26}^4 = c_{36}^5 = 0\ (\lambda = 4,5,6).$$

Ținînd seama de aceste condiții, identitățile $(X_i X_j X_\alpha) = 0$, $(X_1 X_2 X_3) = 0$ ne dau

$$(X_1 X_2) = \rho X_4,\quad (X_2 X_3) = \rho X_6,\quad (X_1 X_3) = \rho X_5. \tag{10'}$$

Putem satisface la această structură luînd

$$X_1 = p_1 - \rho x^1 U,\quad X_2 = p_2 + \rho x^3 U,\quad X_3 = p_3 + \rho x^2 U. \tag{11}$$

Să determinăm conexiunea spațiului A_3 corespunzător. Pentru aceasta vom scrie ecuațiile (8) pentru transformările (11) și pentru transformările grupului de stabilitate. Făcînd în ecuațiile (8) $i = j = k = 1$ avem următorul sistem

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1}(1 - \rho (x^1)^2) - \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^2}\rho x^1 x^2 - \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^3}\rho x^1 x^3 - 2\rho x^1 \Gamma_{11}^1 -\\
&\qquad - \rho x^2 (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^1) - \rho x^3 (\Gamma_{13}^1 + \Gamma_{31}^1) = -2\rho,\\
&\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^1}\rho x^1 x^3 + \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^2}(1 + \rho x^2 x^3) + \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x^3}\rho (x^3)^2 + \rho x^3 \Gamma_{11}^1 - \rho x^1 \Gamma_{11}^3 = 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^1}\rho x^1x^2+\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^2}\rho(x^2)^2+\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^3}(1+\rho x^2x^3)+\rho x^2\Gamma_{11}^1-\rho x^1\Gamma_{11}^2=0, \quad (12)$$

$$x^3\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^1}+x^1\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^2}+\Gamma_{12}^1+\Gamma_{21}^1-\Gamma_{11}^3=0,$$

$$x^1\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^3}+x^2\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^1}+\Gamma_{13}^1+\Gamma_{31}^1-\Gamma_{11}^2=0,$$

$$x^2\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^2}-x^3\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^3}=0.$$

Dacă înmulțim a doua ecuație (12) cu x^2, a treia cu $-x^3$ și le adunăm ținînd seama de a șasea ecuație obținem

$$x^2\Gamma_{11}^3=x^3\Gamma_{11}^2. \quad (12')$$

Ținînd seama de transformările X_2, X_3, X_6 și de formula (12′) avem, pentru funcția Γ_{11}^2, condițiile

$$\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial x^1}\rho x^1x^3+\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial x^2}(1+\rho x^2x^3)+\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial x^3}\rho(x^3)^2=0,$$

$$\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial x^1}\rho x^1x^2+\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial x^2}\rho(x^2)^2+\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial x^3}(1+\rho x^2x^3)=0, \quad (12'')$$

$$x^2\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial x^2}-x^3\frac{\partial\Gamma_{11}^2}{\partial x^3}=\Gamma_{11}^2.$$

Făcînd aceeași combinație de mai sus avem $\Gamma_{11}^2=0$.
Or din (12′) rezultă că de asemenea $\Gamma_{11}^3=0$.

Vom ține seama de aceste condiții în ecuațiile (12).
Din prima, a patra și a cincea ecuație (12) avem

$$\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^1}(1-\rho(x^1)^2+2\rho u)-2\rho x^1\Gamma_{11}^1=2\rho, \quad (u=x^2x^3). \quad (12''')$$

Din a șasea ecuație (12) rezultă că Γ_{11}^1 este funcție numai de variabilele x^1 și u, iar ecuația a doua capătă forma

$$\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^1}\rho x^1+(1+2\rho u)\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial u}+\rho\Gamma_{11}^1=0. \quad (12^{IV})$$

Considerăm acum sistemul format din ecuațiile (12‴) și (12^{IV}). Rezolvînd în raport cu $\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial x^1}$ și $\frac{\partial\Gamma_{11}^1}{\partial u}$ și integrînd găsim

$$\Gamma_{11}^1=-2\frac{\rho x^1}{1-\rho(x^1)^2+2\rho u}.$$

În acest mod putem determina toate componentele nenule ale conexiunii

$$\Gamma^1_{11} = -2\frac{\rho x^1}{M},\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = -\frac{\rho x^1}{M},$$

$$\Gamma^2_{22} = 2\frac{\rho x^3}{M},\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \frac{\rho x^3}{M}, \tag{13}$$

$$\Gamma^3_{33} = 2\frac{\rho x^2}{M},\ \Gamma^1_{31} = \Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \Gamma\frac{\rho x^2}{M},$$

unde $M = 1 - \rho\,(x^1)^2 + 2\rho\,x^2\,x^3$.

Componentele conexiunii acestui spațiu se pot scrie

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j\ \varphi_k + \delta^i_k\,\varphi_j \tag{14}$$

având

$$\varphi_k = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}\ln M. \tag{14'}$$

Deoarece M este un polinom de gradul al doilea în variabilele x^i rezultă, după o teoremă a lui P. A. Sirokov [12], că spațiul este simetric în sensul lui Cartan. De asemenea, din faptul că discriminantul cvadricei

$$M = 1 - \rho\,(x^1)^2 + 2\ \rho\,x^2\,x^3 = 0$$

este diferit de zero rezultă că spațiul este un spațiu al lui Riemann cu curbură constantă. Avem :

Lema 3. *Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate (III) sînt spații ale lui Riemann cu curbură constantă.*

★

Din lemele demonstrate în acest capitol și din discuția făcută la sfîrșitul paragrafului al doilea, rezultă că dintre grupurile (A) doar 10 pot fi grupuri totale de stabilitate ale unui spațiu omogen A_3 care nu este un spațiu al lui Riemann. Transformările infinitezimale ale acestor grupuri se pot scrie.

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{IV}) && x^1p_2,\quad x^2p_1,\quad x^1p_1 - x^2p_2,\\
&(\mathrm{V}) && x^3p_1,\quad x^3p_2,\quad x^1p_2,\\
&(\mathrm{VI}') && x^3p_1,\quad x^3p_1 + x^1p_2,\ x^1p_1 + 2\,x^2p_2,\\
&(\mathrm{VII}') && x^3p_2,\quad x^1p_1 - x^3p_3,\quad x^2p_2,\\
&(\mathrm{VIII}') && x^3p_2,\quad x^1p_2,\quad (x^1p_1 - x^3p_3),\\
&(\mathrm{VIII}'') && x^3p_2,\quad x^1p_2,\quad 2x^2p_2 + x^3p_3,\\
&(\mathrm{IX}') && x^3p_2,\quad x^1p_2,\quad x^2p_2\\
&(X') && x^3p_1,\quad x^3p_2,\quad x^1p_1
\end{aligned} \tag{A'}$$

$$(X'') \quad x^3p_1, \quad x^3p_2, \quad x^1p_1 - x^3p_3,$$

$$(X''') \quad x^3p_1, \quad x^3p_2, \quad x^1p_1 + x^2p_2,$$

În capitolul II vom arăta că există spații A_3 pentru care unul din grupurile (A') este grup total de stabilitate.

Capitolul II

DETERMINAREA SPAȚIILOR A_3 CU GRUP G_3

§ 1. Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate G_3 dat de transformările infinitezimale (III)

Avem

$$(III) \quad X_4 = x^1p_2, \quad X_5 = x^2p_1, \quad X_6 = x^1p_1 - x^2p_2.$$

Ecuațiile de structură ale grupului de stabilitate se scriu

$$(X_4X_5) = X_6, \quad (X_4X_6) = -2X_4, \quad (X_5X_6) = 2X_5 \tag{15}$$

iar celelalte ecuații de structură ale grupului de mișcări ale spațiului sînt

$$\begin{aligned}
&(X_1X_4) = X_2 + c^\alpha_{14}X_\alpha, \quad (X_1X_5) = c^\alpha_{15}X_\alpha, \quad (X_1X_6) = X_1 + c^\alpha_{16}X_\alpha,\\
&(X_2X_4) = c^\alpha_{24}X_\alpha, (X_2X_5) = X_1 + c^\alpha_{25}X_\alpha, (X_2X_6) = -X_2 + c^\alpha_{26}X_\alpha, \quad (16)\\
&(X_3X_4) = c^\alpha_{34}X_\alpha, (X_3X_5) = c^\alpha_{35}X_\alpha, (X_3X_6) = c^\alpha_{36}X_\alpha,\\
&(X_jX_k) = c^s_{jk}X_s + c^\alpha_{jk}X_\alpha.
\end{aligned}$$

Dacă facem schimbarea de operatori

$$\bar{X}_1 = X_1 + \frac{1}{3}c^4_{16}X_4 - c^5_{16}X_5 + c^6_{16}X_6,$$

$$\bar{X}_2 = X_2 + c^4_{26}X_4 - \frac{1}{3}c^5_{26}X_5 - c^6_{26}X_6,$$

$$\bar{X}_3 = X_3 + \frac{1}{2}c^4_{36}X_4 - \frac{1}{2}c^5_{36}X_5 + \frac{1}{2}c^5_{35}X_6,$$

obținem, dacă notăm noii operatori principali tot cu X_i,

$$\begin{aligned}
&(X_1X_6) = X_1, (X_2X_6) = -X_2, (X_3X_6) = c^6_{36}X_6,\\
&(X_3X_5) = c^4_{35}X_4 + c^6_{35}X_6.
\end{aligned}$$

Ținînd seama de aceste expresii, identitățile $(X_i\, X_4\, X_6) = 0$, $(X_i\, X_5\, X_6) = 0$, $(X_3\, X_4\, X_5) = 0$ ne dau

$$\begin{aligned} &(X_1\, X_4) = X_2\,, \quad (X_1\, X_5) = 0, \qquad (X_1\, X_6) = X_1, \\ &(X_2\, X_4) = 0, \qquad (X_2\, X_5) = X_1\,, \qquad (X_2\, X_6) = -X_2\,, \\ &(X_3\, X_4) = 0, \qquad (X_3\, X_5) = 0, \qquad (X_3\, X_6) = 0, \end{aligned} \tag{16'}$$

iar identitățile $(X_i\, X_j\, X_6) = 0$, $(X_1\, X_2\, X_4) = 0$, $(X_1\, X_3\, X_4) = 0$ ne dau expresiile parantezelor $(X_i\, X_j)$:

$$(X_1\, X_2) = 2\rho\, X_3\,, \quad (X_2\, X_3) = \lambda\, X_2\,, \quad (X_1\, X_3) = \lambda\, X_1\,. \tag{16''}$$

În sfîrșit, identitatea $(X_1\, X_2\, X_3) = 0$ ne dă condiția $\lambda\, \rho = 0$.
Avem două posibilități

1°. $\rho \neq 0$, $\lambda = 0$. Din expresiile parantezelor $(X_3\, X\alpha)$ rezultă că operatorul principal X_3 se scrie

$$X_3 = p_3 + m\,(x^3)\,(x^1\, p_1 + x^2\, p_2) + n\,(x^3)\, p_3.$$

O schimbare de variabile de forma

$$x'^1 = x^1\, \varpi\,(x^3),\ x'^2 = x^2\, \varpi\,(x^3)\,,\ x'^3 = \chi\,(x^3)$$

lasă neschimbate valorile operatorilor $X\alpha$, iar operatorul X_3 se va scrie în noile variabile

$$X_3 = (1+n)\,\chi'\, p'_3 + \left[(1+n)\frac{\varpi'}{\varpi} + m\right]\,(x'^1 p'_1 + x'^2 p'_2).$$

Putem să ne folosim de funcțiile ϖ și χ pentru a avea

$$X_3 = p'_3$$

ceea ce revine a lua aceste funcții ca integrale ale ecuațiilor

$$(1+n)\,\chi' = 1 \quad , \qquad (1+n)\frac{\varpi'}{\varpi} + m = 0.$$

Vom considera de la început

$$X_3 = p_3. \tag{17}$$

Din celelalte ecuații de structură (16'), (16'') rezultă expresiile operatorilor X_1 și X_2

$$X_1 = p_1 - \rho x^2\, p_3, \qquad X_2 = p_2 + \rho x^1\, p_3. \tag{17'}$$

Scriind ecuațiile (8) pentru transformările $X_1, \ldots, X_6$ vom găsi că spațiul A_3 corespunzător are toate componentele conexiunii nule afară de

$$\Gamma^3_{12} = \alpha + \beta, \qquad \Gamma^3_{21} = \alpha - \beta.$$

Dacă $\beta = 0$ spațiul este euclidian, iar în caz contrar spațiul are torsiune și grupul de automorfisme posedă nouă parametri [7].

2°. $\rho = 0$. Putem satisface la structura respectivă luînd

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = p_3 + \lambda U. \tag{17''}$$

Procedînd ca mai sus găsim conexiunea spațiului A_3 corespunzător acestui grup, componentele nenule sînt

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \frac{\alpha+\beta}{1+\lambda x^3}, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = \frac{\alpha-\beta}{1+\lambda x^3},$$
$$\Gamma^3_{12} = -\Gamma^3_{21} = \frac{\eta}{1+\lambda x^3}, \quad \Gamma^3_{33} = \frac{2\alpha}{1+\lambda x^3}. \tag{18}$$

Dacă $\eta = 0$ spațiul are un grup cu nouă parametri [9]. Vom presupune $\eta \neq 0$.

Componentele nenule ale tensorului de curbură sînt

$$\Gamma^1_{313} = \Gamma^2_{323} = -\Gamma^1_{331} = -\Gamma^2_{332} = \frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta-\lambda)}{(1+\lambda x^3)^2},$$
$$\Gamma^3_{123} = \Gamma^3_{231} = -\Gamma^3_{132} = -\Gamma^3_{213} = \frac{\eta(\alpha+\beta-\gamma-\lambda)}{(1+\lambda x^3)^2}, \tag{19}$$
$$\Gamma^3_{312} = -\Gamma^3_{321} = \frac{-2\eta(\alpha-\beta)}{(1+\lambda x^3)^2},$$

iar tensorul derivat al tensorului de curbură are următoarele componente nenule

$$\Gamma^1_{313,3} = \Gamma^2_{323,3} = -\Gamma^1_{331,3} = -\Gamma^2_{332,3} = \frac{2(\gamma-\lambda)(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta-\lambda)}{(1+\lambda x^3)^3},$$
$$\Gamma^3_{123,3} = \Gamma^3_{231,3} = -\Gamma^3_{132,3} = -\Gamma^3_{213,3} = \frac{2\eta(\alpha+\beta-\lambda)(\alpha+\beta-\gamma-\lambda)}{(1+\lambda x^3)^3}, \tag{19'}$$
$$\Gamma^3_{312,3} = -\Gamma^3_{321,3} = \frac{-4\eta(\alpha+\beta-\lambda)(\alpha-\beta)}{(1+\lambda x^3)^3}.$$

Tensorul de torsiune și tensorul său derivat au următoarele componente diferite de zero

$$T^1_{13} = T^2_{23} = -T^1_{31} = -T^2_{32} = \frac{2\beta}{1+\lambda x^3},$$
$$T^3_{12} = -T^3_{21} = \frac{2\eta}{1+\lambda x^3},$$
$$T^1_{13,3} = T^2_{23,3} = -T^1_{31,3} = -T^2_{32,3} = \frac{2\beta(\gamma-\lambda)}{(1+\lambda x^3)^3}, \tag{19''}$$
$$T^3_{12,3} = -T^3_{21,3} = \frac{2\eta(2(\alpha+\beta)-\gamma-\lambda)}{(1+\lambda x^3)^2}.$$

Se vede că dacă avem $\gamma = \lambda$, $\alpha + \beta = \lambda$ tensorul derivat al tensorului de torsiune și tensorul derivat al tensorului de curbură sînt nuli, prin urmare avem un spațiu simetric în sensul lui Rașevski [13]. Tensorii contractați ai tensorului de curbură

$$\Gamma_{jl} = \Gamma^i_{jil}, \quad P_{jl} = \Gamma^i_{ijl} \tag{20}$$

au următoarele componente nenule

$$\Gamma_{33} = \frac{2(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta-\lambda)}{(1+\lambda x^3)^2}, \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \frac{\eta(\alpha-\beta-\gamma-\lambda)}{(1+\lambda x^3)^2}, \tag{20'}$$

$$P_{12} = -P_{21} = -\frac{2\eta(\alpha-\beta)}{(1+\lambda x^3)^2}.$$

Din legea de transformare a tensorului P_{jl}

$$\overline{P}_{rs}\, u^r_j\, u^j_l = P_{jl}, \tag{21}$$

unde am pus $u^r_j = \frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^j}$, avem, dacă dăm indicilor j, l pe rînd valorile 3, 1; 3, 2; 1, 2,

$$\begin{gathered} u^1_1\, u^2_3 - u^2_1\, u^1_3 = 0, \quad u^1_2\, u^2_3 - u^2_2\, u^1_3 = 0, \\ u^1_1\, u^2_2 - u^1_2\, u^2_1 = \frac{1+\lambda\overline{x}^3}{1+\lambda x^3}. \end{gathered} \tag{22}$$

Primele două ecuații (22) constituie un sistem liniar omogen în necunoscutele u^1_3 și u^2_3. Determinantul acestui sistem este diferit de zero după cum ne arată a treia ecuație (22); avem deci

$$u^1_3 = u^2_3 = 0. \tag{22'}$$

Din legea de transformare a tensorului Γ_{jk}.

$$\overline{\Gamma}_{rs}\, u^r_j\, u^s_k = \Gamma_{jk} \tag{21'}$$

rezultă, pentru $j = 1$, $k = 3$; $j = 2$, $k = 3$; $j = k = 3$,

$$u^3_1 = u^3_3 = 0, \qquad u^3_3 = \frac{1+\lambda\overline{x}^3}{1+\lambda x^3}. \tag{22''}$$

Din relațiile (22'), (22'') rezultă că ecuațiile grupului de mișcări ale spațiului sînt de forma

$$\overline{x}^1 = \overline{x}^1(x^1, x^2); \quad \overline{x}^2 = \overline{x}^2(x^1, x^2); \quad \overline{x}^3 = \frac{x^3 + a^3}{1-\lambda a^3}. \tag{23}$$

Din legea de transformare a conexiunii

$$\frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^i\, \partial x^k} = \overline{\Gamma}^i_{rs}\, u^r_j\, u^s_k - \Gamma^r_{jk}\, u^i_r \tag{24}$$

obținem, pentru $i, j, k = 1,2$,

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^h}{\partial x^i \partial x^k} = 0 \qquad (h, j = 1,2)$$

și ținînd seama de aceste relații ecuațiile (23) devin

$$\bar{x}^1 = a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + a^1, \quad \bar{x}^2 = a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + a^2, \bar{x}^3 = \frac{x^3 + a^3}{1 - \lambda a^3} \qquad (23')$$

constantele a_i^j fiind legate conform ultimei ecuații (22) prin relația

$$a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 = \frac{1}{1 - \lambda a^3} \cdot \qquad (22''')$$

Grupul conține deci șase parametri. Rezultă

Teorema 1. *Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale (III), $x^1 p_2$; $x^2 p_1$; $x^1 p_1 - x^2 p_2$, sînt sau spații cu grup maxim, G_9, sau spațiile cu torsiune avînd conexiunea* (18) *și grupul de mișcări cu șase parametri avînd ecuațiile* (23'), (22''').

§ 2. Spațiile A_3 cu grupul de stabilitate G_3 date de transformările infinitezimale (IV)

Avem

$$X_4 = x^3 p_1, \quad X_5 = x^3 p_2, \quad X_6 = x^1 p_2.$$

Ecuațiile de structură ale grupului de stabilitate se vor scrie

$$(X_4 X_5) = 0, \quad (X_4 X_6) = X_5, \quad (X_5 X_6) = 0, \qquad (25)$$

iar expresiile parantezelor $(X_i X_\alpha)$, $(X_i X_j)$ sînt

$$\begin{aligned}
&(X_1 X_4) = c_{14}^\alpha X_\alpha, \quad (X_1 X_5) = c_{15}^\alpha X_\alpha, (X_1 X_6) = X_2 + c_{16}^\alpha X_\alpha,\\
&(X_2 X_4) = c_{24}^\alpha X_\alpha, \quad (X_2 X_5) = c_{25}^\alpha X_\alpha, \quad (X_2 X_6) = c_{26}^\alpha X_\alpha, \qquad (26)\\
&(X_3 X_4) = X_1 + c_{34}^\alpha X_\alpha, \quad (X_3 X_5) = X_2 + c_{35}^\alpha X_\alpha, \quad (X_3 X_6) = c_{36}^\alpha X_\alpha,\\
&(X_j X_k) = c_{jk}^1 X_s + c_{jk}^\alpha X_\alpha .
\end{aligned}$$

Dacă facem schimbarea de operatori

$$\begin{aligned}
\overline{X}_1 &= X_1 + c_{34}^4 X_4 + {}_1 X_5 + c_{34}^6 X_6,\\
\overline{X}_2 &= X_2 + c_{35}^4 X_4 + (c_{34}^4 + {}_1^4) X_5 + c_{35}^6 X_6 \qquad (27)\\
\overline{X}_3 &= X_3 - c_{36}^3 X_4 + (c_{34}^5 - b_1) X_6,
\end{aligned}$$

avem

$$\begin{aligned}
&(X_3 X_4) = X_1, \quad (X_1 X_6) = X_2 + {}^4 X_4 + c_{16}^6 X_6,\\
&(X_3 X_5) = X_2 + \eta X_5, \quad (X_3 X_6) = c_{36}^4 X_4 + c_{36}^6 X_6. \qquad (26')
\end{aligned}$$

Mai dispunem de o transformare de operatori de forma

$$X_1 = X_1 + a\,X_5, \quad X_2 = X_2, \quad X_3 = X_3 + b\,X_5 - a\,X_6. \tag{27'}$$

Identitățile $(X_3X_4X_6)=0, (X_3X_5X_6) = 0, (X_3X_4X_5)=0, (X_1X_6X_5)=0, (X_1X_4X_6) = 0$ ne dau

$$(X_1\,X_4) = 2\rho\,X_4 + c_{14}^5\,X_5 + c_{14}^6\,X_6, (X_1X_5)= \rho X_5, (X_1X_6)=X_2,$$

$$(X_2X_4) = \rho X_5, \qquad (X_2\,X_5) = 0, \quad (X_2X_6) = 0, \tag{26''}$$

$$(X_3\,X_4) = X_1, \quad (X_3\,X_5) = X_2+\eta\,X_5, \quad (X_3\,X_6) = c_{36}^4\,X_4 + \eta X_6.$$

Ținînd seama de aceste expresii identitățile $(X_1X_2X_\alpha) = 0$ se scriu

$$[(X_1X_2)\,X_6]= 0, \quad [(X_1X_2)\,X_5] = 0, \quad [X_1X_2)\,X_4] + \rho^2\,X_5 = 0$$

și ne dau

$$(X_1\,X_2) = c_{12}^2\,X_2 + c_{12}^5\,X_5 + \rho\,(\rho + c_{12}^2)\,X_6. \tag{28}$$

Tot așa identitățile $(X_2X_3X_\alpha) = 0$ se scriu

$$[(X_2X_3)\,X_6] - \rho\,c_{36}^4\,X_5 = 0$$

$$[X_2\,X_3)\,X_5] \qquad\qquad = 0$$

$$[(X_2\,X_3)\,X_4] + (X_1\,X_2) + \rho\,X_2 = 0$$

și ne dau

$$(X_1\,X_2) = -\,\rho\,X_2 + c_{12}^5\,X_5,$$

$$(X_2\,X_3) = c_{23}^2\,X_2 + \rho\,c_{36}^4\,X_4 + c_{23}^5\,X_5 + (c_{12}^5 + \rho\,c_{23}^2)\,X_6. \tag{28'}$$

Identitatea $(X_1X_3X_4) = 0$ se scrie

$$[(X_1\,X_3)\,X_4] + 2\rho\,X_1 + c_{14}^5\,X_2 + c_{14}^6\,(c_{36}^4\,X_4 - \eta\,X_6) = 0$$

și ne dă

$$\begin{aligned} &c_{14}^5 = 0, \quad c_{13}^3 = -\,2\,\rho, \quad 2\,\rho\,c_{13}^1 + c_{14}^6\,c_{36}^4 = 0, \\ &c_{13}^6 = \rho\,c_{13}^2, \qquad\qquad c_{13}^1\,c_{14}^6 - \eta\,c_{14}^6 = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Avem deci

$$(X_1\,X_3) = c_{13}^1\,X_1 + c_{13}^2\,X_2 - 2\rho\,X_3 + c_{13}^4\,X_4 + c_{13}^5\,X_5 + \rho\,c_{13}^2\,X_6. \tag{28''}$$

1°. Presupunem mai întîi $\rho = 0$. Formulele (28'), (28'') și relațiile (29) devin

$$(X_1\,X_2) = c_{12}^5\,X_5,$$

$$(X_2\,X_3) = c_{23}^2\,X_2 + c_{23}^5\,X_5 + c_{12}^5\,X_6, \tag{28'''}$$

$$(X_1 X_3) = c_{13}^1 X_1 + c_{13}^2 X_2 + c_{13}^4 X_4 + c_{13}^5 X_5,$$

$$c_{36}^4 \; c_{14}^6 = 0, \quad (c_{14}^6 (c_{13}^1 - \eta) = 0.$$

Făcînd o schimbare de operatori de forma (27′) cu $a = \frac{1}{2} c_{13}^2$, $b = 0$ putem anula pe c_{13}^2.

Identitățile $(X_1 X_3 X_5) = 0$, $(X_1 X_3 X_6) = 0$ se scriu

$$[(X_1 X_3) X_5] - (X_1 X_2) = 0$$

$$[(X_2 X_3) X_6] - \eta X_2 - (X_2 X_3) = 0$$

și ne dau

$$c_{13}^4 = c_{23}^5, \; c_{13}^1 = \eta + c_{23}^2, \; c_{12}^5 = 0. \tag{29′}$$

Structura grupului G_6 este dată de ecuațiile (25) și ecuațiile

$$\begin{aligned} &(X_1 X_4) = c_{14}^6 X_6, \quad (X_1 X_5) = 0, \quad (X_1 X_6) = X_2, \\ &(X_2 X_4) = 0, \quad (X_2 X_5) = 0, \quad (X_2 X_6) = 0, \\ &(X_3 X_4) = X_1, \quad (X_3 X_5) = X_2 + \eta X_5, \quad (X_3 X_6) = c_{36}^4 X_4 + \eta X_6, \\ &(X_1 X_2) = 0, \quad (X_2 X_3) = (\lambda - \eta) X_2 + \mu X_5, \; X_1 X_3 = \lambda X_1 + \mu X_4 + \nu X_5. \end{aligned} \tag{30}$$

Se arată că dacă avem $c_{36}^4 \neq 0$, $c_{14}^6 \neq 0$ grupul considerat nu poate fi grupul de mișcări al unui spațiu A_3.

Presupunem deci $c_{14}^6 = c_{36}^4 = 0$. Putem satisface la structura găsită luînd

$$\begin{aligned} X_1 = p_1 + x^3 A p_2, \; X_2 = p_2, \; X_3 = p_3 + (\lambda + \mu x^3) U - \\ - (\eta x^2 + x^1 A) p_2, \end{aligned} \tag{31}$$

unde A este o integrală olomorfă în origine a ecuației

$$\left((1 + \lambda x^3 + \mu (x^3)^2 A' + \frac{2}{x^3} + \eta \right) A + \nu = 0.$$

Scriind ecuațiile (8) pentru toate transformările grupului regăsim conexiunea unor spații cu un grup de mișcări cu șapte parametri ([1]*)).

2°. Presupunem acum $\rho \neq 0$ și vom lua $\rho = 1$. Făcînd o schimbare de operatori de forma (27′) cu $a = \frac{c_{13}^2}{2}$, $b = c_{13}^2 \frac{c_{13}^1}{4} - \frac{c_{13}^5}{2}$ obținem

*) Formulele (5.15)

$$(X_1 X_3) = c_{13}^1 X_1 - 2 X_3 + c_{13}^4 X_4.$$

Identitatea $(X_1 X_3 X_6) = 0$ se scrie

$$[(X_1 X_3) X_6] - c_{36}^4 (2X_4 + c_{14}^6 X_6) - \eta X_2 - (X_2 X_3) = 0$$

și ne dă

$$c_{13}^1 = c_{23}^2 + \eta, \qquad c_{36}^4 = 0 \tag{29''}$$

$$2\eta = c_{12}^5 + c_{23}^2$$

și ținînd seama de relațiile (29) avem

$$c_{13}^1 = 0, \quad \eta = c_{23}^2, \quad \eta = c_{12}^5,$$

Expresiile parantezelor $(X_i X_j)$ vor fi deci

$$\begin{aligned} (X_1 X_2) &= - X_2 + \eta X_5, \\ (X_2 X_3) &= \eta X_2 + c_{23}^5 X_5 + 2\eta X_6, \\ (X_1 X_3) &= - 2 X_3 + c_{23}^5 X_4. \end{aligned} \tag{28^{IV}}$$

Identitatea $(X_1 X_3 X_5) = 0$ se scrie

$$[(X_1 X_3) X_5] - (X_1 X_2) + X_2 = 0$$

și ne dă $\eta = 0$

În sfîrșit, identitatea $(X_1 X_2 X_3) = 0$ ne dă $c_{23}^5 = 0$. Se arată că dacă $c_{14}^6 \neq 0$, structura respectivă nu poate fi structura unui grup de mișcări a unui spațiu A_3. Avem deci

$$\begin{aligned} &(X_1 X_4) = 2 X_4, \ (X_1 X_5) = X_5, \ (X_1 X_6) = X_2, \ (X_1 X_2) = - X_2, \\ &(X_2 X_4) = X_5, \quad (X_2 X_5) = 0, \quad (X_2 X_6) = 0, \quad (X_2 X_3) = 0, \\ &(X_3 X_4) = X_2, \quad (X_3 X_5) = X_2, \ (X_3 X_6) = 0, \ (X_1 X_3) = -2 X_3, \end{aligned} \tag{32}$$

și integrînd aceste ecuații obținem

$$X_1 = p_1 - x^1 p_1 + x^3 p_3, \quad X_2 = p_2 - x^1 p_2, \ X_3 = p_3 - x^1 p_3.$$

Componentele conexiunii spațiului A_3 corespunzător sînt

$$\Gamma_{11}^1 = 2\alpha x^3, \ \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = (\alpha + \beta)(1 - x^1), \ \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{32}^2 = (\alpha - \beta)(1 - x^1),$$

$$\Gamma_{33}^3 = 2\alpha (1 - x^1), \ \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{31}^3 = (\alpha + \beta) x^3, \ \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{12}^2 = (\alpha - \beta) x^3,$$

$$\Gamma_{11}^2 = \gamma (x^3)^2, \ \Gamma_{33}^2 = \gamma (1 - x^1)^2, \ \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = \gamma x^3 (1 - x^1). \tag{33}$$

Dacă spațiul este fără torsiune ($\beta = 0$), componentele Γ^1_{jk} și Γ^3_{jk} ale conexiunii se pot scrie sub forma

$$\Gamma^h_{jk} = \delta^h_j \varphi_k + \delta^h_k \varphi_j, \qquad (h = 1, 3), \tag{33'}$$

unde

$$\varphi_1 = x^3, \ \varphi_2 = 0, \ \varphi_3 = 1 - x^1 \quad \text{(am luat } \alpha = 1) \tag{33''}$$

Avem deci un spațiu al lui Kagan o dată proiectiv. Transformările de coordonate care păstrează forma canonică (33'), (33'') sînt de forma

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= a^1_1 x^1 + a^1_3 x^3 + a^1, \\ \bar{x}^2 &= \bar{x}^2 (x^1, x^2, x^3), \\ \bar{x}_3 &= a^3_1 x^1 + a^3_3 x^3 + a^3. \end{aligned} \tag{34}$$

Din legea de transformare a vectorului φ_k

$$\bar{\varphi}_k u^k_j = \varphi_j$$

avem

$$\begin{aligned} a^1_1 \bar{x}^3 + a^3_1 (1 - \bar{x}^1) &= x^3 \\ a^1_3 \bar{x}^3 + a^3_3 (1 - \bar{x}^1) &= 1 - x^1 \end{aligned}$$

și rezultă

$$\begin{aligned} \Delta = a^1_1 a^3_3 - a^1_3 a^3_1 &= 1 \\ a^3 a^1_1 + a^3_1 (1 - a^1) &= 0 \\ a^3 a^1_3 + a^3_3 (1 - a^1) &= 1 \end{aligned} \tag{35}$$

și din aceste ecuații obținem

$$a^3_1 = - a^3, \qquad a^1_1 = 1 - a^1.$$

Ecuațiile (34) devin

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= (1 - a^1) x^1 + a^1_3 x^3 + a^1 \\ \bar{x}^2 &= \bar{x}^2 \ (x^1, x^2, x^3) \\ \bar{x}^3 &= - a^3 x^1 + a^3_3 x^3 + a^3 \end{aligned} \tag{34'}$$

între coeficienții a^i și a^j_i existînd relația

$$(1 - a^1) a^3_3 + a^3 a^1_3 = 1. \tag{34''}$$

Componentele nenule ale tensorului de curbură sînt

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{113} = \Gamma^3_{313} = -\Gamma^1_{131} = -\Gamma^3_{331} = 3 + x^3(1 - x_1),\\
&\Gamma^3_{131} = \Gamma^2_{121} = -\Gamma^3_{113} = -\Gamma^2_{112} = (x^3)^2,\\
&\Gamma^1_{313} = \Gamma^2_{323} = -\Gamma^1_{331} = -\Gamma^2_{332} = (1 - x^1)^2,\\
&\Gamma^2_{123} = -\Gamma^2_{132} = 1 + x^3(1 - x^1),\\
&\Gamma^2_{321} = -\Gamma^2_{312} = -1 + x^3(1 - x^1),\\
&\Gamma^2_{213} = -\Gamma^2_{231} = 2.
\end{aligned} \tag{36}$$

Din ecuațiile

$$\Gamma^i_{rst}\, u^r_j\, u^s_k\, u^t_l - \Gamma^r_{jkl}\, u^i_r = 0 \tag{37}$$

avem, dacă dăm indicilor valorile $i = 2$, $j = k = 1$, $l = 3$,

$$\begin{aligned}
&\overline{\Gamma}^2_{113}(1 - a^1) - \overline{\Gamma}^2_{313}\, a^3 - \Gamma^2_{113}\, u^2_2 +\\
&+ [\overline{\Gamma}^2_{332}\, a^3 a^3_3 - \overline{\Gamma}^2_{112}(1 - a^1)\, a^1_3 + \overline{\Gamma}^2_{123}(1 - a^1)\, a^3_3 - \overline{\Gamma}^2_{321}\, a^3 a^1_3 +\\
&\qquad + \overline{\Gamma}^2_{213} - \Gamma^1_{113}]\, u^2_1 +\\
&+ [\overline{\Gamma}^2_{332}(a^3)^2 + \overline{\Gamma}^2_{212}(1 - a^1)^2 + (\overline{\Gamma}^2_{123} + \overline{\Gamma}^2_{321})\, a^3(1 - a^1) -\\
&\qquad - \Gamma^3_{113}]\, u^2_3 = 0.
\end{aligned}$$

Făcînd calculele se vede că parantezele mari sînt nule și prin urmare avem

$$\bar{x}^3(1 - a^1) - (1 - \bar{x}^1)\, a^3 = x^3 \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}$$

dar din ecuațiile (34′) rezultă

$$\bar{x}^3(1 - a^1) - (1 - \bar{x}^1)\, a^3 = x^3$$

și deci avem

$$\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} = 1.$$

Ecuațiile (34′) devin

$$\begin{aligned}
&\bar{x}^1 = (1 - a^1)\, x^1 + a^1_3\, x^3 + a^1,\\
&\bar{x}^2 = x^2 + \Psi(x^1, x^3),\\
&\bar{x}^3 = -a^3 x^1 + a^3_3\, x^3 + a^3.
\end{aligned} \tag{34‴}$$

Din ecuațiile (8) avem

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^j\, \partial x^k} = 0, \qquad (k,\ j = 1,\ 3)$$

și ecuațiile grupului de mișcări capătă forma definitivă

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= (1 - a^1)\, x^1 + a_3^1\, x^3 + a^1 \\ \bar{x}^2 &= x^2 + a_1^2\, x^1 + a_3^2\, x^3 + a^2 \\ \bar{x}^3 &= -\, a^3\, x^1 + a_3^3\, x^3 + a^3 \end{aligned} \qquad (34^{IV})$$

avînd $(1 - a^1)\, a_3^3 + a^3\, a_3^1 = 1$. După cum se vede grupul are șase parametri.

Grupul de stabilitate al originei se obține din ecuațiile (34′′′) făcînd $a^1 = a^2 = a^3 = 0$ și ecuațiile lui sînt

$$\bar{x}^1 = x^1 + a_3^1\, x^3, \quad \bar{x}^2 = x^2 + a_1^2\, x^1 + a_3^2\, x^3, \quad \bar{x}^3 = x^3$$

deci tocmai grupul de la ale cărui transformări infinitezimale am plecat.

Și în cazul cînd are torsiune ($\beta \neq 0$), grupul de mișcări este același, deoarece tensorul de torsiune nu introduce condiții noi. Dacă $\alpha = 0$ ne putem folosi în loc de vectorul φ_k de vectorul de torsiune $T_k = T_{ik}^i$ și calculele sînt asemănătoare celor făcute mai sus.

Putem enunța

T e o r e m a 2. *Spațiile A_3 avînd grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale $x^3 p_1$, $x^3 p_2$, $x^1 p_2$ sînt sau spații care au un grup de mișcări cu șapte parametri, sau spațiile cu conexiunea* (33) *și grupul de mișcări* (34′′′) *care are șase parametri.*

§ 3. Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate G_3 dat de transformările infinitezimale

$$X_4 = x^3 p_2, \; X_5 = x^3 p_1 + x^1 p_2, \; X_6 = x^1 p_1 + 2x^2\, p_2$$

Ecuațiile de structură ale grupului de stabilitate se scriu

$$(X_4\, X_5) = 0, \quad (X_4\, X_6) = 2X_4, \quad (X_5\, X_6) = X_5. \qquad (38)$$

Alegînd convenabil operatorii principali X_i și considerînd identitățile $(X_i\, X_\alpha\, X_\beta) = 0$, $(X_i\, X_j\, X_\alpha) = 0$, celelalte ecuații de structură ale grupului de mișcări ale spațiului se vor scrie

$$\begin{aligned} &(X_1\, X_4) = 0, \quad (X_1\, X_5) = X_2, \quad (X_1 X_6) = X_1, \\ &(X_2\, X_4) = 0, \quad (X_2\, X_5) = 0, \quad (X_2 X_6) = 2X_2, \\ &(X_3\, X_4) = X_2, \quad (X_3\, X_5) = X_1, \quad (X_3 X_6) = 0, \\ &(X_1\, X_2) = 0, \quad (X_2\, X_3) = \lambda\, X_2, \quad (X_1 X_3) = \lambda\, X_1 + \rho\, X_5. \end{aligned} \qquad (38')$$

Putem satisface la această structură luînd

$$X_1 = p_1 + (x^3)^2\, A\, p_1 + x^1\, x^3\, A\, p_2, \; X_2 = p_2,$$

$$X_3 = p_3 + (\lambda\, x^1 - x^1\, x^3\, A)\, p_1 + (\lambda x^2 - (x^1)^2\, A)\, p_2 + \lambda\, x^3\, p_3,$$

unde A este integrala olomorfă în origine a ecuației Riccati

$$(1 + \lambda x^3) A' + x^3 A^2 + \left(\frac{3}{x^3} + 2\lambda\right) A + \frac{\rho}{x^3} = 0. \tag{39}$$

Făcînd transformarea Darboux

$$u = x^3 e^{\int \frac{x^3}{1 + \lambda x^3} A \, dx^3} \tag{D}$$

ecuația (39) devine

$$(1 + \lambda x^3)^2 u'' + \rho u = 0. \tag{39'}$$

Integrarea ecuației (39) se reduce deci la integrarea ecuației liniare (39'). Componentele nenule ale conexiunii spațiului A_3 corespunzător sînt

$$\Gamma^1_{13} = - x^3 A + \frac{\lambda \int x^3 A \, dx^3 + \alpha + \beta}{1 + \lambda x^3},$$

$$\Gamma^1_{31} = - x^3 A + \frac{\lambda \int x^3 A \, dx^3 + \alpha - \beta}{1 + \lambda x^3},$$

$$\Gamma^2_{23} = \frac{\alpha + \beta}{1 + \lambda x^3}, \quad \Gamma^2_{32} = \frac{\alpha - \beta}{1 + \lambda x^3}, \quad \Gamma^3_{33} = \frac{2\alpha}{1 + \lambda x^3},$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{x^3 (2A + x^3 A') - \frac{\lambda}{1 + \lambda x^3} \int x^3 A \, dx^3}{(x^3)^2 (A + x^3 A') - 1}, \tag{40}$$

$$\Gamma^2_{13} = - \frac{x^1}{x^3} (\Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{11} - \Gamma^1_{13}),$$

$$\Gamma^2_{31} = - \frac{x^1}{x^3} (\Gamma^2_{32} + \Gamma^2_{11} - \Gamma^1_{31}),$$

$$\Gamma^1_{33} = 2x^1 A - 2 \frac{x^1}{x^3} \frac{\lambda \int x^3 A \, dx^3}{1 + \lambda x^3},$$

$$\Gamma^2_{33} = - \frac{x^1}{2x^3} (\Gamma^2_{13} + \Gamma^2_{31} - \Gamma^1_{33}).$$

Putem enunța

Teorema 3. *Spațiile A^3 cu grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale $x^3 p_2$, $x^3 p_1 + x^1 p_2$, $x^1 p_1 + 2x^2 p_2$ au conexiunea dată de formulele* (40) *și posedă un grup de mișcări cu șase parametri.*

§ 4. Spațiile A_3 cu grupul de stabilitate G_3 dat de transformările infinitezimale $X_4 = x^3 p_2$, $X_5 = x^1 p_1 - x^3 p_3$, $X_6 = x^2 p_2$

Avem

$$(X_4 X_5) = 0, \quad (X_4 X_6) = X_4, \quad (X_5 X_6) = 0. \tag{41}$$

Alegînd convenabil operatorii principali X_i și considerînd identitățile $(X_i X_\alpha X_\beta) = 0$, $(X_i X_j X_\alpha) = 0$, celelalte ecuații de structură ale grupului de mișcări al spațiului se vor scrie

$$\begin{aligned} &(X_1 X_4) = 0, \quad (X_1 X_5) = X_1, \quad (X_1 X_6) = 0, \quad (X_1 X_2) = \rho X_4, \\ &(X_2 X_4) = 0, \quad (X_2 X_5) = 0, \quad (X_2 X_6) = X_2, \quad (X_2 X_3) = 0, \\ &(X_3 X_4) = X_2, \quad (X_3 X_5) = X_3, \quad (X_3 X_6) = 0, \quad (X_1 X_3) = -2\rho X_5. \end{aligned} \tag{42}$$

Putem satisface la această structură luînd

$$X_1 = p_1 + 2\rho x^1 x^3 p_1 - \rho x^2 x^3 p_2 - \rho (x^3)^2 p_3, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = p_3. \tag{43}$$

Componentele nenule ale conexiunii spațiului A_3 corespunzător sînt

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = 2\rho x^1, \quad \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = -\rho x^1, \\ &\Gamma^1_{33} = -4\rho^2 (x^1)^3, \quad \Gamma^3_{33} = -2\rho x^1. \end{aligned} \tag{44}$$

Dacă $\rho = 0$ spațiul este local euclidian; vom presupune deci $\rho \neq 0$. Spațiul este fără torsiune, iar tensorul de curbură are următoarele componente diferite de zero

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{131} = \Gamma^3_{313} = -\Gamma^1_{113} = -\Gamma^3_{331} = 2\rho, \\ &\Gamma^2_{213} = \Gamma^2_{312} = -\Gamma^2_{231} = -\Gamma^2_{321} = \rho, \\ &\Gamma^1_{313} = -\Gamma^1_{331} = 4\rho^2 (x^1)^2. \end{aligned} \tag{45}$$

Făcînd calculele se constată că tensorul derivat al tensorului de curbură are toate componentele nule, prin urmare spațiul este un spațiu simetric în sensul lui Cartan. În cazul considerat spațiul este complet determinat. Tensorii contractați ai tensorului de curbură (20) au următoarele componente nenule

$$P_{13} = -P_{31} = \rho, \quad \Gamma_{13} = -2\rho, \quad \Gamma_{31} = -3\rho, \quad \Gamma_{33} = 4\rho^2 (x^1)^2. \tag{46}$$

Spațiul nu este proiectiv euclidian deoarece tensorul de curbură al lui Weyl are componente diferite de zero spre exemplu $K^1_{131} = \frac{9\rho}{8}$. Pentru a determina grupul de automorfisme al spațiului să considerăm mai întîi ecuațiile (21). Dînd indicilor j, l pe rînd valorile 1,2 ; 2,3 ; 1,3 rezultă

$$u^3_2 = u^1_2 = 0, \quad u^1_1 u^3_3 - u^1_3 u^3_1 = 1. \tag{47}$$

Să considerăm acum ecuațiile (21′) din care, dînd indicilor j, k pe rînd valorile 1,3 ; 3,1 ; 1,1 și ținînd seama de ecuațiile (47), rezultă

$$\begin{aligned} 5\,u_1^3 u_3^1 &= 4\rho(x^1)^2\, u_1^3 u_3^3, \\ 5\,u_1^3 u_1^1 &= 4\rho(x^1)^2 (u_1^3)^2. \end{aligned} \tag{47′}$$

Aceste relații sînt verificate numai dacă avem

$$u_1^3 = 0 \tag{47″}$$

Să considerăm acum și ecuațiile (24).
Dînd mai întîi indicilor i, j, k valoarea 1, și ținînd seama de condițiile (47), (47″), avem

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^1}{\partial x^1 \partial x^1} = 0$$

și rezultă

$$\bar{x}^1 = 2\rho x^1 \psi(x^3) + \chi(x^3). \tag{48}$$

Făcînd acum în formulele (24) $i = j = 1$, $k = 3$, avem $\psi' = \chi$ și formula (48) devine

$$\bar{x}^1 = 2\rho x^1 \psi(x^3) + \psi'(x^3), \tag{48′}$$

iar ultima condiție (47) se scrie, dacă ținem seama de formula (47‴),

$$\frac{d\bar{x}^3}{dx^3} = \frac{1}{2\rho\psi(x^3)}. \tag{47‴}$$

Dînd indicilor i, j, k valorile 1, 3, 3 avem

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^1}{\partial x^3 \partial x^3} = \left(\bar{\Gamma}_{13}^1 + \bar{\Gamma}_{31}^1\right) \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} + \bar{\Gamma}_{33}^1 \left(\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3}\right)^2 - \Gamma_{33}^1 \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} - \Gamma_{33}^3 \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3}$$

și ținînd seama de ecuațiile (48′), (47‴), obținem

$$x^1 \left(2\psi'' - \frac{\psi'^2}{\psi}\right) + \psi''' - 2\frac{\psi'\psi''}{\psi} - \frac{\psi'^3}{\psi^2} = 0 \tag{49}$$

de unde rezultă

$$2\psi'' - \frac{\psi'^2}{\psi} = 0, \quad \psi''' - 2\frac{\psi'\psi''}{\psi} - \frac{\psi'^3}{\psi^2} = 0. \tag{49′}$$

Se poate arăta prin calcule simple că a doua ecuație (49′) este o consecință diferențială a celei dintîi. Integrînd prima ecuație (49′) avem

$$\psi = (ax^3 + b)^2, \tag{49″}$$

unde a și b sînt constante. Ecuațiile (48′) devin

$$\bar{x}^1 = 2\rho x^1 (ax^3 + b)^2 + 2a^2 x^3 + 2ab, \tag{48″}$$

iar integrînd ecuația (47'''), obținem

$$\bar{x}^3 = \frac{(a\alpha + 1)\, x^3 + \alpha b}{2\rho b\,(ax^3 + b)}. \tag{48'''}$$

Revenind la ecuațiile (24) și dînd indicilor i, j, k valorile 2, 1, 1; 2, 1, 2; 2, 2, 2 rezultă

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^2}{\partial x^1 \partial x^1} = \frac{\partial^2 \bar{x}^2}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{x}^2}{\partial x^2 \partial x^2} = 0.$$

Prin urmare avem

$$\bar{x}^2 = x^1 \theta(x^3) + x^2 \lambda(x^3) + \nu(x^3). \tag{48^{IV}}$$

Făcînd $i = 2$, $j = 1$, $k = 3$ avem

$$\theta' = - x^1 \frac{\theta}{2\,(ax^3 + b)^2}$$

ecuație care impune condiția $\theta = 0$. În sfîrșit, făcînd

$i = j = 2$, $k = 3$; $i = 2$, $j = k = 3$ obținem

$$\lambda = \frac{a_2^2}{a\,x^3 + b}, \qquad \nu = \frac{a_3^2 x^3 + a^2}{ax^3 + b}.$$

Deci ecuațiile grupului de mișcări sînt

$$\bar{x}^1 = 2\,(ax^3 + b)\,[\rho x^1 (ax^3 + b) + a],$$

$$\bar{x}^2 = \frac{a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3 + a^2}{ax^3 + b}, \tag{50}$$

$$\bar{x}^3 = \frac{(a\alpha + 1)\, x^3 + \alpha b}{2\rho b\,(ax^3 + b)}.$$

În aceste ecuații intră șase constante arbitrare și anume a, b, α, a_2^2, a_3^2, a^2; prin urmare grupul este un G_6. Dacă $a = a^2 = \alpha = 0$ obținem ecuațiile grupului de stabilitate

$$\bar{x}^1 = 2b^2 \rho x^1, \quad \bar{x}^2 = \frac{1}{b}\left(a_2^2 x^2 + a_3^2 x^3\right), \quad \bar{x}^3 = \frac{1}{2\rho b^2} x^3 \tag{50'}$$

și se vede că transformările infinitezimale ale acestui grup sînt tocmai transformările de la care am plecat. Putem enunța

Teorema 4. *Spațiile A_3 cu grupul de stabilitate $x^3 p_2$, $x^1 p_1 - x^3 p_3$, $x^2 p_2$ sînt spațiile simetrice cu conexiunea* (44) *și au un grup de mișcări cu șase parametri ale cărui ecuații sînt date de formulele* (50).

În general, spațiile simetrice A_n $(n \geqslant 3)$ care au conexiunea dată de formulele

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 2\rho x^1,\ \Gamma^1_{22} = -4\rho^2 (x^1)^3,\ \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{hk} = 0,$$
$$\Gamma^h_{kl} = \delta^h_k \varphi_l + \delta^h_l \varphi_k,\ \varphi_k = -\rho x^1 \delta^2_k, \tag{51}$$
$$(h,\ k = 2, \ldots, n)$$

au un grup de mișcări cu $n^2 - 2n + 3$ parametri ale cărui ecuații sînt

$$\bar{x}^1 = 2(ax^2 + b)[\rho x^1 (ax^2 + b) + a],$$
$$\bar{x}^2 = \frac{(a\alpha + 1)x^2 + \alpha b}{2\rho b (ax^2 + b)}, \tag{50''}$$
$$\bar{x}^s = \frac{a^s_h x^h + a^s}{ax^2 + b}, \qquad (s = 3, \ldots, n;\ h = 2, \ldots, n)$$

§ 5. Spațiile A_3 cu grupul de stabilitate G_3 dat de transformările infinitezimale

$$X_4 = x^3 p_2,\ X_5 = x^1 p_2,\ X_6 = \frac{1}{2}(x^1 p_1 - x^3 p_3)$$

Avem

$$(X_4 X_5) = 0,\ (X_4 X_6) = \frac{1}{2} X_4,\ (X_5 X_6) = -\frac{1}{2} X_5. \tag{52}$$

Alegînd convenabil operatorii principali X_i și considerînd identitățile $(X_i X_\alpha X_\beta) = 0$, $(X_i X_j X_\alpha) = 0$ parantezele $(X_i X_\alpha)$, $(X_i X_j)$ se vor scrie

$$(X_1 X_4) = 0, \qquad (X_1 X_5) = X_2, \qquad (X_1 X_6) = \frac{1}{2} X_1 + \mu X_4, \tag{53}$$
$$(X_2 X_4) = 0, \qquad (X_2 X_5) = 0, \qquad (X_2 X_6) = 0,$$
$$(X_3 X_4) = X_2, \qquad (X_3 X_5) = 0, \qquad (X_3 X_6) = -\frac{1}{2} X_3 + \mu X_5,$$
$$(X_1 X_2) = -\rho X_4,\ (X_2 X_3) = \rho X_5,\ (X_1 X_3) = 2\rho X_6.$$

Putem satisface la această structură luînd

$$X_1 = p_1 + \rho x^3 U + 2\mu X_4,\ X_2 = p_2,\ X_3 = p_3 + \rho x^1 U + 2\mu X_5. \tag{54}$$

Operatorii transformărilor infinitezimale ale grupului G_6 se pot deci scrie

$$X_1 = p_1 + \rho x^3 U,\ X_2 = p_2,\ X_3 = p_3 + \rho x^1 U,$$
$$X_4 = x^3 p_2,\ X_5 = x^1 p_2,\ X_6 = x^1 p_1 - x^3 p_3. \tag{54'}$$

Conexiunea spațiului A_3 care admite acest grup drept grup de mișcări, satisface în primul rînd la condițiile

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^2} = 0$$

și ținînd seama de transformările X_4 și X_5 rezultă, din ecuațiile (8),

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^1_{33} = 0,\\
&\Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{22} = 0,\\
&\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23}\ ,\ \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32}\ ,\ \Gamma^3_{33} = \Gamma^1_{13} + \Gamma^1_{31}\ ,\\
&\Gamma^3_{13} = \Gamma^2_{12}\ ,\ \Gamma^3_{31} = \Gamma^2_{21}\ ,\ \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{21}\ .
\end{aligned}$$

De asemenea, după cum am arătat în [1]*) avem

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = \frac{\rho x^3}{1 + 2\rho x^1 x^3}\\
&\frac{1}{2}\,\Gamma^3_{33} = \Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \frac{\rho x^1}{1 + 2\rho x^1 x^3}
\end{aligned} \tag{55}$$

să determinăm acum funcțiile Γ^2_{11}, Γ^2_{13}, Γ^2_{31}, Γ^2_{33}.
Avem următoarele sisteme

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^1}(1 + \rho x^1 x^3) + \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^3}\rho (x^3)^2 + \rho x^3 \Gamma^2_{11} = 0,\\
&\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^1}\rho (x^1)^2 + \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^3}(1 + \rho x^1 x^3) + 3\rho x^1 \Gamma^2_{11} + \rho x^3 (\Gamma^2_{13} + \Gamma^2_{31}) = 0,\\
&x^1 \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^1} - x^3 \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial x^3} + 2\Gamma^2_{11} = 0,\\
&\frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^1}\rho (x^1)^2 + \frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^3}(1 + \rho x^1 x^3) + \rho x^1 \Gamma^2_{33} = 0,\\
&\frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^1}(1 + \rho x^1 x^3) + \frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^3}\rho (x^3)^2 + 3\rho x^3 \Gamma^2_{33} + \rho x^1 (\Gamma^2_{13} + \Gamma^2_{31}) = 0,\\
&\frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^1} x^1 - \frac{\partial \Gamma^2_{33}}{\partial x^3} x^3 - 2\Gamma^2_{33} = 0,\\
&\frac{\partial \Gamma^2_{13}}{\partial x^1}(1 + \rho x^1 x^3) + \frac{\partial \Gamma^2_{13}}{\partial x^3}\rho (x^3)^2 + \rho x^1 \Gamma^2_{11} + 2\rho x^3 \Gamma^2_{33} = 0,\\
&\frac{\partial \Gamma^2_{13}}{\partial x^1}\rho (x^1)^2 + \frac{\partial \Gamma^2_{13}}{\partial x^3}(1 + \rho x^1 x^3) + \rho x^3 \Gamma^2_{33} + 2\rho x^1 \Gamma^2_{13} = 0,\\
&\frac{\partial \Gamma^2_{13}}{\partial x^1} x^1 - \frac{\partial \Gamma^2_{13}}{\partial x^3} x^3 = 0,
\end{aligned} \tag{56}$$

*) p. 198.

și ecuații asemănătoare pentru Γ^2_{31}. Prin combinații simple obținem

$$\begin{aligned} &2(1+\rho x^1x^3)\Gamma^2_{11}+\rho(x^3)^2(\Gamma^2_{13}+\Gamma^2_{31})=0\\ &2(1+\rho x^1x^3)\Gamma^2_{33}+\rho(x^1)^2(\Gamma^2_{13}+\Gamma^2_{31})=0\\ &(x^1)^2\Gamma^2_{11}-(x^3)^2\Gamma^2_{33}=0 \end{aligned} \tag{56}$$

de unde rezultă

$$\Gamma^2_{11}=m\rho(x^3)^2,\ \Gamma^2_{33}=m\rho(x^1)^2,\ \Gamma^2_{13}+\Gamma^2_{31}=-2m(1+\rho x^1x^3), \tag{55'}$$

unde m este o funcție de x^1 și x^3. Ținînd seama de sistemele (56) avem

$$x^1\frac{\partial m}{\partial x^1}-x^3\frac{\partial m}{\partial x^3}=0,\ \frac{\partial m}{\partial x^1}(1+\rho x^1x^3)+\rho(x^3)^2\frac{\partial m}{\partial x^3}+3m\rho x^3=0. \tag{56''}$$

Din prima ecuație (56'') rezultă că m este funcție numai de variabila $u=x^1x^3$. Ținînd seama de aceasta în a doua ecuație (56'') avem

$$\frac{dm}{du}(1+2\rho u)+3\rho m=0 \tag{56'''}$$

și integrînd obținem

$$m=\frac{\alpha\rho}{(1+2\rho x^1x^3)^{3/2}},\qquad(\alpha=\text{const.}) \tag{55''}$$

Avem deci

$$\begin{aligned} &\Gamma^2_{11}=\frac{\rho^2\alpha(x^3)^2}{(1+2\rho x^1x^3)^{3/2}},\qquad \Gamma^2_{33}=\frac{\rho^2\alpha(x^1)^2}{(1+2\rho x^1x^3)^{3/2}},\\ &\Gamma^2_{13}=-\frac{\rho(1+\rho x^1x^3)}{(1+2\rho x^1x^3)^{3/2}}+n,\ \Gamma^2_{31}=-\frac{\rho(1+\rho x^1x^3)}{(1+2\rho x^1x^3)^{3/2}}-n, \end{aligned} \tag{55'''}$$

unde funcția n are expresia

$$n=\frac{\beta}{1+2\rho x^1x^3}. \tag{55^{IV}}$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$x'^1=x^1,\ x'^2=x^2-\alpha\sqrt{1+2\rho x^1x^3},\ x'^3=x^3$$

vom avea

$$\Gamma'^2_{11}=0,\ \Gamma'^2_{33}=0,\ \Gamma'^2_{13}=-\Gamma'^2_{31}=\frac{\beta}{1+2\rho x^1x^3}, \tag{55^{V}}$$

celelalte componente rămînînd neschimbate. Vom presupune deci de la început $\alpha=0$. Grupul de mișcări al acestui spațiu este un subgrup al grupului proiectiv în trei variabile care lasă invariantă cvadrica $1+2\rho x^1x^3=0$;

acest grup are șapte parametri și dacă $\beta = 0$ este grupul total de transformări în el însuși al spațiului [1]*). Dacă $\beta \neq 0$, spațiul are torsiune și singura componentă nenulă a tensorului de torsiune este

$$T^2_{13} = \frac{2\beta}{1 + 2\rho x^1 x^3}. \tag{57}$$

Legea de transformare a acestui tensor ne dă condiția

$$u^1_1 u^3_3 - u^1_3 u^3_1 = \frac{1 + 2\rho\overline{x^1}\overline{x^3}}{1 + 2\rho x^1 x^3} u^{2'}_2 \tag{57'}$$

ceea ce face ca numărul de parametri al grupului să scadă cu o unitate. În cazul $\rho = 0$ singurele componente nenule ale conexiunii sînt $\Gamma^2_{13} = -\Gamma^2_{31} = \beta$ și avem un spațiu cu conexiune nesimetrică generală cu grup maxim. Putem enunța

T e o r e m a 5. *Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate $x^3 p_2$, $x^1 p_2$, $x^1 p_1 - x^3 p_3$ sînt spații cu torsiune cu grup maxim G_9 sau spațiile cu torsiune avînd conexiunea dată de formulele* (55), (55′) *și posedă un grup de mișcări cu șase parametri.*

§ 6. Spațiile A_3 cu grupul de stabilitate G_3 dat de transformările infinitezimale $X_4 = x^3 p_2$, $X_5 = x^1 p_2$, $X_6 = 2x^2 p_2 + x^3 p_3$

Avem

$$(X_4 X_5) = 0, \quad (X_4 X_6) = X_4, \quad (X_5 X_6) = 2X_5. \tag{58}$$

Alegînd convenabil operatorii principali X_i și considerînd identitățile $(X_i X_\alpha X_\beta) = 0$, $(X_i X_j X_\alpha) = 0$ celelalte ecuații de structură ale grupului G_6 se vor scrie

$$\begin{array}{lll} (X_1X_4) = 0, & (X_1X_5) = X_2 + \mu X_5, & (X_1X_6) = 0, \\ (X_2X_4) = 0, & (X_2X_5) = 0, & (X_2X_6) = 2X_2, \\ (X_3X_4) = X_2, & (X_3X_5) = 0, & (X_3X_6) = X_3 + c^4_{36} X_4, \\ (X_1X_2) = \lambda X_2, & (X_1X_3) = \lambda X_1 + 3\nu X_4, & (X_2X_3) = 0. \end{array} \tag{59}$$

Se poate arăta că grupul considerat nu poate fi grupul de mișcări al unui spațiu A_3 decît dacă $c^4_{36} = 0$.

Dacă $\lambda \neq 0$ putem, printr-o schimbare de operatori de forma

$$\overline{X}_1 = X_1, \quad \overline{X}_2 = X_2, \quad \overline{X}_3 = X_3 + aX_4,$$

să anulăm pe ν. Putem atunci lua

$$X_1 = p_1 + \mu x^1 p_1 - \lambda U, \qquad X_2 = p_2, \; X_3 = p_3.$$

*) p. 198.

Componentele nenule ale conexiunii spațiului A_3 corespunzător sînt

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \frac{\alpha+\beta}{M},\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{\alpha-\beta}{M},\ \Gamma^1_{11} = \frac{2\alpha}{M},$$
$$\Gamma^2_{33} = \gamma M^{\frac{\lambda}{\lambda-\mu}},\quad (M = 1 + (\mu-\lambda)x^1), \tag{60}$$

dacă $\lambda \neq \mu$ și

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \alpha+\beta,\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \alpha-\beta,$$
$$\Gamma^1_{11} = 2\alpha\quad ,\ \Gamma^2_{33} = \gamma e^{\lambda x^1} \tag{60'}$$

dacă $\lambda = \mu$. Dacă $\lambda = 0$ componentele nenule ale spațiului A_3 corespunzător sînt

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \frac{\alpha+\beta}{N},\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{\alpha-\beta}{N},\ \Gamma^1_{11} = \frac{2\alpha}{N},$$
$$\Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = \nu x^3,\ \Gamma^2_{33} = -2\nu x^1 + \gamma, \tag{60''}$$

unde $N = 1 + \mu x^1$.
Ecuațiile grupului de mișcări sînt

$$\begin{aligned}
\bar{x}^1 &= [1 + (\mu-\lambda)a^1]x^1 + a^1\\
\bar{x}^2 &= (a^3_3)^2\,[1 + (\mu-\lambda)a^1]^{\frac{\lambda}{\lambda-\mu}}x^2 + a^2_1 x^1 + a^2_3 x^3 + a^2\\
\bar{x}^3 &= a^3_3 x^3 + a^3
\end{aligned} \tag{61}$$

(în cazul $\lambda \neq 0, \mu$; și

$$\begin{aligned}
\bar{x}^1 &= x^1 + a^1\\
\bar{x}^2 &= e^{\lambda a^1}(a^3_3)^2 x^2 + a^2_1 x^1 + a^2_3 x^3 + a^2\\
\bar{x}^3 &= a^3_3 x^3 + a^3
\end{aligned} \tag{61'}$$

în cazul $\lambda = \mu \neq 0$, iar dacă $\lambda = 0$

$$\begin{aligned}
\bar{x}^1 &= (1+\mu a^1)x^1 + a^1\\
\bar{x}^2 &= \nu(1+\mu a^1)a^3_3 a^3 x^1 x^3 - \nu(a^3_3)^2 a^1 (x^3)^2 + (1+\mu a^1)(a^3_3)^2 x^2 +\\
&\quad + a^2_1 x^1 + a^2_3 x^3 + a^2\\
\bar{x}^3 &= a^3_3 x^3 + a^3.
\end{aligned} \tag{61'''}$$

În toate aceste cazuri grupul are șase parametri. Rezultă

Teorema 6. *Spațiile A_3 cu grupul de stabilitate*

$$x^3 p_2,\ x^1 p_2,\ 2x^2 p_2 + x^3 p_3$$

sînt spații care au conexiunea dată de una din formulele (60), (60′) (60″) și care posedă un grup de mișcări cu șase parametri.

§ 7. Spațiile A_3 care au grupul de stabilitate G_3 dat de transformările infinitezimale

$$X_4 = x^3 p_2,\ X_5 = x^1 p_2,\ X_6 = x^2 p_2$$

Alegînd convenabil operatorii principali X_i, parantezele $(X_i X_\alpha)$ se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned}
&(X_1X_4) = c^5_{14}X_5 + c^6_{14}X_6, && (X_1X_5) = X_2 + c^5_{15}X_5 + c^6_{15}X_6,\\
&(X_2X_4) = c^\alpha_{24}X_\alpha, && (X_2X_5) = c^\alpha_{25}X_\alpha,\\
&(X_3X_4) = X_2 + c^4_{34}X_4 + c^6_{34}X_6, && (X_3X_5) = c^4_{35}X_4 + c^6_{35}X_6, \qquad (62)\\
&(X_1X_6) = c^6_{16}X_6, && (X_2X_6) = X_2 + c^4_{26}X_4 + c^5_{26}X_5, \quad (X_3X_6) = c^6_{36}X_6.
\end{aligned}$$

Identitățile $(X_1X_4X_6) = 0$, $(X_iX_5X_6) = 0$ ne dau

$$\begin{aligned}
&(X_1X_4) = \nu_1 X_5, && (X_1X_5) = X_2 + \eta_1 X_5, && (X_1X_6) = 0,\\
&(X_2X_4) = 0, && (X_2X_5) = 0, && (X_2X_6) = X_2, \qquad (62')\\
&(X_3X_4) = X_2 + \nu_3 X_4, && (X_3X_5) = \eta_3 X_4, && (X_3X_6) = 0,
\end{aligned}$$

iar din identitățile $(X_iX_jX_6) = 0$, $(X_1X_3X_4) = 0$, $(X_1X_3X_5) = 0$ obținem

$$\begin{aligned}
(X_1X_2) &= -\lambda X_2 + (-\lambda\nu_3 + \nu_1\eta_3 - \mu)\, X_4 + (\rho\nu_1 - \nu_1\nu_3)\, X_5,\\
(X_2X_3) &= \rho X_2 + (-\lambda\eta_3 + \eta_1\eta_3)\, X_4 + (\rho\eta_1 - \nu_1\eta_3 - \mu)\, X_5, \qquad (62'')\\
(X_1X_3) &= \rho X_1 - \lambda X_3 + \mu X_6.
\end{aligned}$$

Identitatea $(X_1X_2X_3) = 0$ se scrie

$$\begin{aligned}
&2\lambda\,(X_2X_3) - (\lambda\nu_3 + \nu_1\eta_3 - \mu)\,(X_2 + \nu_3 X_4) - (\rho\nu_1 - \nu_1\nu_3)\,\eta_3 X_4 -\\
&- 2\rho\,(X_1X_2) - (\lambda\eta_3 + \eta_1\eta_3)\,\nu_1 X_5 - (\rho\eta_1 - \nu_1\eta_3 - \mu)\,(X_2 + \eta_1 X_5) + \mu X_2 = 0
\end{aligned}$$

și ne dă

$$\begin{aligned}
&-\lambda\nu_3 + \rho\eta_1 = 3\mu,\\
&2\lambda^2\eta_3 - 2\lambda\eta_1\eta_3 + 2\rho\lambda\nu_3 - 3\rho\nu_1\eta_3 + 2\rho\mu + \lambda\nu_3^2 + \mu\nu_3 = 0,\\
&2\rho^2\nu_1 - 2\rho\nu_1\nu_3 + 2\rho\lambda\eta_1 - 3\lambda\nu_1\eta_3 - 2\lambda\mu + \rho\eta_1^2 + \mu\eta_1 = 0.
\end{aligned}$$

Putem satisface la aceste relații luînd

$$\eta_1 = \eta_3 = \nu_1 = \nu_3 = 0.$$

Atunci avem

$$\mu = 0,$$

$$(X_1X_2) = -\lambda X_2,\ (X_2X_3) = \rho X_2,\ (X_1X_3) = \rho X_1 - \lambda X_3. \qquad (62''')$$

Putem satisface la această structură luînd

$$X_1 = p_1 + \lambda U,\ X_2 = p_2,\ X_3 = p_3 + \rho U \qquad (63)$$

și componentele nenule ale conexiunii spațiului A_3 corespunzător se vor scrie

$$\Gamma^1_{11} = \frac{2\alpha_1}{M}, \quad \Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{23} = \frac{\alpha_3 + \beta_3}{M}, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{32} = \frac{\alpha_3 - \beta_3}{M},$$
$$\Gamma^3_{33} = \frac{2\alpha_3}{M}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{M}, \quad \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{M}, \tag{64}$$

unde $M = 1 + \rho x^3 + \lambda x^1$, iar α_1, α_3, β_1, β_3 sînt constante. Conexiunea acestui spațiu se poate scrie sub forma

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \psi_j \tag{65}$$

în care

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{M}, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = \frac{\alpha_3 + \beta_3}{M},$$
$$\psi_1 = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{M}, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = \frac{\alpha_3 - \beta_3}{M}. \tag{65'}$$

Conexiunea este deci semisimetrică, și dacă $\varphi_i = \psi_i$ spațiul este proiectiv euclidian. Tensorul de curbură și tensorul de torsiune sînt deci comple determinați de tensorii lor contractați care au expresiile

$$P_{kl} = \Gamma^i_{ikl} = n\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x^l} - \frac{\partial \varphi_l}{\partial x^k}\right) + \frac{\partial \psi_k}{\partial x^l} - \frac{\partial \psi_l}{\partial x^k},$$

$$\Gamma_{jl} = \Gamma^i_{jil} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^l} - \frac{\partial \varphi_l}{\partial x^j} + (n-1)\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x^l} + \psi_j \psi_l\right),$$

$$T_k = (n-1)\ (\varphi_k - \psi_k).$$

În cazul considerat, componentele nenule ale acestor tensori sînt

$$P_{13} = -P_{31} = 2\,\frac{2(\lambda\alpha_3 - \rho\alpha_1) + (\lambda\beta_3 - \rho\beta_1)}{M^2},$$

$$\Gamma_{11} = 2\,\frac{(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_1 - \lambda)}{M^2}, \quad \Gamma_{33} = 2\,\frac{(\alpha_3 - \beta_3)(\alpha_3 - \beta_3 - \rho)}{M^2},$$

$$\Gamma_{13} = \frac{\lambda(\alpha_3 + \beta_3) - 3\alpha_1\rho + \rho\beta_1 + 2(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_3 - \beta_3)}{M^2},$$

$$\Gamma_{31} = \frac{\rho(\alpha_1 + \beta_1) - 3\alpha_3\lambda + \lambda\beta_3 + 2(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_3 - \beta_3)}{M^2},$$

$$T_1 = \frac{4\beta_1}{M}, \quad T_3 = \frac{4\beta_3}{M}.$$

Dacă avem $\lambda\alpha_3 - \rho\alpha_1 = 0$, $\lambda\beta_3 - \rho\beta_1 = 0$, funcțiile φ_i, ψ_i sînt, abstracție făcînd de un factor, derivatele logaritmice ale funcției liniare $1 + \lambda x^1 + \rho x^3$ și după cum a arătat G. Vrănceanu [14] spațiul este cu grup maxim. Vom presupune deci că avem satisfăcută cel puțin una din condițiile $\lambda\alpha_3 \neq \rho\alpha_1$, $\lambda\beta_3 \neq \rho\beta_1$.

Să considerăm în primul rînd cazul cînd spațiul este fără torsiune.

Atunci avem

$$P_{13} = -P_{31} = \frac{4(\lambda\alpha_3 - \rho\alpha_1)}{M^2},$$

$$S_{11} = \frac{2\alpha_1(\alpha_1 - \lambda)}{M^2}, \quad S_{33} = \frac{2\alpha_3(\alpha_3 - \rho)}{M^2},$$

$$S_{13} = S_{31} = \frac{1}{2}(\Gamma_{13} + \Gamma_{31}) = \frac{2\alpha_1\alpha_3 - (\lambda\alpha_3 + \rho\alpha_1)}{M^2},$$

unde S_{ij} sînt componentele tensorului contractat simetric al tensorului de curbură.

Din formulele (21) rezultă, pentru $j = 1$, $l = 3$; $j = 1$, $l = 2$, $j = 3$, $l = 2$,

$$\begin{aligned} \Delta = u_1^1 u_3^3 - u_3^1 u_1^3 &= (\overline{M}/M)^2 \\ u_1^1 u_2^3 - u_1^3 u_2^1 &= 0 \\ u_3^1 u_2^3 - u_3^3 u_2^1 &= 0 \end{aligned} \tag{66}$$

și ultimele două ecuații (66) formează un sistem liniar și omogen în u_2^1, u_2^3 cu determinantul diferit de zero după cum ne arată prima ecuație (66). Rezultă deci $u_2^1 = u_2^3 = 0$. Tensorul derivat al tensorului P_{jk} are următoarele componente nenule

$$P_{13.1} = -P_{31.1} = P_{13}\frac{3\alpha_1 - 2\lambda}{M},$$

$$P_{13.3} = -P_{31.3} = P_{13}\frac{3\alpha_3 - 2\rho}{M}.$$

Și din legea de transformare a acestui tensor rezultă, dacă ținem seama și de prima relație (66),

$$\begin{aligned} (3\alpha_1 - 2\lambda)u_1^1 + (3\alpha_3 - 2\rho)u_1^3 &= (3\alpha_1 - 2\lambda)\frac{\overline{M}}{M}, \\ (3\alpha_1 - 2\lambda)u_3^1 + (3\alpha_3 - 2\rho)u_3^3 &= (3\alpha_3 - 2\rho)\frac{\overline{M}}{M}, \end{aligned} \tag{66'}$$

iar din legea de transformare a tensorului S_{ij} obținem

$$(\alpha_1(\alpha_1-\lambda)(u_1^1)^2+(2\alpha_1\alpha_3-\lambda\alpha_3-\rho\alpha_1)u_1^1u_1^3+\alpha_3(\alpha_3-\rho)(u_1^3)^2=$$
$$=\alpha_1(\alpha_1-\lambda)\left(\frac{\overline{M}}{M}\right)^2,$$
$$\alpha_1(\alpha_1-\lambda)u_1^1u_3^1+(2\alpha_1\alpha_3-\lambda\alpha_3-\rho\alpha_1)u_3^1u_1^3+\alpha_3(\alpha_3-\rho)u_1^3u_3^3=0, \quad (66'')$$
$$\alpha_1(\alpha_1-\lambda)(u_3^1)^2+(2\alpha_1\alpha_3-\lambda\alpha_3-\rho\alpha_1)u_3^1u_3^3+\alpha_3(\alpha_3-\rho)(u_3^3)^2=$$
$$=\alpha_3(\alpha_3-\rho)\left(\frac{\overline{M}}{M}\right)^2.$$

Sistemul format din ecuațiile (66′), (66″) nu este compatibil în ipoteza $\rho\alpha_1 \neq \lambda\alpha_3$ decît dacă avem $u_3^1=u_1^3=0$. Rezultă deci

$$u_1^1=u_3^3=\frac{\overline{M}}{M}.$$

Considerînd ecuațiile (24) găsim ecuațiile grupului de mișcări al spațiului

$$\begin{aligned}\overline{x}^1&=(1+\rho a^3+\lambda a^1)x^1+a^1,\\ \overline{x}^2&=a_1^2x^1+a_2^2x^2+a_3^2x^3+a^2,\\ \overline{x}^3&=(1+\rho a^3+\lambda a^1)x^3+a^3.\end{aligned} \quad (67)$$

Dacă spațiul are torsiune, grupul de mișcări este același deoarece tensorul de torsiune nu ne dă condiții în plus. Putem enunța

T e o r e m a 7. *Spațiile A_3 cu grupul de stabilitate x^3p_2, x^1p_2, x^2p_2 au conexiunea dată de formulele* (65), (65′) *și posedă grupul de automorfisme cu șase parametri avînd ecuațiile* (67). *Dacă spațiul nu are torsiune el este proiectiv euclidian.*

În general spațiile A_n $(n\geqslant 3)$ avînd conexiunea dată de formulele

$$\Gamma_{jk}^i=\delta_j^i\varphi_k+\delta_k^i\psi_j, \quad (68)$$

în care

$$\begin{aligned}&\varphi_1=\frac{\alpha_1+\beta_1}{M},\quad \varphi_2=\frac{\alpha_2+\beta_2}{M},\quad \varphi_3=\ldots=\varphi_n=0,\\ &\psi_1=\frac{\alpha_1-\beta_1}{M},\quad \psi_2=\frac{\alpha_2-\beta_2}{M},\quad \psi_3=\ldots=\psi_n=0,\\ &M=1+\lambda x^1+\rho x^2\end{aligned} \quad (68')$$

posedă, dacă presupunem $\lambda\alpha_2\neq\rho\alpha_1$, un grup de transformări în ele însile cu n^2-n parametri avînd ecuațiile

$$\begin{aligned}\overline{x}^1&=(1+\lambda a^1+\rho a^2)x^1+a^1,\\ \overline{x}^2&=(1+\lambda a^1+\rho a^2)x^2+a^2,\qquad (h=3,\ldots,n),\\ \overline{x}^h&=a_i^hx^i+a^h.\end{aligned} \quad (69)$$

Pentru aceste spații atît tensorul strîmb simetric P_{ik} cît și tensorul simetric S_{jl} sînt de rangul doi, caz care nu a fost considerat de Yosio Mutor [15]. Mai general, spațiile A_n ($n \geqslant 3$) avînd conexiunea (68) cu

$$\begin{aligned} &\varphi_r = \frac{\alpha_r + \beta_r}{M}, \quad \varphi_{r+1} = \ldots = \varphi_n = 0, \\ &\psi_r = \frac{\alpha_r - \beta_r}{M}, \quad \psi_{r+1} = \ldots = \psi_n = 0, \\ &M = 1 + \rho_r x^r \qquad\qquad (r = 1 \ldots 2p < n), \end{aligned} \tag{68''}$$

posedă, dacă avem $\rho_r \alpha_s \neq \rho_s \alpha_r$, un grup de automorfisme cu $n\,(n - 2p + 1)$ parametrii avînd ecuațiile

$$\begin{aligned} &\overline{x}^r = (1 + \rho_s a^s)\, x^r + a^r, \\ &\overline{x}^h = a^h_i x^i + a^h, \\ &(r, s = 1, \ldots, 2p\,;\ h = 2p + 1, \ldots, n\,;\ i = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{69'}$$

§ 8. Spațiile A_3 care au grupurile de stabilitate (X'), (X''), (X''')

Ecuațiile de structură ale grupului (X) se scriu

$$(X_4 X_5) = 0, \quad (X_4 X_6) = X_4, \quad (X_5 X_6) = c X_5 . \tag{70}$$

În primul caz avem $a = c = 0$. Alegînd convenabil operatorii principali X_i și considerînd identitățile $(X_i X_\alpha X_\beta) = 0$, $(X_i X_j X_\alpha) = 0$, celelalte ecuații de structură ale grupului de mișcări ale spațiului se vor scrie

$$\begin{aligned} &(X_1 X_4) = 0, \ (X_1 X_5) = \rho X_4, \ (X_1 X_6) = X_1, \\ &(X_2 X_4) = \rho X_4, \ (X_2 X_5) = 2\rho X_5, \ (X_2 X_6) = 0, \\ &(X_3 X_4) = X_1, \ (X_3 X_5) = X_2, \ (X_3 X_6) = c^5_{36} X_5, \\ &(X_1 X_2) = \rho X_1, \ (X_2 X_3) = \lambda X_2 - 2\rho X_3 + \mu X_5, \ (X_1 X_3) = \nu X_4, \end{aligned} \tag{71}$$

avînd condițiile

$$\rho\lambda = 0, \ \rho c^5_{36} = 0.$$

Presupunem mai întîi $\rho = 0$. Se poate arăta că în acest caz grupul considerat nu poate fi grupul de mișcări al unui spațiu A_3 decît dacă avem $c^5_{36} = 0$. Din ecuațiile (73) în care $\rho = c^5_{36} = 0$ rezultă că avem

$$X_1 = p_1, X_2 = p_2 + x^3 B p_2, \ X_3 = p_3 + \nu x^3 U - x^2 B p_2,$$

unde B este integrala olomorfă în origine a unei anumite ecuații Riccati. Regăsim spațiile A_3 cu grup G_7 [1]*). Presupunem acum $\rho \neq 0$

*) p. 202.

și vom lua $\rho = 1$. Avem $\lambda = c_{36}^5 = 0$, făcînd schimbarea de operatori

$$\overline{X}_1 = X_1,\ \overline{X}_2 = X_2,\ \overline{X}_3 = X_3 + \frac{\mu}{2} X_5$$

obținem $(X_2X_3) = -2X_3$, iar identitatea $(X_1X_2X_3) = 0$ ne dă $\nu = 0$. Putem satisface la această structură luînd

$$X_1 = p_1 - x^2 p_1,\ X_2 = p_2 - x^2 p_2 + x^3 p_3,\ X_3 = p_3 - x^2 p_3, \tag{72}$$

și conexiunea spațiului A_3 corespunzător are următoarele componente nenule

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{13} = (\alpha+\beta)(1-x^2), && \Gamma^1_{31} = (\alpha-\beta)(1-x^2),\\
&\Gamma^1_{12} = (\alpha+\beta)x^3, && \Gamma^1_{21} = (\alpha-\beta)x^3,\\
&\Gamma^1_{23} = -\eta x^1 x^3(1-x^2) + (\beta-\gamma)x^1, && \Gamma^1_{32} = -\eta x^1 x^3(1-x^2) - (\beta-\gamma)x^1,\\
&\Gamma^2_{23} = \eta x^3(1-x^2)^2 + (\alpha+\gamma)(1-x^2), && \Gamma^2_{32} = \eta x^3(1-x^2)^2 + (\alpha-\gamma)(1-x^2),\\
&\Gamma^3_{23} = -\eta(x^3)^2(1-x^2) + (\alpha+\gamma)x^3, && \Gamma^3_{32} = -\eta(x^3)^2(1-x^2) + (\alpha-\gamma)x^3,\\
&\Gamma^1_{22} = -\eta x^1(x^3)^2, && \Gamma^3_{22} = -\eta(x^3)^3,\\
&\Gamma^1_{33} = -\eta x^1(1-x^2), && \Gamma^2_{33} = \eta(1-x^2),\\
&\Gamma^2_{22} = \eta(x^3)^2(1-x^2) + 2\alpha x^3, && \Gamma^3_{33} = 2\alpha(1-x^2) - \eta x^3(1-x^2)^3,
\end{aligned} \tag{73}$$

unde α, β, γ și η sînt constante. Ecuațiile grupului de mișcări ale acestui spațiu se scriu

$$\begin{aligned}
\bar{x}^1 &= a^1_1 x^1 - a^1 x^2 + a^1_3 x^3 + a^1\\
\bar{x}^2 &= (1-a^2)x^2 + a^2_3 x^3 + a^2\\
\bar{x}^3 &= -a^3 x^2 + a^3_3 x^3 + a^3
\end{aligned} \tag{74}$$

(coeficienții a^i și a^j_i fiind legați prin relația

$$(1-a^2)a^3_3 + a^3 a^2_3 = 1 \tag{74'}$$

și acest grup conține șase parametri, constantele a^1, a^2, a^3, a^1_1, a^1_3, a^2_3, a^3_3 legate prin relația (74'). Putem enunța

Teorema 8. *Spațiile A_3 cu grupul de stabilitate dat de transformările infinitezimale x^3p_1, x^3p_2 x^1p_1 sînt sau spații care posedă un grup de mișcări cu șapte parametri, sau spațiile cu conexiune* (73) *și avînd grupul de mișcări cu șase parametri care are ecuațiile finite* (74), (74').

În al doilea caz avem $a = -c = -\frac{1}{2}$ și procedînd la fel ca mai sus determinăm expresiile operatorilor principali.
Avem

$$X_1 = p_1 - \rho x^2 p_1,\ X_2 = p_2 - \rho x^2 p_2 + \rho x^3 p_3,\ X_3 = p_3 - \rho x^2 p_3 \tag{72'}$$

și componentele nenule ale conexiunii spațiului A_3 corespunzător sînt

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{12} = \Gamma^3_{23} = -\Gamma^1_{21} = -\Gamma^3_{32} = -\rho^2\alpha x^1 x^3,\\
&\Gamma^1_{13} = \Gamma^2_{32} = -\Gamma^1_{31} = -\Gamma^2_{23} = -\rho\alpha x^1(1-\rho x^2),\\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{31} = -\Gamma^2_{21} = -\Gamma^3_{13} = \rho\alpha x^3(1-\rho x^2),\\
&\Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32} = -\rho^2\alpha(x^1)^2,\\
&\Gamma^2_{13} = -\Gamma^2_{31} = \alpha(1-\rho x^2)^2,\\
&\Gamma^3_{12} = -\Gamma^3_{21} = -\rho^2\alpha(x^3)^2,
\end{aligned} \tag{73'}$$

unde α este o constantă care este diferită de zero dacă spațiul nu este euclidian și are torsiune. Presupunem deci $\alpha = 1$. Dacă $\rho = 0$ singurele componente nenule ale conexiunii sînt $\Gamma^2_{13} = -\Gamma^2_{31} = 1$ și spațiul este un spațiu cu conexiune nesimetrică generală cu grup maxim G_9. Dacă $\rho \neq 0$ vom lua $\rho = 1$ și ecuațiile grupului de mișcări ale spațiului se scriu

$$\begin{aligned}
\overline{x}^1 &= a^1_1 x^1 - a^1 x^2 + a^1_3 x^3 + a^1\\
\overline{x}^2 &= (1-a^2)\,x^2 + a^2_3 x^3 + a^2\\
\overline{x}^3 &= -a^3 x^2 + a^3_3 x^3 + a^3
\end{aligned} \tag{75}$$

coeficienții a^i și a^j_i fiind legați prin relația

$$a^3 a^1_1 a^2_3 + a^1_1 a^3_3 (1-a^2) = 1. \tag{75'}$$

Grupul are șase parametri.

Teorema 9. *Spațiile A_3 cu grupul de stabilitate $x^3 p_1$, $x^3 p_2$, $x^1 p_1 - x^3 p_3$ sînt spațiile cu torsiune avînd conexiunea* (73) ($\rho \neq 0$) *și grupul de mișcări cu șase parametri* (75), (76').

Să presupunem acum că avem $a = 0$, $c = 1$. Alegînd convenabil operatorii X_i și considerînd identitățile $(X_i X_\alpha X_\beta) = 0$, $(X_i X_j X_\alpha) = 0$, parantezele $(X_i X_\alpha)$, $(X_i X_j)$ se vor scrie

$$\begin{aligned}
&(X_1X_4) = 0,\ (X_1X_5) = 0,\ (X_1X_6) = X_1,\\
&(X_2X_4) = 0,\ (X_2X_5) = 0,\ (X_2X_6) = X_2,\\
&(X_3X_4) = X_1,\ (X_3X_5) = X_2,\ (X_3X_6) = 0,\\
&(X_1X_2) = 0,\ (X_hX_3) = \lambda_h X_1 + \mu_h X_2 + \rho_h X_4 + \nu_h X_5, \qquad (h = 1,2).
\end{aligned} \tag{76}$$

Făcînd o schimbare de operatori de forma

$$\overline{X}_1 = X_1 + aX_4,\ \overline{X}_2 = X_2 + aX_5,\ \overline{X}_3 = X_3 - aX_6$$

putem anula unul din coeficienții λ_1, λ_2 sau μ_1, μ_2. Vom anula pe λ_1. Putem satisface la această structură luînd

$$\begin{aligned}
X_1 &= p_1 + x^3 A p_2,\ X_2 = p_2 + x^3 B p_1 + x^3 C p_2,\\
X_3 &= p_3 + DU + x^2 B p_1 + (x^1 A - x^2 C)\,p_2,
\end{aligned} \tag{77}$$

unde A, B, C și D sînt funcții de variabila x^3, olomorfe în origine legate prin ecuațiile

$$\begin{aligned} &D + x^3AB = \rho_1 x^3 + \mu_1 x^3 B, \\ &x^3(1 + x^3D)\,A' + x^3AC + \mu_1 + \mu_1 x^3 C + \nu_1 x^3 = 0, \\ &x^3(1 + x^3D)\,B' - x^3BC + \lambda_2 + \mu_2 x^3 B + \rho_2 x^3 = 0, \\ &x^3(1 + x^3D)\,C' - x^3AB + x^3C^2 - D - \lambda_2 x^3 A + \mu_2 x^3 C + \mu_2 + \nu_2 x^3 = 0. \end{aligned} \tag{78}$$

Din ecuațiile (8), scrise pentru toate transformările grupului G_6, rezultă că singurele componente nenule ale conexiunii spațiului A_3 corespunzător sînt

$$\Gamma^1_{13},\ \Gamma^1_{31},\ \Gamma^1_{23},\ \Gamma^1_{32},\ \Gamma^2_{23},\ \Gamma^2_{32},\ \Gamma^2_{13},\ \Gamma^2_{31},\ \Gamma^1_{33},\ \Gamma^2_{33}. \tag{79}$$

Primele opt componente scrise fiind funcții numai de variabila x^3.

Existența unor spații A_3, care posedă grupul de mișcări cu structura găsită, ne este dovedită de următoarea teoremă a lui Rașevski [13]:

Dacă avem un grup tranzitiv cu structura

$$(X_iX_j) = c^s_{ij}X_s + c^\alpha_{ij}X_\alpha,\ (X_iX_\beta) = a^s_{i\beta}X_s,\ (X_\beta X_\gamma) = c^\alpha_{\beta\gamma}X_\alpha$$

există întotdeauna un spațiu A_n simetric cu torsiune avînd acest grup drept grup de transformări în el însuși.

Prin urmare, în cazul considerat există un spațiu A_3 cu tensori derivați ai tensorului de torsiune și ai tensorului de curbură nuli, care admite grupul cu ecuațiile de structură (76) drept grup de mișcări. Pe lîngă acest spațiu mai pot exista și alte spații A_3 care admit acest grup. Rezultă

Teorema 10. *Spațiile A_3 cu grupul de stabilitate x^3p_1, x^3p_2, $x^1p_1 + x^2p_2$ sînt spații simetrice în sensul lui Rașevski, posedînd un grup de mișcări cu șase parametri.*

6-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ A_3

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В данной работе автор определяет 3-мерные пространства аффинной связности, которые допускают 6-параметрическую транзитивную группу движений (автоморфизмов). Для определения транзитивных групп, которые могут быть группами движения пространства A_3, исходят из стационарной группы начала, которая может рассматриваться как подгруппа центроаффинной группы с 3 переменными.

Академик Г. Врэнчану и автор показали в более ранних работах [3, 4], что некоторые преобразования не могут содержаться в полной стационарной группе неевклидового пространства A_n; таким образом исключаются центроаффинные группы, содержащие такие преобразования. Пользуясь классификацией Софуса Ли [2], показано, основываясь

на результатах предшествующих работ [1, 7, 8, 11], что существуют только 10 центроаффинных неподобных групп, которые могут быть полными стационарными группами пространства A_3, не являющегося римановым и не имеющего группы движений с числом параметров, превышающим 6. Бесконечно малые преобразования этих групп даются формулами (A'). Во второй главе определяется структура 6-параметрических транзитивных групп, имеющих в качестве стационарной подгруппы одну из групп(A'). В девяти из этих случаев интегрируются структурные уравнения, причем получаются остальные инфинитезимальные преобразования группы. Пользуясь затем уравнениями инфинитезимальных движений пространства

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x_j} \xi^s + \Gamma^i_{sk} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + \Gamma^i_{js} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s}, \tag{8}$$

определяются выражения коэффициентов связности. В большинстве рассмотренных случаев определяются и конечные уравнения полной группы движений пространства, пользуясь законом преобразования связности (24), законами преобразования тензоров кривизны и кручения, а также возникающих из них тензоров после свертывания индексов. Полученные результаты уточнены в следующих теоремах, которые относятся к стационарным группам, данным формулами (1′).

Теорема 1. *Пространства A_3, имеющие стационарную группу III, представляют собой или пространства с максимальной группой G_9, или пространства с кручением, имеющие связность, данную формулами (18) и группу движений G_6 с уравнениями (23′), (22″).*

Теорема 2. *Пространства A_3, имеющие стационарную группу IV, представляют собой или пространства с группой движений G_7, или пространства со связностью (33) и группой движений (34′).*

Теорема 3. *Пространства A_3, имеющие стационарную группу VI, имеют связность, данную формулами (40) и обладают группой движений с 6 параметрами.*

Теорема 4. *Пространства A_3, имеющие стационарную группу VII′, представляют симметрические пространства со связностью (44) и с группой G_6, имея уравнения (50).*

Обобщая этот результат, получаем класс пространств A_n $(n \geqslant 3)$, имеющих группу движений с $n^2 - 2n + 3$ параметрами.

Теорема 5. *Пространства A_3, имеющие стационарную группу VIII′, представляют собой пространства с максимальной группой или пространства с кручением, имеющие связность, данную формулами (55), (55′) и группу движений G_6.*

Теорема 6. *Пространства A_3, имеющие стационарную группу VIII, представляют собой пространства с группой движений G_6, связность которых дается одной из формул (60), (60′), (60″).*

Теорема 7. *Пространства A_3, имеющие стационарную группу IX′, обладают связностью, данной формулами (65), (65′) и группой движений G_6 с уравнениями (67). Если пространство не имеет кручения, оно является проективно-евклидовым.*

Путем обобщения этого результата, получаем класс пространств $A_n (n \geqslant 3)$ с полусимметрической связностью (68), (68′). Для этих пространств оба тензора, полученные путем свертывания тензора кривизны, будут 2-го порядка, а группа движений имеет $n^2 - 2n$ параметров (см. формулы (69)).

Теорема 8. *Пространства A_3 со стационарной группой X' представляют собой или пространства с группой G_7, или пространства со связностью (73) и группой G_6, уравнения которой даются формулами (74), (74′).*

Теорема 9. *Пространства A_3 со стационарной группой X'' представляют собой пространства с кручением, имеющие связность (73) и группу движений G_6 (75),*

Теорема 10. *Пространства A_3 со стационарной группой X'' представляют собой симметрические пространства, в смысле Рашевского, обладая группой движений с 6 параметрами.*

LES GROUPES DE MOUVEMENT À 6 PARAMÈTRES DES ESPACES A_3

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, l'auteur détermine les espaces à connexion affine à 3 dimensions, qui admettent un groupe transitif de mouvement (automorphismes) à 6 paramètres. Pour la détermination des groupes transitifs pouvant être des groupes de mouvement d'un espace A_3, on part du groupe de stabilité de l'origine qui peut être considéré comme un sous-groupe du groupe centro-affine à trois variables.

L'académicien G. Vrănceanu et l'auteur de ce travail ont montré dans des ouvrages antérieurs [3, 4] que certaines transformations ne peuvent pas être contenues dans le groupe total de stabilité d'un espace A_n non-euclidien ; on excluera donc les groupes centro-affines qui contiennent de telles transformations. Utilisant la classification de Sophus Lie [2], on montre, en vertu des résultats antérieurement obtenus [1, 7, 8, 11], qu'il existe seulement 10 groupes centro-affines non-semblables, pouvant être les groupes totaux de stabilité d'un espace A_3, qui n'est pas riemanien et n'a pas un groupe de mouvement à plus de six paramètres. Les transformations infinitésimales de ces groupes sont données par les formules (A').

Dans le second chapitre, on détermine la structure des groupes transitifs à 6 paramètres ayant comme sous-groupe de stabilité l'un des groupes (A′). Dans 9 de ces cas, on intègre les équations de structure, obtenant également ainsi les autres transformations infinitésimales du groupe. Utilisant ensuite les équations des mouvements infinitésimaux de l'espace

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} \xi^s + \Gamma^i_{sk} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + \Gamma^i_{js} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} \tag{8}$$

on détermine les expressions des coefficients de connexion. Dans la majorité des cas considérés, on détermine aussi les équations finies du groupe total de mouvements de l'espace, utilisant la loi de transformation de la connexion (24), les lois de transformation des tenseurs de courbure et de torsion ainsi que celles de leurs tenseurs contractés. Les résultats obtenus sont exprimés par les théorèmes suivants dans lesquels il s'agira des groupes de stabilité donnés par les formules (A').

Théorème 1. *Les espaces A_3, ayant le groupe de stabilité III, sont ou bien des espaces à groupe maximum G_9 ou bien des espaces à torsion, ayant la connexion donnée par les formules (18) et le groupe de mouvement G_6 par les équations (23'), (22''').*

Théorème 2. *Les espaces A_3, ayant le groupe de stabilité IV, sont ou bien des espaces à groupe de mouvement G_7, ou bien des espaces ayant la connexion (33) et le groupe de mouvement (34').*

Théorème 3. *Les espaces A_3, ayant le groupe de stabilité VI' ont la connexion donnée par les formules (40) et posèdent un groupe de mouvement à 6 paramètres.*

Théorème 4. *Les espaces A_3, ayant le groupe de stabilité VII', sont les espaces symétriques avec la connexion (44) et avec le groupe G_6, ayant les équations (50).*

Par la généralisation de ce résultat, on obtient une classe d'espaces A_n $(n \geqslant 3)$ ayant un groupe de mouvement à $n^2 - 2n + 3$ paramètres.

Théorème 5. *Les espaces A_3, ayant le groupe de stabilité VIII' sont ou bien des espaces à groupe maximum, ou bien des espaces à torsion ayant la connexion donnée par les formules (55), (55') et un groupe de mouvement G_6.*

Théorème 6. *Les espaces A_3 ayant le groupe de stabilité VIII'' sont des espaces à groupe de mouvement G_6, dont la connexion est donnée par l'une des formules (60), (60'), (60'').*

Théorème 7. *Les espaces A_3, ayant le groupe de stabilité IX', ont la connexion donnée par les formules (65), (65') et possèdent le groupe de mouvement G_6 d'équations (67). Si l'espace n'a pas de torsion, alors il est euclidien projectif.*

Par la généralisation de ce résultat, on obtient une classe d'espaces A_n $(n \geqslant 3)$ à connexion semi-symétrique (68), (68'). Pour ces espaces, les deux tenseurs contractés du tenseur de courbure sont du rang 2 et le groupe de mouvement à $n^2 - n$ paramètres [voir les formules (69)].

Théorème 8. *Des espaces A_3, ayant le groupe de stabilité X', sont ou bien des espaces à groupe G_7 ou bien des espaces ayant la connexion (73) et le groupe G_6, dont les équations sont données par les formules (74), (74').*

Théorème 9. *Les espaces A_3 ayant le groupe de stabilité X'', sont les espaces à torsion ayant la connexion (73) et le groupe de mouvement G_6 (75), (76').*

Théorème 10. *Les espaces A_3, ayant le groupe de stabilité X'', sont des espaces symétriques dans le sens de Rasevski et possèdent un groupe de mouvement à 6 paramètres.*

BIBLIOGRAFIE

1. V. Dumitraș, *Determinarea spațiilor A_3 cu grup tranzitiv G_7.* Studii și cercetări matematice, t. VIII, nr. 1—2, 1957, p. 183.
2. Sophus Lie și F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen.* Leipzig, 1893, vol. III, p. 117.
3. G. Vrănceanu, *Sur le groupe de stabilité d'un espace à connexion affine.* Bulletin Math., 1957, vol. 1, nr. 49.
4. V. Dumitraș, *Asupra transformărilor grupului de stabilitate al unui spațiu A_n.* Analele Universității „C. I. Parhon", seria Științele naturii, t. 14, 1957, p. 29.
5. G. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială.* Ed. Acad. R. P. R., București, 1952, vol. I.
6. — *Sugli spasi omogeni a connessione affinne.* Rediconti del circolo Matematico di Palermo, 1956, serie II, Tomo V.
7. I. P. Egorov, *Asupra grupurilor de mișcare ale spațiilor cu conexiune afină nesimetrică generală.* DAN, SSSR, 1950, t. 93, p. 265.
8. G. Vrănceanu, *Asupra spațiilor neproiectiv euclidiene A_n fără torsiune cu grup maxim.* Revista Universității „C. I. Parhon" și a Politehnicii București, 1954, nr. 4—6, p. 87.
9. V. Dumitraș, *Asupra spațiilor A_3 cu grup tranzitiv maxim.* Analele Universității „C. I. Parhon". Seria Științele Naturii, t. 13, 1957, p. 27.
10. Gh. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială.* Ed. Acad. R. P. R., București, 1951, vol. II.
11. — *Proprietăți diferențiale globale ale spațiilor A_n cu grup maxim G_n^2.* Bul. științ. Acad. R. P. R., secțiunea de științe matematice și fizice, t. VI, nr. 1, ianuarie-martie 1954, p. 49.
12. P. A. Sirokov, *Proectivo-evklidovî simetriceskie prostranstva.* Trudî seminaru pro vectornomu i tenzornomu analizu. Moscova, 1950, vol. VIII, p. 73—81.
13. P. K. Rașevski, *Simmetriceskie prostranstva affinnoi svia nosti Kruceniem.* Trudî seminaru pro vectornomu i tenzornomu analizu. Moscova, 1950, vol. VII, p. 82.
14. Gh. Vrănceanu, *Grupurile de mișcare ale spațiilor cu conexiune.* Studii și cercetări matematice, t. II, nr. 3—4, iulie-decembrie 1951, p. 387.
15. Yosio Muto, *On n-dimensional Projectively Flat Spaces Admitting a Group of Affine Motions G_r of Order $r>n^2-n$.* Science Reports of Yokohama. Nat. univ. sect. I, 1955, nr. 4, p. 1.

SPAȚII ORLICZ DE CÎMPURI DE VECTORI*)

DE

NICOLAE DINCULEANU

INTRODUCERE

Fie Z un spațiu local compact și μ o măsură Radon pozitivă pe Z. Fie $\mathcal{E} = (E(z))_{z\in Z}$ o familie de spații Banach și $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ mulțimea cîmpurilor de vectori $\mathbf{x}(z)$ definite pe Z astfel încît $\mathbf{x}(z) \in E(z)$ pentru orice $z \in Z$. Să presupunem că există o familie fundamentală $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$ de cîmpuri de vectori continui (vezi cap. I., definițiile). R. G o d e m e n t [16], [17] a introdus spațiile $\mathfrak{L}^p_{\mathcal{A}}$ $(1 \leqslant p < \infty)$ de cîmpuri de vectori de putere p, μ — sumabilă cu norma $\| \mathbf{x} \|_p = (\int \| \mathbf{x}(z) \|^p \, d\mu(z))^{1/p}$. În cazul cînd toate spațiile familiei $\mathcal{E}$ coincid cu un spațiu unic E (care poate fi, de exemplu, mulțimea C a numerelor complexe), cîmpurile de vectori sînt funcții obișnuite definite pe Z cu valori în E, iar spațiile $\mathfrak{L}^p_{\mathcal{A}}$ devin spațiile $\mathfrak{L}^p$ obișnuite.

Pe de altă parte, W. O r l i c z [40] a introdus spațiile $\mathfrak{L}^\Phi$ care îi poartă numele, formate din funcții numerice definite pe dreapta reală R, cu ajutorul unor funcții Φ și Ψ, complementare în sensul lui Young (vezi cap. III). Pentru o funcție $f \in \mathfrak{L}^\Phi$, norma sa $\| f \|_\Phi$ este definită prin $\| f \|_\Phi = \sup \int_R | f(t) g(t) | \, dt$ pentru $\int_R \Psi \, (| g(t) |) \, dt \leqslant 1$. Diverși autori au studiat această categorie de spații, care au aplicații importante în teoria operatorilor integrali neliniari.

În această lucrare ne-am propus să studiem o clasă de spații de cîmpuri de vectori $\mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ care conțin în același timp spațiile $\mathfrak{L}^p_{\mathcal{A}}$ și spațiile $\mathfrak{L}^\Phi$. Norma unui cîmp de vectori $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ se definește prin $\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup \int | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z)$ pentru $\int \Psi (\| \mathbf{x}'(z) \|) \, d\mu(z) \leqslant 1$, unde $\mathbf{x}'$ sînt cîmpuri de funcționale și unde notăm cu $\langle a, a' \rangle$ valoarea unei funcționale a' în punctul a dintr-un spațiu Banach. Pentru cîmpurile de vectori $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$, norma se poate defini și prin $\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup \int \| \mathbf{x}(z) \| \, | h(z) | \, d\mu(z)$

*) Disertație susținută la 3 iunie 1957 pentru obținerea titlului de candidat în științele fizico-matematice.

pentru $\int \Psi(|h(z)|)\,d\mu(z) \leqslant 1$ (unde h sînt funcţii scalare definite pe Z), sau prin $\|x\|_\Phi = \sup \|\varphi_K x\|_\Phi$, superiorul fiind luat pentru toate mulţimile compacte $K \subset Z$. Aceste formule permit aplicarea unor raţionamente care merg şi în cazul clasic.

În definiţia spaţiilor $\mathfrak{L}^\Phi_a$ am impus cîmpurilor din $\mathfrak{L}^\Phi_a$ condiţia să se anuleze aproape peste tot (a. p. t.) în afara unui şir de mulţimi compacte, condiţie care este verificată de spaţiile $\mathfrak{L}^p_a$. În acest fel, cîmpurile local neglijabile nu aparţin spaţiului $\mathfrak{L}^\Phi_a$. Autorii care au studiat spaţiile Orlicz de funcţii numerice au considerat spaţiul de definiţie al funcţiilor cel mult reuniune numărabilă pe mulţimi de măsură finită. Recent, G. Weiss [45] a studiat spaţii Orlicz de funcţii numerice definite pe un spaţiu cu măsură localizabilă.

În capitolul I, care are un caracter introductiv, se expun cîteva noţiuni din teoria cîmpurilor de vectori după R. Godement [17]. Se introduc cîmpurile de funcţionale şi se dau cîteva propoziţii privind existenţa unor cîmpuri particulare care vor fi folosite în capitolele următoare.

În capitolul II se introduce şi se studiază o clasă de spaţii auxiliare de cîmpuri de vectori $\mathcal{O}^\Phi_a$, cu ajutorul cărora se definesc spaţiile $\mathfrak{L}^\Phi_a$; $\mathcal{O}^\Phi_a$ este format din cîmpurile măsurabile x pentru care $\int^* \Phi(\|x(z)\|)\,d\mu(z) < \infty$. Dacă există o constantă $M > 1$, astfel încît $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ pentru $u \geqslant 0$, $\mathcal{O}^\Phi_a$ sînt spaţii liniare.

În capitolul III se introduc şi se studiază spaţiile $\mathfrak{L}^\Phi_a$. În prealabil, se face un studiu amănunţit al proprietăţilor semi normei $\|x\|_\Phi$.

În capitolul IV se studiază funcţionalele liniare continui pe $\mathfrak{L}^\Phi_a$ şi operaţii liniare decompozabile în $\mathfrak{L}^\Phi_a$ şi se obţin rezultate care generalizează unele rezultate ale lui J. v. Neumann [38], R. Godement [17] şi C. T. Ionescu Tulcea [21].

Capitolul I

CÎMPURI DE VECTORI

În acest capitol, care are un caracter introductiv, se expun cîteva noţiuni din teoria cîmpurilor de vectori după R. Godement [17] şi teoria măsurii (Radon) după Bourbaki [4]. Se introduc cîmpurile de funcţionale şi se dau cîteva propoziţii privind existenţa unor cîmpuri particulare, care vor fi folosite în capitolele următoare.

§ 1. Cîmpuri de vectori

Fie Z un spaţiu local compact şi μ o măsură Radon pozitivă definită pe Z. Fie $\mathcal{E} = (E(z))_{z \in Z}$ o familie de spaţii Banach (complexe). Pentru fiecare $z \in Z$, $E(z)$ se numeşte spaţiul tangent la Z în punctul z.

Se numește *cîmp de vectori definit pe* Z, orice funcție $\mathbf{x}$ definită pe Z, astfel că pentru fiecare $z \in Z$ valoarea $\mathbf{x}(z)$ a funcției $\mathbf{x}$ în punctul z aparține lui $E(z)$. Vom nota cu $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ mulțimea cîmpurilor de vectori definite pe Z. $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ este un spațiu vectorial (complex) și în același timp un modul pe inelul $\mathcal{C}(C)$ al funcțiilor complexe f, definite pe Z, dacă punem $(f.\mathbf{x})(z) = f(z)\mathbf{x}(z)$ pentru fiecare $z \in Z$.

Definiția 1. *Se numește familie fundamentală de cîmpuri de vectori continue o parte* $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{S})$ *care verifică următoarele axiome*:

($\mathcal{A}_I$) : $\mathcal{A}$ *este un subspațiu vectorial al lui* $\mathcal{C}(\mathcal{S})$;

($\mathcal{A}_{II}$) : *pentru orice* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$, *funcția scalară* $z \to \|\mathbf{x}(z)\|$ *este continuă*;

($\mathcal{A}_{III}$) : *pentru orice* $z \in Z$, *mulțimea* $\{\mathbf{x}(z) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{A}\}$ *este peste tot densă în* $E(z)$.

Vom spune că o familie fundamentală $\mathcal{A}$ verifică axioma lui Godement (G) : *dacă există o parte numărabilă* $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, *astfel încît pentru fiecare* $z \in Z$, *mulțimea* $\{\mathbf{x}(z) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{A}_0\}$ *este densă în* $E(z)$.

Vom spune că o familie fundamentală $\mathcal{A}$ verifică axioma (G*) : *dacă pentru fiecare mulțime compactă* $K \subset Z$ *există o parte numărabilă* $\mathcal{A}_{0K} \subset \mathcal{A}$, *astfel încît pentru fiecare* $z \in K$, *mulțimea* $\{\mathbf{x}(z) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{A}_{0K}\}$ *este densă în* $E(z)$.

În cele ce urmează vom presupune că există o familie fundamentală $\mathcal{A}$ pe care o menținem fixă. Definiția următoare introduce cîmpurile de vectori continue.

Definiție 2. *Un cîmp de vectori* $\mathbf{x}$ *definit pe* Z *este continuu într-un punct* $z_0 \in Z$, *dacă pentru orice număr* $\varepsilon > 0$ *există o vecinătate* V *a lui* z_0 *și un cîmp de vectori* $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$, *astfel încît*

$$\|\mathbf{x}(z) - \mathbf{y}(z)\| < \varepsilon \qquad \text{pentru orice } z \in V.$$

— Un cîmp de vectori $\mathbf{x}$ este continuu pe o parte $A \subset Z$, dacă este continuu în fiecare punct $z \in A$.

Exemplu. Dacă toate spațiile tangente $E(z)$ sînt egale cu un spațiu Banach E, cîmpurile de vectori $\mathbf{x}$ sînt funcții obișnuite definite pe Z cu valori în E. Următoarele mulțimi sînt familii fundamentale : *a*) funcțiile constante, *b*) funcțiile continue, *c*) funcțiile continue cu suport compact. Definiția cîmpurilor continue în raport cu una din aceste familii fundamentale coincide în acest caz cu definiția obișnuită a funcțiilor continue. Alte exemple se pot găsi în [17].

Vom da cîteva proprietăți ale cîmpurilor de vectori continue.

1) Cîmpurile de vectori continue într-un punct $z_0 \in Z$ formează un modul pe inelul funcțiilor complexe definite pe Z și continue în z_0 ; în particular, cîmpurile continue în z_0 formează un spațiu vectorial.

2) Funcția scalară $z \to \|\mathbf{x}(z)\|$ este continuă în fiecare punct în care cîmpul de vectori $\mathbf{x}$ este continuu.

3) Un cîmp de vectori $\mathbf{x}$ este continuu într-un punct $z_0 \in Z$ dacă, și numai dacă, funcția scalară $\|\mathbf{x}(z) - \mathbf{y}(z)\|$ este continuă în z_0, oricare ar fi $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$.

4) Pentru ca un cîmp de vectori $\mathbf{x}$ să fie continuu pe Z, este necesar şi suficient ca el să fie limită uniformă, pe fiecare compact, de cîmpuri de vectori de forma

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\,\mathbf{x}_i(z),$$

unde $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}$ şi f_i sînt funcţii scalare continue pe Z.

5) Fie $K \subset Z$ o mulţime compactă. Orice cîmp de vectori $\mathbf{x}$ definit şi continuu pe K se poate prelungi la un cîmp de vectori definit şi continuu pe Z.

§ 2. Cîmpuri de vectori integrabile

Însemnăm cu $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}$ mulţimea cîmpurilor de vectori continue cu suport compact. $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}$ este un spaţiu vectorial şi un modul pe inelul $\mathfrak{L}_C$ al funcţiilor scalare definite pe Z, continue cu suport compact.

O măsură Radon μ este o funcţională liniară definită pe spaţiul vectorial $\mathfrak{L}_R$ (al funcţiilor reale continue cu suport compact definite pe Z) astfel că pentru orice compact $K \subset Z$ există o constantă M_K pentru care

$$|\mu(f)| \leqslant M_K \|f\|,$$

oricare ar fi $f \in \mathfrak{L}_R$ cu suportul în K, şi unde $\|f\| = \sup_{z \in Z} \{|f(z)|\,;\ z \in Z\}$.

O măsură Radon μ este *pozitivă* dacă

$$\mu(f) \geqslant 0 \text{ pentru } f \geqslant 0.$$

Se obişnuieşte notaţia $\mu(f) = \int f(z)\,d\mu(z)$.

Fie μ o măsură pozitivă. Pentru orice funcţie $f \geqslant 0$, *inferior semicontinuă*, se pune

$$\mu^*(f) = \sup \{\mu(g) \mid g \in \mathfrak{L}_R^+,\ 0 \leqslant g \leqslant f\},$$

iar pentru o funcţie $f \geqslant 0$ oarecare se pune

$\mu^*(f) = \inf \{\mu^*(g) \mid 0 \leqslant g \leqslant f,\ g$ inferior semicontinuă$\}$.

Pentru orice $f \geqslant 0$, $\mu^*(f)$ se numeşte *integrala superioară* a lui f şi se notează $\int^* f(z)\,d\mu(z)$.

Pentru orice parte $A \subset Z$ numărul $\mu^*(A) = \mu^*(\varphi_A)$ se numeşte *măsura exterioară* a lui A, unde φ_A este funcţia caracteristică a lui A.

O funcţie $f \geqslant 0$ este *neglijabilă* dacă $\int^* f(z)\,d\mu(z) = 0$. O mulţime $A \subset Z$ este *neglijabilă* dacă φ_A este neglijabilă. Vom spune că o proprietate P definită pentru punctele lui Z are loc *aproape peste tot* (a. p. t.), dacă punctele în care P nu are loc formează o mulţime neglijabilă.

Reţinem următoarele proprietăţi ale integralei superioare :

1) Dacă $\int^* f(z)\,d\mu(z) < \infty$, atunci $f(z) < \infty$ a. p. t.

2) Dacă $\int^* f(z)\,d\mu(z) < \infty$, atunci mulţimea $\{z \mid f(z) \neq 0\}$ este conţinută în reuniunea unei mulţimi neglijabile N, şi a unui şir (K_n) de mulţimi compacte, disjuncte două cîte două.

3) $\mu^*(f+g) \leqslant \mu^*(f) + \mu^*(g)$, $\mu^*(af) = a\mu^*(f)$ dacă $a > 0$.
4) Dacă $0 \leqslant f \leqslant g$, atunci $\mu^*(f) \leqslant \mu^*(g)$.
5) Pentru orice șir crescător (f_n) de funcții $\geqslant 0$ avem

$$\sup_n \mu^*(f_n) = \mu^*(\sup_n f_n).$$

6) Dacă pentru orice $1 \leqslant p < \infty$ și orice funcție numerică f punem $N_p(f) = (\int^* |f(z)|^p \, d\mu(z))^{\frac{1}{p}}$, atunci pentru orice șir (f_n) de funcții $\geqslant 0$, avem

$$N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n).$$

Pentru orice cîmp de vectori $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ să punem

$$N_p(\mathbf{x}) = (\int^* \|\mathbf{x}(z)\|^p \, d\mu(z))^{\frac{1}{p}}.$$

Însemnăm cu $\mathcal{F}^p$ mulțimea cîmpurilor $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ pentru care $N_p(\mathbf{x}) < \infty$. $\mathcal{F}^p$ este un spațiu vectorial și N_p este o seminormă pe $\mathcal{F}^p$. În topologia definită pe $\mathcal{F}^p$ de seminorma N_p, aderența originii este subspațiul vectorial $\mathcal{N}$ format din cîmpurile $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ neglijabile (pentru care $N_p(\mathbf{x}) = 0$). $\mathcal{F}^p$ este complet pentru această topologie. Spațiul separat asociat $F^p = \mathcal{F}^p/\mathcal{N}$ este un spațiu Banach cu norma $\|\tilde{\mathbf{x}}\|_p = N_p(\mathbf{x})$, unde $\tilde{\mathbf{x}}$ este clasa de echivalență modulo $\mathcal{N}$ a lui $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^p$.

Definiția 3. *Un cîmp de vectori* $\mathbf{x}$ *este de putere* p *sumabilă (relativ la* μ *și* $\mathcal{A}$*) dacă pentru orice număr* $\varepsilon > 0$, *există un cîmp de vectori* $\mathbf{y} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, *astfel încît*

$$N_p(\mathbf{x} - \mathbf{y}) < \varepsilon.$$

Însemnăm cu $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$ mulțimea cîmpurilor de vectori $\mathbf{x}$ de putere p sumabilă. După definiția 3, $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$ este aderența în $\mathcal{F}^p$ a mulțimii $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ a cîmpurilor continue cu suport compact, deci $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$ este un spațiu vectorial complet. Spațiul cît $L^p_{\mathcal{A}} = \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$ este un spațiu Banach, cu norma $\|\tilde{\mathbf{x}}\|_p$.

Dăm mai jos cîteva propoziții în legătură cu cîmpurile de vectori de putere p sumabilă.

Propoziția 1. *Fie* $(\mathbf{x}_n)$ *un șir de cîmpuri din* $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$, *astfel încît*

$$\sum_n N_p(\mathbf{x}_n) < \infty;$$

atunci seria $\sum_n \mathbf{x}_n(z)$ *este absolut convergentă a. p. t. către* un cîmp $\mathbf{x} \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$, și $\tilde{\mathbf{x}}$ este suma seriei $\sum_n \tilde{\mathbf{x}}_n$ în $L^p_{\mathcal{A}}$.

Propoziția 2. *Pentru orice cîmp de vectori* $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ *funcția scalară* $z \to \|\mathbf{x}(z)\|$ *este de putere* p *sumabilă.*

P r o p o z i ț i a 3. (Lebesgue). *Fie* $(\mathbf{x}_n)$ *un șir de cîmpuri din* $\mathfrak{L}^p_{\mathcal{A}}$, *care verifică condițiile* :

a) $\mathbf{x}_n(z)$ *converge* a. p. t. *către un cîmp de vectori* $\mathbf{x}$;

b) există o funcție $f \geqslant 0$ *definită pe* Z *astfel încît* $N_p(f) < \infty$ *și* $\| \mathbf{x}_n(z) \| \leqslant f(z)$, *pentru orice* n *și* $z \in Z$; *atunci* $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^p_{\mathcal{A}}$ *și* $\lim_{n \to \infty} N_p(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}) = 0$.

§ 3. Cîmpuri de vectori măsurabile

D e f i n i ț i a 4. *Un cîmp de vectori* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ *este măsurabil (relativ la* $\mathcal{A}$ *și* μ), *dacă pentru orice număr* $\varepsilon > 0$ *și orice mulțime compactă* $K \subset Z$ *există un compact* $K_1 \subset K$ *astfel încît* $\mathbf{x}$ *să fie continuu pe* K_1 *și* $\mu^*(K - K_1) < \varepsilon$.

Dacă luăm $E(z) = C$ pentru orice $z \in Z$, și $\mathcal{A}$ mulțimea funcțiilor complexe continui definite pe Z, obținem definiția funcțiilor scalare măsurabile. O parte $A \subset Z$ este *msurabilă* dacă φ_A este măsurabilă. Pentru orice parte $A \subset Z$ măsurabilă vom numi *măsura* lui A și o vom nota cu $\mu(A)$ măsura exterioară $\mu^*(A)$. Pentru orice funcție integrabilă $f \geqslant 0$ vom scrie $\int f(z) d\mu(z)$, în loc de $\int^* f(z) d\mu(z)$.

P r o p o z i ț i a 4. *Pentru ca un cîmp de vectori* $\mathbf{x}$ *să fie de putere* p *sumabilă, este necesar și suficient ca* $\mathbf{x}$ *să fie măsurabil și* $N_p(\mathbf{x}) < \infty$.

P r o p o z i ț i a 5 *Un cîmp de vectori* $x \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ *este măsurabil dacă, și numai dacă, pentru orice mulțime compactă* $K \subset Z$ *există o mulțime neglijabilă* $A \subset K$ *și o partiție a lui* $K \cap \complement A$, *formată dintr-un șir* (K_n) *de mulțimi compacte, astfel încît* $\mathbf{x}$ *să fie continuu pe fiecare* K_n.

P r o p o z i ț i a 6. *Dacă un șir* $(\mathbf{x}_n)$ *de cîmpuri de vectori măsurabile converge în fiecare punct către un cîmp de vectori* $\mathbf{x}$, *atunci* $\mathbf{x}$ *este măsurabil.*

Dacă $\mathbf{x}$ este un cîmp de vectori măsurabil, funcția scalară $\| \mathbf{x}(z) \|$ este măsurabilă.

Mulțimea cîmpurilor de vectori măsurabile este un spațiu vectorial și un modul pe inelul funcțiilor scalare măsurabile.

Reținem, de asemenea, următoarea proprietate : *dacă pentru un cîmp de vectori* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$, *cîmpul de vectori* $\varphi_K \mathbf{x}$ *este măsurabil oricare ar fi mulțimea compactă* $K \subset Z$ *atunci* $\mathbf{x}$ *este măsurabil.*

O mulțime $A \subset Z$ este *local neglijabilă*, dacă $A \cap K$ este neglijabilă oricare ar fi mulțimea compactă $K \subset Z$. Un cîmp de vectori $\mathbf{x}$ este *local neglijabil* dacă pentru orice mulțime compactă $K \subset Z$, cîmpul $\varphi_K \mathbf{x}$ este neglijabil. Vom însemna cu $\mathfrak{N}_\infty$ mulțimea cîmpurilor local neglijabile.

Pentru orice cîmp $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ să punem $N_\infty(\mathbf{x})$ marginea inferioară a numerelor a pentru care $\| \mathbf{x}(z) \| \leqslant a$ local a.p.t. (adică cu excepția punctelor unei mulțimi local neglijabile). Vom nota cu $\mathfrak{L}^\infty_{\mathcal{A}}$ mulțimea cîmpurilor de vectori $\mathbf{x}$ măsurabile pentru care $N_\infty(\mathbf{x}) < \infty$. $\mathfrak{L}^\infty_{\mathcal{A}}$ este un spațiu vectorial complet pentru seminorma $N_\infty(\mathbf{x})$, iar spațiul cît $L^\infty_{\mathcal{A}} = \mathfrak{L}^\infty_{\mathcal{A}} / \mathfrak{N}_\infty$ este un spațiu Banach pentru norma $\| \tilde{\mathbf{x}} \|_\infty = N_\infty(\mathbf{x})$. Cîmpurile din $\mathfrak{L}^\infty_{\mathcal{A}}$ vor fi numite *mărginite în măsură*, iar numărul $N_\infty(\mathbf{x})$ va fi numit *maximum în măsură* a lui $\mathbf{x}$.

§ 4. Existența cîmpurilor de vectori măsurabile

Vom însemna cu $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ mulțimea cîmpurilor de vectori măsurabile (în raport cu $\mathcal{A}$ și μ) și cu $\mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}}$ mulțimea cîmpurilor $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ pentru care mulțimea $\{ z \mid \mathbf{x}(z) \neq 0 \}$ este conținută în reuniunea unei mulțimi neglijabile și a unui șir de mulțimi compacte.

În capitolele următoare vor fi folosite cîmpuri de vectori măsurabile care să nu se anuleze pe anumite submulțimi ale lui Z. Existența unor asemenea cîmpuri este demonstrată în propozițiile care urmează.

P r o p o z i ț i a 7. *Pentru orice mulțime compactă $K \subset Z$ există un cîmp măsurabil* $\mathbf{x}$ *astfel încît* $\mathbf{x}(z) \neq 0$ *pentru* $z \in K$

D e m o n s t r a ț i e. Fie $z_0 \in K$; mulțimea $\{ \mathbf{x}(z_0) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{A} \}$ fiind densă în $E(z_0)$ după $(\mathcal{A}_{\text{III}})$, există un cîmp $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{A}$, astfel încît $\mathbf{x}_0(z_0) \neq 0$. Funcția sclară $\| \mathbf{x}_0(z) \|$ fiind continuă, există o vecinătate V_0 a lui z_0, astfel încît $\mathbf{x}_0(z) \neq 0$ pentru orice $z \in V_0$. Deoarece K este compact, există un număr finit de puncte $z_1, z_2, \ldots, z_n$, de vecinătăți $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ale punctelor respective, astfel încît $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, și de cîmpuri de vectori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ din $\mathcal{A}$, astfel încît $\mathbf{x}_i(z) \neq 0$ pentru $z \in V_i$, $(i = 1,2,\ldots,n)$. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n mulțimi măsurabile, disjuncte două cîte două, astfel încît $K = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ și $A_i \subset V_i$, $(i = 1,2,\ldots,n)$. Atunci cîmpul de vectori

$$\mathbf{x}(z) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}(z) \mathbf{x}_i(z)$$

este măsurabil; pentru orice $z \in K$, există A_i, astfel încît $z \in A_i$, deci $\mathbf{x}(z) = \mathbf{x}_i(z) \neq 0$. Pentru $z \in \complement K$ avem $\mathbf{x}(z) = 0$.

Observații. 1° Dacă $\mathbf{x}$ este un cîmp de vectori măsurabil, atunci $\mathbf{y}$, definit prin $\mathbf{y}(z) = \frac{\mathbf{x}(z)}{\|\mathbf{x}(z)\|}$, dacă $\mathbf{x}(z) \neq 0$, și $\mathbf{y}(z) = 0$, dacă $\mathbf{x}(z) = 0$, este un cîmp de vectori măsurabil, care are în fiecare punct norma 0 sau 1. Într-adevăr, fie $A = \{ z \mid \mathbf{x}(z) \neq 0 \}$; A este măsurabilă. Funcția scalară f definită prin $f(z) = \| \mathbf{x}(z) \|$, dacă $z \in A$, și $f(z) = 1$, dacă $z \in \complement A$, este măsurabilă și diferită de zero în fiecare punct $z \in Z$. Atunci funcția $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ este măsurabilă și diferită de zero și $\mathbf{y}(z) = g(z)\mathbf{x}(z)$ este măsurabil și verifică condițiile cerute.

2° Pentru orice mulțime compactă $K \subset Z$ exită un cîmp de vectori măsurabil $\mathbf{y}$ astfel încît $\| \mathbf{y}(z) \| = \varphi_K(z)$. Într-adevăr, fie $\mathbf{x}$ cîmpul construit în propoziția 7. Atunci după 1°, cîmpul $\mathbf{y}$, definit prin $\mathbf{y}(z) = \frac{\mathbf{x}(z)}{\| \mathbf{x}(z) \|}$, pentru $z \in K$, și $\mathbf{y}(z) = 0$, pentru $z \in \complement K$, este măsurabil și verifică condițiile cerute.

3° Pentru orice şir (K_n) de mulţimi compacte există un cîmp măsurabil $\mathbf{x}$, astfel încît $\mathbf{x}(z) \neq 0$, dacă $z \in \bigcup_n K_n$. Într-adevăr, pentru fiecare n, fie $\mathbf{x}_n$ cîmpul de vectori măsurabili, astfel încît $\mathbf{x}_n(z) \neq 0$, dacă $z \in K_n$. Există un şir (A_n) de mulţimi măsurabile, disjuncte două cîte două, astfel încît $\bigcup_n A_n = \bigcup_n K_n$ şi $A_n \subset K_n$ pentru fiecare n. Atunci cîmpul

$$\mathbf{x}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{A_n}(z)\mathbf{x}_n(z)$$

este măsurabil şi verifică condiţiile cerute.

P r o p o z i ţ i a 8. *Pentru orice funcţie scalară măsurabilă f şi orice şir (K_n) de mulţimi compacte există un cîmp de vectori măsurabil* $\mathbf{x}$, *astfel încît*

$$\| \mathbf{x}(z) \| = |f(z)| \text{ pentru orice } z \in \bigcup_n K_n$$

Demonstraţie. După observaţiile 1° şi 3° , există un cîmp de vectori măsurabili $\mathbf{y}$, astfel încît $\| \mathbf{y}(z) \| = 1$, dacă $z \in \bigcup_n K_n$. Cîmpul de vectori $\mathbf{x} = f\mathbf{y}$ este măsurabil şi verifică condiţiile cerute.

§ 5. Cîmpuri de funcţionale

Să considerăm familia $\mathcal{E}' = (E'(z))_{z \in Z}$, unde pentru fiecare $z \in Z$, $E'(z)$ este dualul spaţiului $E(z)$. Un *cîmp de funcţionale* definit pe Z este o funcţie $\mathbf{x}'$, definită pe Z, astfel încît $\mathbf{x}'(z) \in E'(z)$ pentru fiecare $z \in Z$. Vom nota cu $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$ mulţimea cîmpurilor de funcţionale definite pe Z. Vom presupune că există o familie fundamentală de funcţionale continue $\mathcal{A}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ astfel încît

(*) *pentru orice* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ *şi orice* $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'$ *funcţia scalară*[1]) $\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle$ *este continuă pe* Z.

E x e m p l e. 1° Dacă pentru orice $z \in Z$, spaţiul $E(z)$ este egal cu un spaţiu Banach unic E, atunci $E'(z) = E'$, pentru orice $z \in Z$. Dacă se ia $\mathcal{A}$ mulţimea funcţiilor continue definite pe Z cu valori în E, şi $\mathcal{A}'$ mulţimea funcţiilor continui definite pe Z cu valori în E', atunci $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{A}'$ verifică condiţia (*). Într-adevăr, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle$ este formă biliniară continuă definită pe $E \times E'$.

2° Dacă $E(z)$ sînt spaţii Hilbert atunci $E'(z) = E(z)$ pentru fiecare z şi dacă se ia $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, condiţia (*) este verificată.

Din condiţia (*) vom deduce că fucţia scalară $\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle$ este continuă (sau măsurabilă), dacă $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{x}'$ sînt cîmpuri continue (sau măsurabile).

---

[1]) Dacă E este un spaţiu vectorial şi a' o funcţională liniară definită pe E, vom nota cu $\langle a, a' \rangle$ valoarea funcţionalei a' în punctul $a \in E$.

P r o p o z i ț i a 9. *Dacă* $\mathbf{x}$ *este un cîmp de vectori continuu într-un punct* $z_0 \in Z$ *și* $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'$, *atunci funcția scalară* $\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle$ *este continuă în* z_0.

Demonstrație. Fie K o vecinătate compactă a lui z_0. Pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un cîmp de vectori $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$, după definiția 2 și condiția (x) , și o vecinătate $V \subset K$ a lui z_0, astfel încît pentru orice $z \in V$,

$$\| \mathbf{x}(z) - \mathbf{y}(z) \| < \varepsilon,$$

$$| \langle \mathbf{y}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle - \langle \mathbf{y}(z_0), \mathbf{x}'(z_0) \rangle | < \varepsilon.$$

Atunci pentru $z \in V$,

$$| \langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle - \langle \mathbf{x}(z_0), \mathbf{x}'(z_0) \rangle | =$$

$$= | \langle \mathbf{x}(z) - \mathbf{y}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle - \langle \mathbf{x}(z_0) - \mathbf{y}(z_0), \mathbf{x}'(z_0) \rangle + \langle \mathbf{y}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle -$$

$$- \langle \mathbf{y}(z_0), \mathbf{x}'(z_0) \rangle | \leqslant \| \mathbf{x}(z) - \mathbf{y}(z) \| \| \mathbf{x}'(z) \| + \| \mathbf{x}(z_0) - \mathbf{y}(z_0) \| \| \mathbf{x}'(z_0) \| +$$

$$+ | \langle \mathbf{y}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle - \langle \mathbf{y}(z_0), \mathbf{x}'(z_0) \rangle | \leqslant \varepsilon (a + b + 1),$$

unde $a = \sup_{z \in K} \| \mathbf{x}'(z) \|$ și $b = \mathbf{x}'(z_0)$.

Observație. Se demonstrează, exact ca mai sus, că dacă $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ și $\mathbf{x}'$ este un cîmp de funcționale continuu într-un punct $z_0 \in Z$, atunci funcția scalară $\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle$ este continuă în z_0.

P r o p o z i ț i a 10. *Dacă* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ *și* $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}(\mathcal{S}')$ *sînt continui într-un punct* $z_0 \in Z$ *atunci funcția scalară* $\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle$ *este continuă în* z_0.

Demonstrație. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$, $\mathbf{y}' \in \mathcal{A}'$ și o vecinătate V a lui z_0, astfel încît pentru orice $z \in V$, $\| \mathbf{x}(z) - \mathbf{y}(z) \| < \varepsilon$, $\| \mathbf{x}'(z) - \mathbf{y}'(z) \| < \varepsilon$.

Atunci,

$$| \langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle - \langle \mathbf{x}(z_0), \mathbf{x}'(z_0) \rangle | \leqslant | \langle \mathbf{x}(z) - \mathbf{y}(z), \mathbf{x}'(z) - \mathbf{y}'(z) \rangle | +$$

$$+ | \langle \mathbf{x}(z_0) - \mathbf{y}(z_0), \mathbf{x}'(z_0) - \mathbf{y}'(z_0) \rangle | +$$

$$+ | \langle \mathbf{y}(z), \mathbf{x}'(z) - \mathbf{y}'(z) \rangle - \langle \mathbf{y}(z_0), \mathbf{x}'(z_0) - \mathbf{y}'(z_0) \rangle | +$$

$$+ | \langle \mathbf{x}(z), \mathbf{y}'(z) \rangle - \langle \mathbf{x}(z_0), \mathbf{y}'(z_0) \rangle | \leqslant \| \mathbf{x}(z) - \mathbf{y}(z) \| \| \mathbf{x}'(z) - \mathbf{y}'(z) \| +$$

$$+ \| \mathbf{x}(z_0) - \mathbf{y}(z_0) \| \| \mathbf{x}'(z_0) - \mathbf{y}'(z_0) \| +$$

$$+ | \langle \mathbf{y}(z), \mathbf{x}'(z) - \mathbf{y}'(z) \rangle - \langle \mathbf{y}(z_0), \mathbf{x}'(z_0) - \mathbf{y}'(z_0) \rangle | +$$

$$+ | \langle \mathbf{x}(z), \mathbf{y}'(z) \rangle - \langle \mathbf{x}(z_0), \mathbf{y}'(z_0) \rangle |.$$

După propoziția 9 se poate lua o vecinătate $V' \subset V$ a lui z_0 astfel încît pentru $z \in V'$, ultimii doi termeni să fie fiecare mai mic decît ε^2; primii doi termeni sînt mai mici decît ε^2 fiecare, de unde rezultă propoziția.

P r o p o z i ț i a 11. *Dacă* $\mathbf{x}$ *este un cîmp de vectori măsurabil (relativ la* $\mathcal{A}$ *și* μ*) iar* $\mathbf{x}'$ *este un cîmp de funcționale măsurabil (relativ la* $\mathcal{A}'$ *și* μ*), atunci funcția scalară* $\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle$ *este măsurabilă* (μ).

Demonstrație. Fie $K \subset Z$ o mulțime compactă și $\varepsilon > 0$ un număr ; $\mathbf{x}$ fiind măsurabil, există o mulțime compactă $K_1 \subset K$, astfel încît $\mu(K - K_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ și $\mathbf{x}$ să fie continuu pe K_1 ; $\mathbf{x}'$ fiind măsurabil există o mulțime compactă $K_2 \subset K_1$, astfel încît $\mu(K_1 - K_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ și $\mathbf{x}'$ să fie continuu pe K_2. Rezultă atunci din propoziția 10 că $<\mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z)>$ este continuă pe K_2 și $\mu(K - K_2) < \varepsilon$.

§ 6. Existența cîmpurilor de vectori și de funcționale particulare

Pentru orice cîmp de vectori $\mathbf{x}$ și orice cîmp de funcționale $\mathbf{x}'$ avem inegalitatea

$$|<\mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z)>| \leqslant \|\mathbf{x}(z)\| \cdot \|\mathbf{x}'(z)\|, \quad z \in Z$$

În capitolele următoare se va utiliza în mod esențial o inegalitate de sens contrar. Pentru aceasta va trebui să arătăm că fiind dat un cîmp de vectori măsurabil $\mathbf{x}$, există un cîmp de funcționale măsurabil $\mathbf{x}'$, astfel încît inegalitatea de sens contrar să fie verificată pe o anumită submulțime a lui Z. Demonstrația destul de lungă se face în mai multe etape.

P r o p o z i ț i a 12. *Fie $K \subset Z$ o mulțime compactă, și $\mathbf{x}$ un cîmp de vectori continuu pe K. Pentru orice număr a, astfel încît $0 < a < 1$, există un cîmp de funcționale măsurabil $\mathbf{x}'$, astfel încît, pentru $z \in K$,*

$$a\|\mathbf{x}(z)\| \leqslant |<\mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z)>|,$$

$$a \leqslant \|\mathbf{x}'(z)\| \leqslant 2\text{-}a.$$

Demonstrație. Fie $z_0 \in K$; există $x_0' \in E'(z_0)$, astfel încît $|<\mathbf{x}(z_0), x_0'>| = \|\mathbf{x}(z_0)\|$ și $\|x_0'\| = 1$.
Există, de asemenea un cîmp de funcționale $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'$, astfel încît

$$\|x_0' - \mathbf{x}'(z_0)\| < \varepsilon, \quad \text{unde } \varepsilon = 1\text{-}a.$$

Atunci

$$|<\mathbf{x}(z_0), \mathbf{x}'(z_0)>| = |<\mathbf{x}(z_0), \mathbf{x}'(z_0) - x_0'> + <\mathbf{x}(z_0), x_0'>| \geqslant$$

$$\geqslant |<\mathbf{x}(z_0), x_0'>| - |<\mathbf{x}(z_0), \mathbf{x}'(z_0) - x_0'>| \geqslant$$

$$\geqslant \|\mathbf{x}(z_0)\| - \|\mathbf{x}(z_0)\| \cdot \|\mathbf{x}'(z_0) - x_0'\| > \|\mathbf{x}(z_0)\| - \|\mathbf{x}(z_0)\| \varepsilon =$$

$$= (1 - \varepsilon)\|\mathbf{x}(z_0)\| = a\|\mathbf{x}(z_0)\|$$

și

$$a = 1 - \varepsilon = \|x_0'\| - \varepsilon < \|\mathbf{x}'(z_0)\| < \|x_0'\| + \varepsilon = 2\text{-}a.$$

Deoarece funcțiile care intervin în aceste inegalități sînt continue, există o vecinătate V_0 a lui z_0, astfel încît pentru $z \in V_0$ să avem

$$|<\mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z)>| \geqslant a \cdot \|\mathbf{x}(z)\|,$$

$$a \leqslant \|\mathbf{x}'(z)\| \leqslant 2\text{-}a.$$

Deoarece K este compact, există un număr finit de mulțimi deschise $V_1, V_2, \ldots, V_n$, astfel încît $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, și de cîmpuri de funcționale $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \ldots, \mathbf{x}'_n$ din $\mathcal{A}'$, astfel încît

$$| <\mathbf{x}(z), \mathbf{x}'_i(z)> | \geqslant a \| \mathbf{x}(z) \| \text{ pentru } z \in V_i,$$

$$a \leqslant \| \mathbf{x}'_i(z) \| \leqslant 2\text{-}a \qquad \text{pentru } z \in V_i$$

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulțimi măsurabile, disjuncte două cîte două, astfel încît $K = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ și $A_i \subset V_i$, $i = 1,2,\ldots, n$. Cîmpul de funcționale $\mathbf{x}'(z) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}(z)\mathbf{x}'_i(z)$ este măsurabil și verifică

$$| <\mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z)> | \geqslant a \cdot \| \mathbf{x}(z) \|,$$

$$a \leqslant \| \mathbf{x}'(z) \| \leqslant 2\text{-}a$$

pentru $z \in K$. Pentru $z \in \complement K$ avem $\mathbf{x}'(z) = 0$.

P r o p o z i ț i a 12′. *Fie $K \subset Z$ o mulțime compactă și $\mathbf{x}'$ un cîmp de funcționale continuu pe K. Pentru orice număr a, astfel încît $0 < a < 1$, există un cîmp de vectori măsurabil $\mathbf{x}$, astfel încît pentru $z \in K$*

$$a \cdot \| \mathbf{x}'(z) \| \leqslant | <\mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z)> |,$$

$$a \leqslant \| \mathbf{x}(z) \| \leqslant 2\text{-}a.$$

Demonstrație. Fie $z_0 \in K$, a astfel încît $0 < a < 1$, și $\varepsilon > 0$, astfel încît $a + \varepsilon < 1$. Deoarece

$$\| \mathbf{x}'(z_0) \| = \sup \{ | <x, \mathbf{x}'(z_0)> | ; \| x \| = 1, x \in E(z_0) \},$$

există un element $x_0 \in E(z_0)$, astfel încît $\| x_0 \| = 1$ și

$$| \langle x_0, \mathbf{x}'(z_0) \rangle | > \| \mathbf{x}'(z_0) \| (a + \varepsilon).$$

Există apoi un cîmp de vectori $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ astfel încît

$$\| x_0 - \mathbf{x}(z_0) \| < \varepsilon.$$

Atunci,

$$| <\mathbf{x}(z_0), \mathbf{x}'(z_0)> | = | <\mathbf{x}(z_0) - x_0, \mathbf{x}'(z_0)> + <x_0, \mathbf{x}'(z_0)> | \geqslant$$

$$\geqslant | <x_0, \mathbf{x}'(z_0)> | - | <\mathbf{x}(z_0) - x_0, \mathbf{x}'(z_0)> | \geqslant \| \mathbf{x}'(z_0) \| \cdot (a + \varepsilon) -$$

$$- \| \mathbf{x}'(z_0) \| \cdot \| \mathbf{x}(z_0) - x_0 \| \geqslant \| \mathbf{x}'(z_0) \| (a + \varepsilon) - \| \mathbf{x}'(z_0) \| \varepsilon = a \| \mathbf{x}'(z_0) \|$$

și

$$a < 1 - \varepsilon = \| x_0 \| - \varepsilon < \| \mathbf{x}(z_0) \| < \| x_0 \| + \varepsilon = 1 + \varepsilon < 2 - a.$$

Demostrația continuă apoi ca la propoziția 12.

Propoziția 13. *Fie* $\mathbf{x}$ *un cîmp de vectori măsurabil și* $K \subset Z$ *o mulțime compactă. Pentru orice număr* $0 < a < 1$ *există un cîmp de funcționale măsurabil* $\mathbf{x}'$, *astfel încît*

$$a \|\mathbf{x}(z)\| \leqslant |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z)\rangle| \quad \text{a.p.t. pe } K$$

și

$$a \leqslant \|\mathbf{x}'(z)\| \leqslant 2 - a \quad \text{a.p.t. pe } K$$

Demonstrație. Deoarece $\mathbf{x}$ este măsurabil, există o mulțime neglijabilă $A \subset K$ și o partiție a lui $K \cap \complement A$, formată dintr-un șir (K_n) de mulțimi compacte, astfel încît $\mathbf{x}$ să fie continuu pe fiecare K_n; după propoziția 12, pentru fiecare n există un cîmp de funcțional măsurabil $\mathbf{x}'_n$ astfel încît

$$a \cdot \|\mathbf{x}(z)\| \leqslant |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'_n(z)\rangle| \quad \text{pentru } z \in K_n$$

$$a \leqslant \|\mathbf{x}'_n(z)\| \leqslant 2 - a \quad \text{pentru } z \in K_n \text{ și } \mathbf{x}'_n(z) = 0 \quad \text{pentru } z \in \complement K_n.$$

Atunci cîmpul de funcționale $\mathbf{x}'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}'_n(z)$ este măsurabil și

$$a \|\mathbf{x}(z)\| \leqslant |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z)\rangle| \quad \text{pentru } z \in K \cap \complement A,$$

$$a \leqslant \|\mathbf{x}'(z)\| \leqslant 2 - a \quad \text{pentru } \mathbf{z} \in K \cap \complement A, \ \mathbf{x}'(z) = 0 \text{ pentru } z \in A \cup \complement K.$$

Propoziția 13′. *Fie* $\mathbf{x}'$ *un cîmp de funcționale măsurabil și* $K \subset Z$ *o mulțime compactă. Pentru orice număr* $0 < a < 1$ *există un cîmp de vectori măsurabil* $\mathbf{x}$, *astfel încît*

$$a \|\mathbf{x}'(z)\| \leqslant |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z)\rangle| \quad \text{a.p.t. pe } K,$$

$$a \leqslant \|\mathbf{x}(z)\| \leqslant 2 - a \quad \text{a.p.t. pe } K.$$

Demostrația este analoagă cu cea a propoziției precedente, ținînd seama de propoziția 12′.

Propoziția 14. *Fie* $\mathbf{x}$ *un cîmp de vectori măsurabili și* (K_n) *un șir de mulțimi compacte. Pentru orice* $0 < a < 1$ *există un cîmp de funcționale măsurabil* $\mathbf{x}'$, *astfel încît*

$$a \|\mathbf{x}(z)\| \leqslant |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z)\rangle| \quad \text{a.p.t. pe } \bigcup_n K_n$$

$$a \leqslant \|\mathbf{x}'(z)\| \leqslant 2 - a \quad \text{a.p.t. pe } \bigcup_n K_n$$

Demonstrație. După propoziția 13, pentru fiecare n există o mulțime neglijabilă $A_n \subset K_n$ și un cîmp de funcționale măsurabil $\mathbf{x}'_n$, astfel încît

$$a \|\mathbf{x}(z)\| \leqslant |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'_n(z)\rangle| \quad \text{pentru } z \in K_n \cap \complement A_n,$$

$$a \leqslant \|\mathbf{x}'_n(z)\| \leqslant 2 - a \qquad \text{pentru } z \in K_n \cap \complement A_n,$$

$$\mathbf{x}'_n(z) = 0 \qquad \text{pentru } z \in A_n \cup \complement K_n.$$

Fie (B_n) un șir de mulțimi măsurabile, astfel încît $B_n \subset K_n \cap \complement A_n$ pentru fiecare n, și $\bigcup_n B_n = \bigcup_n (K_n \cap \complement A_n)$. Atunci $\mathbf{x}'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{B_n}(z)\mathbf{x}'_n(z)$ este măsurabil și verifică condițiile cerute

Propoziția 14′. *Fie* $\mathbf{x}'$ *un cîmp de funcționale măsurabil și* (K_n) *un șir de mulțimi compacte. Pentru orice* $0 < a < 1$ *există un cîmp de vectori măsurabil* $\mathbf{x}$, *astfel încît*

$$a\|\mathbf{x}'(z)\| \leqslant |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z)\rangle| \qquad \text{a.p.t. pe } \bigcup_n K_n,$$

$$a \leqslant \|\mathbf{x}(z)\| \leqslant 2 - a \qquad \text{a.p.t. pe } \bigcup_n K_n.$$

Demonstrația este asemănătoare celei a propoziției 14, ținînd seama de propoziția 13′.

Corolar. *Pentru orice* $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^0_a$ *și orice* $0 < a < 1$ *există* $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{a'}$, *astfel încît*

$$a\|\mathbf{x}(z)\| \leqslant |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z)\rangle| \qquad \text{a.p.t.}$$

și

$$a \leqslant \|\mathbf{x}'(z)\| \leqslant 2 - a \qquad \text{a.p.t. acolo unde } \mathbf{x}(z) \neq 0.$$

În corolarul precedent $\mathbf{x}$ și $\mathbf{x}'$ se pot schimba între ei.

Cîmpurile de vectori au fost folosite înaintea lui R. Godement de Mahlon M. Day, începînd din 1941, într-o serie de note [5], [6], [7], în care studiază convexitatea uniformă a spațiilor Banach. George W. Mackey [36] în 1952 studiază sub o formă puțin diferită cîmpurile de vectori definite pe o mulțime abstractă. Bertram Yood [46] studiază cîmpuri de vectori definite pe o mulțime abstractă în care spațiile tangente sînt algebre Banach. Au mai studiat, de asemenea, cîmpurile de vectori J. von Neumann [38], Israel Halperin [19], C. T. Ionescu Tulcea [21], [22], Jean Dieudonné [10], [11] și Jacques Dixmier [12].

Capitolul II

SPAȚIILE $\mathcal{O}^{\Phi}_a$

În acest capitol se introduce o clasă auxiliară de spații de cîmpuri de vectori, $\mathcal{O}^{\Phi}_a$, care vor servi în capitolul III pentru definirea spațiilor $\mathfrak{L}^{\Phi}_a$. În anumite condiții spațiile $\mathcal{O}^{\Phi}_a$ sînt spații vectoriale.

Fie $\Phi(u)$ o funcție reală pozitivă (finită sau infinită) definită pe $[0,\infty]$, crescătoare, continuă la stînga, astfel că $\lim_{u\to 0}\Phi(u)=0$ și $\lim_{u\to\infty}\Phi(u)=\infty$. Rezultă că $\Phi(0)=0$; funcția Φ este măsurabilă Lebesgue.

Definiția 1. *Un cîmp de vectori măsurabil* $\mathbf{x}$ *este* Φ*-sumabil dacă funcția scalară* $z\to\Phi(\|\mathbf{x}(z)\|)$ *este* μ*-sumabilă. Vom nota cu* $\mathcal{O}_a^\Phi$ *mulțimea cîmpurilor de vectori* Φ*-sumabile și cu* $|\mathbf{x}|_\Phi$ *integrala* $\int\Phi(\|\mathbf{x}(z)\|)d\mu(z)$.

Vom spune că un șir $(\mathbf{x}_n)$ de cîmpuri de vectori din $\mathcal{O}_a^\Phi$ este Φ—convergent către un cîmp de vectori $\mathbf{x}\in\mathcal{O}_a^\Phi$, dacă $\lim_{n\to\infty}|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}|_\Phi=0$, și vom scrie uneori $\mathbf{x}_n\xrightarrow{\Phi}\mathbf{x}$.

Propoziția 1. *Dacă* $\Phi(u)>0$ *pentru* $u>0$, *atunci* $|\mathbf{x}|_\Phi=0$ *dacă, și numai dacă,* $\mathbf{x}(z)=0$ a.p.t.

Demonstrația este imediată.

Propoziția 2. *Dacă* α_n, α *sînt numere complexe și* $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$, *atunci* $\alpha_n\mathbf{x}\xrightarrow{\Phi}\alpha\mathbf{x}$ *pentru orice* $\mathbf{x}\in\mathcal{O}_a^\Phi$.

Demonstrație. Putem presupune $|\alpha_n-\alpha|<1$ pentru orice n. Deoarece Φ este continuă în origine, $\lim_{n\to\infty}\Phi(|\alpha_n-\alpha|\,\|\mathbf{x}(z)\|)=0$ pentru orice $z\in Z$. Observînd că pentru fiecare n

$$\Phi(|\alpha_n-\alpha|\,\|\mathbf{x}(z)\|)\leqslant\Phi(\|\mathbf{x}(z)\|)$$

și aplicînd teorema lui Lebesgue, deducem că

$$\lim_{n\to\infty}\int\Phi(|\alpha_n-\alpha|\,\|\mathbf{x}(z)\|)d\mu(z)=0,$$

adică $\lim_{n\to\infty}|\alpha_n\mathbf{x}-\alpha\mathbf{x}|_\Phi=0$.

Dacă funcția Φ nu verifică anumite condiții suplimentare spațiul $\mathcal{O}_a^\Phi$ nu este liniar. În continuarea acestui capitol vom presupune că Φ verifică următoarea condiție:

(Δ) *există un număr* $M>1$ *astfel încît* $\Phi(2u)\leqslant M\Phi(u)$ *pentru* $u\geqslant 0$.

Exemple de funcții care verifică această condiție, sînt funcțiile u^p, $(0<p<\infty)$.

Din condiția (Δ) rezultă următoarele proprietăți pentru funcția Φ:

1) $0<\Phi(u)<\infty$, dacă $0<u<\infty$,

2) $\Phi(u+v)\leqslant M(\Phi(u)+\Phi(v))$, $u,v\geqslant 0$,

3) $\Phi(\alpha u)\leqslant M^n\Phi(u)$, dacă $0\leqslant\alpha\leqslant 2^n$,

4) $\Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}M^n\Phi(a_n)$ pentru orice șir (a_n) de numere $\geqslant 0$,

5) $|\Phi(u)-\Phi(v)|\leqslant M\,\Phi(|u-v|)$, $u,v\geqslant 0$.

Demonstrație 1) Dacă ar exista $u_0 > 0$, astfel încît $\Phi(u_0) = 0$ am avea $\Phi(2^n u_0) \leqslant M^n \Phi(u_0) = 0$ pentru orice n, și deci $\Phi(u) \equiv 0$, ceea ce contrazice $\lim_{u\to\infty} \Phi(u) = \infty$.

Dacă ar exista $u_1 < \infty$, astfel încît $\Phi(u_1) = \infty$, am avea $\Phi(u_1) \leqslant M^n \Phi\left(\frac{u_1}{2^n}\right)$ și deci $\Phi(u) \equiv \infty$, ceea ce contrazice $\lim_{u\to 0} \Phi(u) = 0$.

2) Să presupunem $u \geqslant v$. Atunci

$$\Phi(u + v) \leqslant \Phi(2u) \leqslant M\Phi(u) \leqslant M(\Phi(u) + \Phi(v))$$

3) Evident.

4) Avem evident $\Phi(a_1) \leqslant M\Phi(a_1)$. Să presupunem că $\Phi\left(\sum_{k=1}^{n} a_n\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M^k \Phi(a_k)$ și să demonstrăm că inegalitatea are loc pentru $n+1$ numere :

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right) \leqslant M\Phi(a_1) + M\Phi\left(\sum_{k=2}^{n+1} a_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant M\Phi(a_1) + M\sum_{k=2}^{n+1} M^{k-1}\Phi(a_k) = \sum_{k=1}^{n+1} M^k \Phi(a_k)$$

Rezultă prin inducție completă că inegalitatea 4) are loc pentru orice șir finit. Dar funcția Φ fiind continuă la stînga, avem

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) = \Phi\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} M^k \Phi(a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} M^k \Phi(a_k).$$

5) Dacă $a \geqslant b \geqslant 0$, atunci $\Phi(a+b) \leqslant \Phi(2a) \leqslant M\Phi(a) \leqslant M\Phi(a) + \Phi(b)$, deci $0 \leqslant \Phi(a+b) - \Phi(b) \leqslant M\Phi(a)$.

Dacă punem $a + b = u$ și $b = v$, atunci $a = u - v$, $u \geqslant v$, deci

$$0 \leqslant \Phi(u) - \Phi(v) \leqslant M\Phi(u - v).$$

Dacă $u \leqslant v$ avem

$$0 \leqslant |\Phi(u) - \Phi(v)| = \Phi(v) - \Phi(u) \leqslant M\Phi(v - u) = M\Phi(|u - v|).$$

P r o p o z i ț i a 3. *$\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ este un spațiu vectorial.*
Aceasta rezultă imediat din 2) și 3).

P r o p o z i ț i a 4. *Funcția $\mathbf{x} \to |\mathbf{x}|_\Phi$ definită pe $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ are următoarele proprietăți* :

(i) $|\mathbf{x}|_\Phi = 0$ *dacă, și numai dacă,* $\mathbf{x}(z) = 0$ a.p.t. ;

(ii) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|_\Phi \leqslant M(|\mathbf{x}|_\Phi + |\mathbf{y}|_\Phi)$;

(iii) $|\alpha \mathbf{x}|_\Phi \leqslant M^n |\mathbf{x}|_\Phi$, *dacă* $|\alpha| \leqslant 2^n$;

(iv) *dacă* $\mathbf{x}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbf{x}$ *și* $\mathbf{y}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbf{y}$ *atunci* $\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbf{x} + \mathbf{y}$;

(v) *dacă* $\alpha_n \to \alpha$ $(\alpha_n, \alpha \in C)$, *atunci* $\alpha_n \mathbf{x} \xrightarrow{\Phi} \alpha \mathbf{x}$ *pentru orice* $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_a^\Phi$;

(vi) *dacă* $\mathbf{x}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbf{x}$, *atunci* $\alpha \mathbf{x}_n \xrightarrow{\Phi} \alpha \mathbf{x}$ *pentru orice* $\alpha \in C$;

(vii) *dacă* $\mathbf{x}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbf{x}$ *și* $\alpha_n \xrightarrow{\Phi} \alpha$, *atunci* $\alpha_n \mathbf{x}_n \xrightarrow{\Phi} \alpha \mathbf{x}$;

(viii) *dacă* $\mathbf{x}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbf{x}$ *atunci* $|\mathbf{x}_n|_\Phi \to |\mathbf{x}|_\Phi$.

(ix) $||\mathbf{x}|_\Phi - |\mathbf{y}|_\Phi| \leqslant M |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_\Phi$.

Demonstrație. Proprietățile (i) și (v) au fost demonstrate (propoziția 1 și propoziția 2);

(ii) și (iii) rezultă din proprietățile 2) și 3) ale lui Φ.

(iv) $|\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n - (\mathbf{x} + \mathbf{y})|_\Phi = |(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}) + (\mathbf{y}_n - \mathbf{y})|_\Phi \leqslant$
$\leqslant M(|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|_\Phi + |\mathbf{y}_n - \mathbf{y}|_\Phi) \to 0$

(vi) rezultă din (iii)

(vii) $|\alpha_n \mathbf{x}_n - \alpha \mathbf{x}|_\Phi = |\alpha_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}) + (\alpha_n - \alpha)\mathbf{x}|_\Phi \leqslant$
$\leqslant M|\alpha_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{x})|_\Phi + M|(\alpha_n - \alpha)\mathbf{x}|_\Phi \leqslant$
$\leqslant M^{k+1}|(\mathbf{x}_n - \mathbf{x})|_\Phi + M|(\alpha_n - \alpha)\mathbf{x}|_\Phi$,

dacă presupunem că $|\alpha_n| \leqslant 2^k$ pentru orice n. Folosind (v), deducem că ultimul membru tinde către zero.

(viii) $|\Phi(\|\mathbf{x}_n(z)\|) - \Phi(\|\mathbf{x}(z)\|)| \leqslant M\Phi(|\|\mathbf{x}_n(z)\| - \|\mathbf{x}(z)\||) \leqslant$
$\leqslant M\Phi(\|\mathbf{x}_n(z) - \mathbf{x}|(z)\|)$,

de unde

$$\left| |\mathbf{x}_n|_\Phi - |\mathbf{x}|_\Phi \right| = \left| \int \left[\Phi(\|\mathbf{x}_n(z)\|) - \Phi(\|\mathbf{x}(z)\|) \right] d\mu(z) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int \left| \Phi(\|\mathbf{x}_n(z)\|) - \Phi(\|\mathbf{x}(z)\|) \right| d\mu(z) \leqslant M \int \Phi(\|\mathbf{x}_n(z) - \mathbf{x}(z)\|) d\mu(z) =$$

$$= M|\mathbf{x} - \mathbf{x}|_\Phi \to 0.$$

În acest mod s-a demonstrat și inegalitatea (ix).

Propoziția 5. *Fie* $(\mathbf{x}_n)$ *un șir de cîmpuri de vectori din* $\mathcal{O}_a^\Phi$, *astfel ca* $\sum_{n=1}^{\infty} M^n |x_n|_\Phi < \infty$. *Atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n(z)$ *este absolut convergentă a.p.t. Dacă punem* $\mathbf{x}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n(z)$ *în punctele de convergență și* $\mathbf{x}(z) = 0$ *în celelalte puncte, atunci* $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_a^\Phi$ *și pentru orice n avem*

$$\left| \mathbf{x} - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k \right|_\Phi \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} M^k |\mathbf{x}_k|_\Phi .$$

Demonstrație. Să considerăm funcția finită sau infinită

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \| \mathbf{x}_n(z) \|.$$

Atunci

$$| f |_{\Phi} = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \| \mathbf{x}_n(z) \| \right|_{\Phi} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M^n | \mathbf{x}_n |_{\Phi},$$

deci $\Phi(f(z)) < \infty$ a.p.t., adică $f(z) < \infty$ a.p.t. Rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n(z)$ este absolut convergentă, deci convergentă, a.p.t.

Dacă $\mathbf{x}$ este cîmpul de vectori definit în enunț, $\mathbf{x}$ este măsurabil și avem

$$\| \mathbf{x}(z) \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \| \mathbf{x}_n(z) \| = f(z).$$

Atunci

$$\int \Phi(\| \mathbf{x}(z) \|)\, d\mu(z) \leqslant \int \Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \| \mathbf{x}_n(z) \| \right) d\mu(z) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M^n \int \Phi(\| \mathbf{x}_n(z) \|) d\mu(z),$$

deci $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_a^{\Phi}$. Pentru orice n avem

$$\| \mathbf{x}(z) - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k(z) \| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \| \mathbf{x}_n(z) \| \qquad \text{a.p.t.,}$$

deci

$$\left| | \mathbf{x} - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k \right|_{\Phi} \leqslant \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbf{x}_k \right|_{\Phi} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} M^k | \mathbf{x}_k |_{\Phi}$$

Un șir $(\mathbf{x}_n)$ de cîmpuri de vectori din $\mathcal{O}_a^{\Phi}$ se numește șir Φ-Cauchy dacă $| \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m | \to 0$ cînd $n, m \to \infty$.

P r o p o z i ț i a 6. *Pentru orice șir Φ-Cauchy $(\mathbf{x}_n)$ de elemente din $\mathcal{O}_a^{\Phi}$ există un cîmp de vectori $\mathbf{x} \leftarrow \mathcal{O}_a^{\Phi}$, astfel încît $\mathbf{x}_n \xrightarrow{\Phi} \mathbf{x}$.*

Demonstrație. Fie $(\mathbf{x}_n)$ un șir Φ-Cauchy. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr întreg N_{ε}, astfel încît pentru n, $m > N_{\varepsilon}$ să avem

$$| \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m |_{\Phi} < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Putem găsi atunci un șir strict crescător de numere naturale (n_k), astfel încît

$$| \mathbf{x}_{n_{k+1}} - \mathbf{x}_{n_k} |_{\Phi} \leqslant \frac{1}{2^k M^k}.$$

Dacă punem $\mathbf{y}_k(z) = \mathbf{x}_{n_{k+1}}(z) - (\mathbf{x}_{n_k}(z)$, atunci $M^k | \mathbf{y}_k |_\Phi \leqslant \frac{1}{2^k}$ și deci $\sum_{k=1}^{\infty} M^k | \mathbf{y}_k |_\Phi < \infty$. După propoziția 4 seria $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{y}_n(z)$ este absolut convergentă a.p.t. către un cîmp de vectori $\mathbf{y} \in \mathcal{O}_a^\Phi$. Atunci cîmpul de vectori $\mathbf{x}(z) = \mathbf{y}(z) + \mathbf{x}_{n_1}(z)$ este limita șirului $(\mathbf{x}_{n_k})$ și, după propoziția 4,

$$| \mathbf{x} - \mathbf{x}_{n_k} |_\Phi < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \text{pentru } n > N'_\varepsilon$$

Atunci

$$| \mathbf{x} - \mathbf{x}_n |_\Phi = | \mathbf{x} - \mathbf{x}_{n_k} + \mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{x}_n |_\Phi \leqslant$$

$$\leqslant M(| \mathbf{x} - \mathbf{x}_{n_k} |_\Phi + | \mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{x}_n |_\Phi) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

dacă $n > \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$.

P r o p o z i ț i a 7. *Mulțimea $\mathfrak{L}_\mathcal{A}$ a cîmpurilor de vectori continuu cu suport compact este un subspațiu vectorial al spațiului $\mathcal{O}_\mathcal{A}^\Phi$; pentru orice cîmp de vectori $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\mathcal{A}^\Phi$ există un șir $\mathbf{x}_n$ de cîmpuri de vectori mărginite din $\mathcal{O}_\mathcal{A}^\Phi$, Φ-convergent către* $\mathbf{x}$.

Demonstrație. Dacă $\mathbf{x}$ este un cîmp de vectori continuu cu suport compact, $\Phi(\|\mathbf{x}(z)\|)$ este o funcție scalară mărginită cu suport compact, deci sumabilă (chiar dacă în locul condiției (Δ) presupunem că $\Phi(u) < \infty$ pentru $u < \infty$).

Fie $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\mathcal{A}^\Phi$ și să arătăm că există un șir $(\mathbf{x}_n)$ de cîmpuri de vectori mărginite din $\mathcal{O}_\mathcal{A}^\Phi$, care este Φ-convergent către $\mathbf{x}$.

Pentru orice număr natural n să punem

$$\mathbf{x}_n(z) = \begin{cases} \mathbf{x}(z) & \text{dacă } \|\mathbf{x}(z)\| \leqslant n, \\ n \dfrac{\mathbf{x}(z)}{\|\mathbf{x}(z)\|} & \text{dacă } \|\mathbf{x}(z)\| > n. \end{cases}$$

Avem $\|\mathbf{x}_r(z)\| \leqslant n$; $\mathbf{x}_n$ este un cîmp de vectori măsurabil și mărginit, Φ-sumabil, deoarece $\|\mathbf{x}_n(z)\| \leqslant \|\mathbf{x}(z)\|$. Pentru orice $z \in Z$, $\mathbf{x}_n(z) \to \mathbf{x}(z)$, și

$$\|\mathbf{x}_n(z) - \mathbf{x}(z)\| \leqslant \|\mathbf{x}_n(z)\| + \|\mathbf{x}(z)\| \leqslant 2\|\mathbf{x}(z)\|.$$

De aici deducem, pentru orice $z \in Z$,

$$\Phi(\|\mathbf{x}_n(z) - \mathbf{x}(z)\|) \to 0,$$

$$\Phi(\|\mathbf{x}_n(z) - \mathbf{x}(z)\|) \leqslant \Phi(2\|\mathbf{x}(z)\|) \leqslant M\Phi(\|\mathbf{x}(z)\|)$$

și, aplicînd teorema lui Lebesgue, deducem

$$\lim_{n\to\infty} \int \Phi(\|\mathbf{x}_n(z) - \mathbf{x}(z)\|)\, d\mu(z) = 0, \text{ adică } \lim_{n\to\infty} | \mathbf{x}_n - \mathbf{x} |_\Phi = 0.$$

Funcția $\mathbf{x} \to |\mathbf{x}|_\Phi$ are proprietăți asemănătoare cu ale unei seminorme; Φ-convergența definește pe $\mathcal{O}_a^\Phi$ o topologie compatibilă cu structura de spațiu vectorial a lui $\mathcal{O}_a^\Phi$ (propoziția 4, proprietățile (v) și (vii)). Cu această topologie $\mathcal{O}_a^\Phi$ nu este un spațiu local convex. Vom introduce o nouă topologie pe $\mathcal{O}_a^\Phi$, echivalentă cu prima.

Propoziția 8. *Familia de părți de forma*

$$U_n = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \,\middle|\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{O}_a^\Phi, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_\Phi \leqslant \frac{1}{n}\right\}$$

este un sistem fundamental de împrejurimi ale unei structuri uniforme $\mathcal{U}$ *pe* $\mathcal{O}_a^\Phi$.

Demonstrație. Să verificăm axiomele unui sistem fundamental de împrejurimi [2]:

1) pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_a^\Phi$ și orice U_n avem $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in U_n$;
2) dacă $n \leqslant m$, $U_m \subset U_n$;
3) U_n sînt simetrice: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U_n$ dacă și numai dacă $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in U_n$;
4) dacă $2Mm \leqslant n$, atunci $U_n^2 \subset U_m$. Într-adevăr, dacă $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in U_n$ și $(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \in U_n$ avem $|\mathbf{x} - \mathbf{z}|_\Phi \leqslant \frac{1}{n}$ și $|\mathbf{z} - \mathbf{y}|_\Phi \leqslant \frac{1}{n}$, deci $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_\Phi =$

$= |\mathbf{x} - \mathbf{z} + \mathbf{z} - \mathbf{y}|_\Phi \leqslant M(|\mathbf{x} - \mathbf{z}|_\Phi + \mathbf{z} - \mathbf{y}|_\Phi) \leqslant \frac{2M}{n} \leqslant \frac{1}{m}$ și deci $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U_m$.

Fie τ topologia dedusă pe $\mathcal{O}_a^\Phi$ din structura uniformă $\mathcal{U}$. Deoarece sistemul de vecinătăți ale originii în $\mathcal{O}_a^\Phi$ este numărabil, există un ecart d pe $\mathcal{O}_a^\Phi$, care definește o structură uniformă pe $\mathcal{O}_a^\Phi$, identică cu $\mathcal{U}$.

Propoziția 9. *Un șir* $(\mathbf{x}_n)$ *din* $\mathcal{O}_a^\Phi$ *este convergent către* $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_a^\Phi$ *pentru topologia* τ *dacă, și numai dacă,* $\mathbf{x}_n \overset{\Phi}{\to} \mathbf{x}$.

Demonstrație. Fie $\mathbf{x}_n \overset{\Phi}{\to} \mathbf{x}$, adică $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|_\Phi \to 0$. Pentru orice număr întreg $k > 0$ există un număr natural $N = N_k$, astfel încît $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|_\Phi \leqslant \frac{1}{k}$, dacă $n \geqslant N$ și deci secțiunea $S_{N_k} = \{\mathbf{x}_n \mid n \geqslant N_k\} \subset V_k(\mathbf{x})$, adică filtrul elementar asociat șirului $(\mathbf{x}_n)$ converge către $\mathbf{x}$ în topologia τ, adică $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ în τ.

Reciproc, dacă $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ în τ, filtrul elementar asociat șirului $(\mathbf{x}_n)$ este mai fin decît filtrul vecinătăților lui $\mathbf{x}$ în τ. Deci pentru orice întreg $k > 0$, există o secțiune S_{N_k}, astfel încît $S_{N_k} \subset V_k(\mathbf{x})$, adică

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|_\Phi \leqslant \frac{1}{k} \text{ dacă } n \geqslant N_k,$$

ceea ce înseamnă că $\mathbf{x}_n \overset{\Phi}{\to} \mathbf{x}$.

Urmează că topologia τ este compatibilă cu structura de spațiu vectorial a lui $\mathcal{E}_a^\Phi$.

P r o p o z i ț i a 10. *Spațiul separat O_a^Φ asociat lui $\mathcal{E}_a^\Phi$ este un spațiu vectorial metrizabil complet.*

Demonstrație. Mulțimea $\mathfrak{N}$ a cîmpurilor $x \in \mathcal{E}_a^\Phi$ pentru care $|x|_\Phi = 0$ (cîmpurile neglijabile) este un subspațiu vectorial închis al lui $\mathcal{E}_a^\Phi$. Avînd un sistem fundamental de vecinătăți ale originii numărabil, $\mathcal{E}_a^\Phi$ este metrizabil, distanța pe O_a^Φ fiind indusă prin factorizare din ecartul d de pe $\mathcal{E}_a^\Phi$. În plus O_a^Φ este complet, deoarece $\mathcal{E}_a^\Phi$ este complet (propoziția 6).

Exemple. Dacă $\Phi(u) = u^p$, $(1 \leqslant p < \infty)$ condiția (Δ) este verificată cu $M = 2^p$. În acest caz spațiile $\mathcal{L}_a^p$ și $\mathcal{E}_a^\Phi$ conțin aceleași elemente, iar topologiile de pe $\mathcal{L}_a^p$ și $\mathcal{E}_a^\Phi$ sînt echivalente.

Capitolul III

SPAȚIILE $\mathcal{L}_a^\Phi$

În acest capitol se introduc spațiile vectoriale $\mathcal{L}_a^\Phi$ formate din cîmpuri de vectori (sau cîmpuri de funcționale) și care extind spațiile Orlicz formate din funcții numerice. În același timp spațiile $\mathcal{L}_a^p$, introduse de G o d e m e n t (cap. I) se regăsesc printre spațiile $\mathcal{L}_a^\Phi$. Se întreprinde un studiu amănunțit al proprietăților acestor spații.

§ 1. Funcții complementare în sensul lui Young

Fie φ o funcție reală definită pe $[0, \infty]$ care are proprietățile:

(φ_1) $\varphi(0) = 0$; $0 < \varphi(t) < \infty$, dacă $0 < t < \infty$;

(φ_2) φ este crescătoare (dacă $t_1 < t_2$, atunci $\varphi(t_1) \leqslant \varphi(t_2)$);

(φ_3) φ este continuă la stînga.

Să introducem funcția ψ „inversa" lui φ prin $\psi(0) = 0$ și $\psi(s) = \sup \{t \varphi(t) < s\}$ pentru $s > 0$. Funcția ψ are următoarele proprietăți:

(ψ_1) $\psi(0) = 0$; dacă φ este continuă în origine, atunci $\psi(t) > 0$ pentru $t > 0$;

(ψ_2) este crescătoare;

(ψ_3) este continuă la stînga.

Dacă $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = l < \infty$, atunci $\psi(t) = \infty$ pentru $t > l$.

Funcțiile φ și ψ sînt măsurabile Lebesgue. Funcțiile

$$\Phi(u) = \int_0^u \varphi(t)\,dt, \qquad \Psi(v) = \int_0^v \psi(t)\,dt$$

sînt „complementare în sensul lui Young" (vezi de exemplu [50]).

Funcția Φ are următoarele proprietăți :

1) este continuă

2) $\Phi(0) = 0$;

3) este strict crescătoare (dacă $u_1 < u_2$, atunci $\Phi(u_1) < \Phi(u_2)$) ;

4) $0 < \Phi(u) < \infty$, dacă $0 < u < \infty$;

5) $\lim_{u\to\infty} \Phi(u) = \infty$.

Funcția Ψ are următoarele proprietăți :

1) este continuă în punctele în care este finită, cu excepția de la punctul 4) de mai jos ;

2) $\Psi(0) = 0$;

3) este crescătoare ; dacă $v_1 < v_2$, atunci $\Psi(v_1) \leqslant \Psi(v_2)$; dacă $\Psi(v_1) \neq 0$, atunci $\Psi(v)$ este strict crescătoare pentru $v \geqslant v_1$, dacă $\Psi(v) < \infty$;

4) dacă $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$, atunci $\Psi(v) < \infty$ pentru $v < \infty$; dacă $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = l < \infty$, atunci $\Psi(v) < \infty$ pentru $v \leqslant l$ și $\Psi(v) = \infty$ pentru $v > l$.

Funcțiile Φ și Ψ verifică *inegalitatea lui Young*

$$uv \leqslant \Phi(u) + \Psi(v)$$

cu egalitate, dacă, și numai dacă, are loc cel puțin una din următoarele egalități :

$$v = \varphi(u), \quad u = \psi(v) \qquad [50].$$

Din proprietățile funcției Φ și ale integralei rezultă că $\mathcal{O}_a^{\Phi} \subset \mathfrak{M}_a^0$. Dacă $\Psi(v) > 0$ pentru $v > 0$, atunci $\mathcal{O}_a^{\Psi} \subset \mathfrak{M}_a^0$; dacă însă $\Psi(v_0) = 0$ pentru un $v_0 > 0$, ar putea exista un cîmp măsurabil $\mathbf{x}$, astfel ca $0 < \| \mathbf{x}(z) \| \leqslant v_0$ pentru orice $z \in Z$, deci $| \mathbf{x} |_{\Psi} = 0$, dar $\mathbf{x} \notin \mathfrak{M}_a^0$ dacă Z nu este numărabil la ∞ sau, mai general, dacă Z nu este reuniune numărabilă de mulțimi de măsură finită.

Dacă $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = l < \infty$, deci dacă $\Psi(v) = \infty$ pentru $v > l$, atunci pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_a^{\psi}$ avem $\| \mathbf{x}(z) \| \leqslant l$ a.p.t. Să observăm că dacă Ψ verifică condiția (Δ), atunci $0 < \Psi(v) < \infty$ pentru $0 < v < \infty$ și Ψ este strict crescător deci Ψ are în acest caz aceleași proprietăți ca și Φ.

Exemple. 1° Dacă $\varphi(t) = t^{p-1}$, $(1 < p < \infty)$, atunci $\Psi(t) = t^{q-1}$, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. În acest caz $\Phi(u) = \frac{1}{p} u^p$ și $\Psi(v) = \frac{1}{q} v^q$. Condiția (Δ) este verificată în același timp de Φ și de Ψ.

2° Dacă $\varphi(t) = 1$ pentru $t \neq 0$, atunci $\psi(t) = 0$ pentru $t \leqslant 1$ și $\psi(t) = \infty$ pentru $t > 1$, și deci $\Phi(u) = u$, $\Psi(v) = 0$, pentru $v \leqslant 1$, și $\Psi(v) = \infty$ pentru $v > 1$. În acest caz Φ verifică condiția (Δ) dar Ψ nu o verifică. Dacă $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\psi}$, atunci $\| \mathbf{x}(z) \| \leqslant 1$ a.p.t. și deci $| \mathbf{x} |_{\psi} = 0$.

§ 2. Seminormele $|\mathbf{x}|_{\Phi}$

Dacă Φ nu verifică condiția (Δ), mulțimea $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ nu este un spațiu vectorial și chiar dacă Φ verifică condiția (Δ), funcția $\mathbf{x} \to | \mathbf{x} |_{\Phi}$ nu este o seminormă pe $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$. Pentru a remedia acest neajuns se definesc spațiile $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ care conțin spațiile $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$, cu ajutorul unei seminorme $\| \mathbf{x} \|_{\Phi}$.

Fie Z un spațiu local compact, μ o măsură Radon pozitivă definită pe Z. Fie $\mathcal{E} = (E(z))_{z \in Z}$ o familie de spații Banach și $\mathcal{E}' = (E'(z))_{z \in Z}$ familia spațiilor duale. Să presupunem că există o familie fundamentală $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$ și o familie fundamentală $\mathcal{A}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ care verifică condiția următoare :

(*) *pentru orice* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ *și orice* $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'$, *funcția scalară* $z \to < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >$ *este continuă pe* Z.

Pentru orice de cîmp de vectori $\mathbf{x}$ (nu neapărat măsurabil) să punem

$$\| \mathbf{x} \|_{\Phi} = \sup_{|\mathbf{x}'|_{\Psi} \leqslant 1} \int^{*} | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z)$$

și pentru orice cîmp de funcționale $\mathbf{x}'$ (nu neapărat măsurabil) să punem

$$\| \mathbf{x}' \|_{\Psi} = \sup_{|\mathbf{x}|_{\Phi} \leqslant 1} \int^{*} | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z).$$

În mod analog se pot defini funcțiile $\| \mathbf{x} \|_{\Psi}$ și $\| \mathbf{x}' \|_{\Phi}$. În cele ce urmează vom explicita unele proprietăți ale funcțiilor $\| \mathbf{x} \|_{\Phi}$ și $\| \mathbf{x}' \|_{\Psi}$.

Funcțiile $\| \mathbf{x} \|_{\Phi}$ și $\| \mathbf{x}' \|_{\Psi}$ se pot calcula prin alte expresii dintre care unele sînt mai ușor de folosit în calculele ulterioare.

Propoziția 1. *Dacă* $\| \mathbf{x} \|_{\Phi} < \infty$, *atunci*

$$\| \mathbf{x} \|_{\Phi} = \sup_{\substack{\mathbf{x}' \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}'}^{0} \\ |\mathbf{x}'|_{\Psi} \leqslant 1}} \int^{*} | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z).$$

Demonstrație. Dacă $\| \mathbf{x} \|_{\Phi} < \infty$, atunci $\int^{*} | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z) < \infty$ pentru orice $\mathbf{x}' \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}'}$ cu $| \mathbf{x}' |_{\Psi} \leqslant 1$, prin urmare $< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > = 0$ a.p.t. în afara unui șir K_n de mulțimi compacte (care depinde de $\mathbf{x}'$). Dacă notăm $A = \bigcup_n K_n$ și punem $\mathbf{y}'(z) = \mathbf{x}'(z) \, \varphi_A(z)$, atunci $\mathbf{y}' \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}'}^{0}$, $| \mathbf{y}' |_{\Psi} \leqslant | \mathbf{x}' |_{\Psi} \leqslant 1$ și $< \mathbf{x}(z). \mathbf{x}'(z) > = < \mathbf{x}(z), \mathbf{y}'(z) >$ a.p.t., de unde rezultă propoziția.

Observații. 1° Propoziția 1 are obiect numai dacă $\Psi(v_0) = 0$ pentru un $v_0 > 0$, pentru că dacă $\Psi(v) > 0$ pentru $v > 0$, atunci propoziția 1 coincide cu definiția lui $\| \mathbf{x} \|_\Phi$, deoarece $\mathcal{O}^\Psi_{\mathcal{A}'} \subset \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$.

2° Pentru $\| \mathbf{x}' \|_\Psi$, propoziția 1 coincide cu definiția lui $\| \mathbf{x}' \|_\Psi$, deoarece $\mathcal{O}^\Phi_{\mathcal{A}} \subset \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}}$.

P r o p o z i ț i a 2. *Pentru orice* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ *cu* $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$ *avem*

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_K \| \mathbf{x}_K \|_\Phi,$$

unde am notat $\mathbf{x}_K = \varphi_K \mathbf{x}$, *și unde sup. se ia pentru toate mulțimile compacte* $K \subset Z$.

Demonstrație. Avem evident $\| \mathbf{x}_K \|_\Phi \leqslant \| \mathbf{x} \|_\Phi$ pentru orice mulțime compactă $K \subset Z$ și deci $\sup_K \| \mathbf{x}_K \|_\Phi \leqslant \| \mathbf{x} \|_\Phi$.

Dacă $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ și $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$, după propoziția 1, pentru orice $0 < a < 1$ există un cîmp de funcționale $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$, cu $| \mathbf{x}' |_\Psi \leqslant 1$, astfel încît

$$a \| \mathbf{x} \|_\Phi < \int^* | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z).$$

Fie (K_n) un șir crescător de mulțimi compacte, astfel încît notînd $A = \bigcup_n K_n$ să avem $\mathbf{x}'(z) = 0$ a.p.t. pe $\complement A$. Deoarece $\int^* | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z) =$

$$= \int^*_A | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z) = \sup_n \int^* | < \mathbf{x}_{K_n}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z),$$

există un compact K_n astfel încît

$$a \cdot \| \mathbf{x} \|_\Phi < \int^* | < \mathbf{x}_{K_n}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z) \leqslant \sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1} \int^* | < \mathbf{x}_{K_n}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z) =$$

$$= \| \mathbf{x}_{K_n} \|_\Phi \leqslant \sup_K \| \mathbf{x}_K \|_\Phi.$$

Făcînd $a \to 1$ obținem $\| \mathbf{x} \|_\Phi \leqslant \sup_K \| \mathbf{x}_K \|_\Phi$ și deci propoziția 2 este demonstrată.

Observații. 1° Dacă $\Psi(v) > 0$ pentru $v > 0$ avem $\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_K \| \mathbf{x}_K \|_\Phi$ și pentru $\| \mathbf{x} \|_\Phi = \infty$

Într-adevăr, dacă $\| \mathbf{x} \|_\Phi = \infty$, pentru orice număr N există $\mathbf{x}' \in \mathcal{O}^\Psi_{\mathcal{A}'} \subset \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$ cu $| \mathbf{x}' |_\Psi \leqslant 1$, astfel încît

$$\int^* | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z) > N.$$

Fie (K_n) un șir crescător de mulțimi compacte, astfel încît notînd $A = \bigcup_n K_n$

să avem $\mathbf{x}'(z) = 0$ a.p.t. pe $\complement A$. Atunci $\int^* |< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >| \, d\mu(z) = \int^* |< \mathbf{x}_A(z), \mathbf{x}'(z) >| \, d\mu(z) = \sup_n \int |< \mathbf{x}_{K_n}(z), \mathbf{x}'(z) >| \, d\mu(z)$ și deci există un compact K_n astfel încît

$$\int^* |< \mathbf{x}_{K_n}(z), \mathbf{x}'(z) >| \, d\mu(z) > N.$$

Urmează că

$$\sup_K \| \mathbf{x}_K \|_\Phi \geqslant \| \mathbf{x}_{K_n} \|_\Phi = \sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1} \int^* |< \mathbf{x}_{K_n}(z), \mathbf{x}'(z) >| \, d\mu(z) > N$$

și deci $\sup_K \| \mathbf{x}_K \|_\Phi = \infty$.

2° Avem, de asemenea, pentru orice $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}(\mathcal{S}')$

$$\| \mathbf{x}' \|_\Psi = \sup_K \| \mathbf{x}'_K \|_\Psi,$$

indiferent dacă $\| \mathbf{x}' \|_\Psi = \infty$ sau $\| \mathbf{x}' \|_\Psi < \infty$.

Pentru cîmpurile *măsurabile*, funcțiile $\| \mathbf{x} \|_\Phi$ și $\| \mathbf{x}' \|_\Psi$ se pot calcula și prin alte expresii care vor fi folosite în calculele următoare.

P r o p o z i ț i a 3. *Dacă* $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_\mathcal{A}$ și $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$, *atunci*

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1} \left| \int < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > d\mu(z) \right|.$$

Demonstrație. Dacă punem $< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > = \rho(z) \, e^{i\theta(z)}$ (unde se ia $e^{i\theta(z)} = 1$, dacă $\rho(z) = 0$), funcțiile $\rho(z)$ și $e^{i\theta(z)}$ sînt măsurabile. Atunci cîmpul $\mathbf{y}'(z) = \frac{\mathbf{x}'(z)}{e^{i\theta(z)}}$ este măsurabil și $\| \mathbf{y}'(z) \| = \| \mathbf{x}'(z) \|$, deci $| \mathbf{y}' |_\Psi \leqslant 1$, dacă $| \mathbf{x}' |_\Psi \leqslant 1$; urmează $< \mathbf{x}(z), \mathbf{y}'(z) > = \rho(z) = |< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >|$, de unde rezultă egalitatea dorită.

Observație. Propoziția 3 este valabilă și pentru $\| \mathbf{x}' \|_\Psi$, dacă $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$.

P r o p o z i ț i a 4. *Pentru orice* $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_\mathcal{A}$ *avem*

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1} \int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \| \, d\mu(z), \quad \textit{dacă} \ \| \mathbf{x} \|_\Phi = \infty,$$

și

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_{\substack{\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'} \\ |\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1}} \int \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \| \, d\mu(z), \quad \textit{dacă} \ \| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty.$$

Demonstrație. Avem

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1} \int^* |< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >| \, d\mu(z) \leqslant \sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1} \int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \| \, d\mu(z)$$

și dacă $\| \mathbf{x} \|_\Phi = \infty$, rezultă egalitatea (*chiar pentru* $\mathbf{x}$ *nemăsurabil*).

Dacă $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$, după propoziția 1 avem

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_{\substack{\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'} \\ |\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1}} \int |< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >| \, d\mu(z) \leqslant \sup_{\substack{\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'} \\ |\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1}} \int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \| \, d\mu(z).$$

Rămîne de demonstrat inegalitatea contrară. Fie $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$, cu $|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1$, și fie (K_n) un șir de mulțimi compacte în afara cărora $\mathbf{x}'(z) = 0$ a.p.t. Dar $\mathbf{x}$ fiind măsurabil, după propoziția 14 capitolul I, pentru orice $0 < a < 1$ există un cîmp de funcționale $\mathbf{x}'_1$ măsurabil din $\mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$, astfel încît, notînd $A = \bigcup_n K_n$, să avem

$$a \| \mathbf{x}(z) \| \leqslant | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'_1(z) > | \quad \text{a.p.t. pe } A,$$

$$a \leqslant \| \mathbf{x}'_1(z) \| \leqslant 2\text{-}a \quad \text{a.p.t. pe } A, \ \mathbf{x}'_1(z) = 0 \text{ pe } \complement A.$$

Atunci cîmpul $\mathbf{y}'(z) = \dfrac{\| \mathbf{x}'(z) \|}{2\text{-}a} \, \mathbf{x}'_1(z)$ este măsnrabil din $\mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$ și

$$\| \mathbf{y}'(z) \| \leqslant \| \mathbf{x}'(z) \| \text{ a.p.t., deci } |\mathbf{y}'|_\Psi \leqslant 1.$$

Avem

$$|< \mathbf{x}(z), \mathbf{y}'(z) >| = | < \mathbf{x}(z), \frac{\mathbf{x}'(z)}{2\text{-}a} \, \mathbf{x}'_1(z) > | \geqslant \frac{a}{2\text{-}a} \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \|$$

a.p.t., deci

$$\sup_{\substack{\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'} \\ |\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1}} \int \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \| \, d\mu(z) \leqslant \frac{2-a}{a} \sup_{\substack{\mathbf{y}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'} \\ |\mathbf{y}'|_\Psi \leqslant 1}} \int |< \mathbf{x}(z), \mathbf{y}'(z) >| \, d\mu(z) =$$

$$= \frac{2-a}{a} \| \mathbf{x} \|_\Phi .$$

Făcînd $a \to 1$ obținem inegalitatea dorită și deci propoziția 4 este complet demonstrată.

Observații. 1° Dacă $\Psi(v) > 0$ pentru $v > 0$, avem totdeauna

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1} \int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \| \, d\mu(z),$$

dacă $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_\mathcal{A}$, deoarece $\mathcal{E}^\Psi_{\mathcal{A}'} \subset \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$.

2° Pentru orice $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$ se demonstrează în același fel că avem

$$\| \mathbf{x}' \|_\Psi = \sup_{|\mathbf{x}|_\Phi \leqslant 1} \int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \| \, d\mu(z),$$

deoarece $\mathcal{E}^\Phi_\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}^0_\mathcal{A}$, oricît ar fi $\|\mathbf{x}'\|_\Psi$. Se folosește propoziția 14 capitolul I.

Propoziția 5. *Pentru orice* $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ *avem*

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_{|h|_\Psi \leqslant 1} \int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, | h(z) | \, d\mu(z), \quad \textit{dacă} \| \mathbf{x} \|_\Phi = \infty,$$

și

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_{\substack{h \in \mathfrak{M}_C^0 \\ |h|_\Psi \leqslant 1}} \int \| \mathbf{x}(z) \| \, | h(z) | \, d\mu(z), \quad \textit{dacă} \| x \|_\Phi < \infty.$$

Demonstrație. Deoarece funcția scalară $z \to \| \mathbf{x}'(z) \|$ este măsurabilă (aparține lui $\mathfrak{M}_C$, mulțimea funcțiilor scalare măsurabile definite pe Z), după propoziția 4, dacă $\| \mathbf{x} \|_\Phi = \infty$ avem $\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1} \int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \| \, d\mu(z) \leqslant$ $\leqslant \sup_{|h|_\Psi \geqslant 1} \int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, | h(z) | \, d\mu(z)$ și deci pentru $\| \mathbf{x} \|_\Phi = \infty$ avem egalitate (*chiar dacă* $\mathbf{x}$ *nu este măsurabil*).

Dacă $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$, atunci funcția scalară $z \to \| \mathbf{x}'(z) \|$ aparține lui $\mathfrak{M}^0_C$ și deci dacă $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$ avem, după propoziția 4,

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_{\substack{\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'} \\ |\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1}} \int \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \| \, d\mu(z) \leqslant \sup_{\substack{h \in \mathfrak{M}^0_C \\ |h|_\Psi \leqslant 1}} \int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, | h(z) | \, d\mu(z).$$

Pentru a demonstra inegalitatea contrară, după propoziția 7 capitolul I, pentru orice $h \in \mathfrak{M}^0_C$ există $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$, astfel încît $\| \mathbf{x}'(z) \| = | f(z) |$ a.p.t. și deci

$$\sup_{\substack{h \in \mathfrak{M}^0_C \\ |h|_\Psi \leqslant 1}} \int \| \mathbf{x}(z) \| \, | h(z) | \, d\mu(z) \leqslant \sup_{\substack{\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'} \\ |\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1}} \int \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \| \, d\mu(z) = \| \mathbf{x} \|_\Phi$$

și astfel propoziția 5 este complet demonstrată.

Observații. 1° Dacă $\Psi(v) > 0$ pentru $v > 0$, atunci avem totdeauna pentru $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ (indiferent dacă $\| \mathbf{x} \|_\Phi = \infty$ sau $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$)

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_{|h|_\Psi \leqslant 1} \int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, | h(z) | \, d\mu(z).$$

2° Pentru orice $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$, avem totdeauna

$$\| \mathbf{x}' \|_\Psi = \sup_{|h|_\Phi \leqslant 1} \int^* \| \mathbf{x}'(z) \| \, h(z) | \, d\mu(z).$$

Propoziția 6. *Un cîmp* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ *verifică* $\| \mathbf{x} \|_\Phi = 0$, *dacă, și numai dacă,* $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$ și $\mathbf{x}(z) = 0$ *local* a.p.t.

Demonstrație. Dacă $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$ avem după propoziția 2, $\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_K \| \varphi_K \mathbf{x} \|_\Phi$ și deci, dacă $\mathbf{x}(z) = 0$ local a.p.t., urmează că $\| \varphi_K \mathbf{x} \|_\Phi = 0$, deci $\| \mathbf{x} \|_\Phi = 0$.

Invers, dacă $\| \mathbf{x} \|_\Phi = 0$, avem $\| \varphi_K \mathbf{x} \|_\Phi = 0$ pentru orice mulțime compactă $K \subset Z$. Fie $K \subset Z$ o mulțime compactă. Există $p > 0$ astfel ca $\mu(K) \Psi(p) \leqslant 1$, deoarece Ψ este continuă și $\Psi(0) = 0$. Pentru orice $0 < a < 1$ există un cîmp $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ *măsurabil*, astfel încît

$$a \cdot \| \mathbf{x}(z) \| \leqslant | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \quad \text{a.p.t. pe } K,$$

$$a \leqslant \| \mathbf{x}'(z) \| \leqslant 2 - a \quad \text{a.p.t. pe } K, \mathbf{x}'(z) = 0 \text{ pe } \complement K.$$

Să luăm $\mathbf{y}'(z) = \frac{p}{2-a} \mathbf{x}'(z)$; $\mathbf{y}'$ este măsurabil și $\| \mathbf{y}'(z) \| \leqslant p \, \varphi_K(z)$; așadar, $| \mathbf{y}' |_\Psi \leqslant 1$ și din $\| \varphi_K \mathbf{x} \|_\Phi = 0$ rezultă

$$\int | < \mathbf{x}(z), \mathbf{y}'(z) > | \, d\mu(z) = 0,$$

deci $< \mathbf{x}(z), \mathbf{y}'(z) > = 0$ a.p.t. pe K și deci $\mathbf{x}(z) = 0$ a.p.t. pe K. Propoziția 6 este deci complet demonstrată.

Observație. 1° Dacă $\Psi(v) > 0$ pentru $v > 0$, în enunțul propoziției 6 nu mai este nevoie să presupunem $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$, pentru că în acest caz propoziția 2 este valabilă și pentru $\| \mathbf{x} \|_\Phi = \infty$

2° Pentru orice $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$, $\| \mathbf{x}' \|_\Psi = 0$, dacă, și numai dacă, $\mathbf{x}'(z) = 0$ local a.p.t.

În anumite cazuri propoziția 6 poate fi întărită :

Propoziția 7. *Dacă* $\Psi(v_0) = 0$ *pentru un* $v_0 > 0$ *și dacă* $\mathcal{A}$ *verifică axioma* (*G*), *atunci* $\| \mathbf{x} \|_\Phi = 0$, *dacă și numai dacă*, $\mathbf{x}(z) = 0$ a.p.t.

Demonstrație. Este evident că dacă $\mathbf{x}(z) = 0$ a.p.t., atunci $\| \mathbf{x} \|_\Phi = 0$. Invers, dacă $\| \mathbf{x} \|_\Phi = 0$, atunci $< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > = 0$ a.p.t. pentru fiecare $| \mathbf{x}' |_\Psi \leqslant 1$. Mai mult, pentru orice $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$, avem $< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > = 0$ a.p.t. Într-adevăr, dacă pentru $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$ punem $\mathbf{x}_1'(z) = \frac{\mathbf{x}'(z)}{\| \mathbf{x}'(z) \|} v_0$, dacă $\mathbf{x}'(z) \neq 0$, și $\mathbf{x}_1'(z) = 0$, dacă $\mathbf{x}'(z) = 0$, atunci $\mathbf{x}_1' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$ și $\| \mathbf{x}_1'(z) \| \leqslant v_0$, deci $| \mathbf{x}_1' |_\Psi = 0$ deci $< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > = < \mathbf{x}(z), \frac{\| \mathbf{x}'(z) \|}{v_0} \mathbf{x}_1'(z) > = \frac{\| \mathbf{x}'(z) \|}{v_0} < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}_1'(z) > = 0$ a.p.t. Cum $\mathcal{A}'$ verifică axioma (*G*), există un șir $(\mathbf{x}_n')$ de cîmpuri din $\mathcal{A}'$, astfel încît pentru fiecare $z \in Z$, mulțimea $\{ \mathbf{x}_n'(z) \}$ este densă în $E'(z)$. Urmează că există o mulțime neglijabilă A astfel încît pentru orice $z \in \complement A$, $< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}_n'(z) > = 0$, oricare ar fi n. Urmează că pentru $z \in \complement A$, $\mathbf{x}(z) = 0$, deci $\mathbf{x}$ este neglijabil.

Propoziția 8. *Dacă* $\Psi(v_0) = 0$ *pentru un* $v_0 > 0$ *și dacă* $\mathcal{A}'$ *verifică axioma* (G), *atunci* $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$ *implică* $\mathbf{x}(z) = 0$ a.p.t. *în afara unui șir de mulțimi compacte.*

Demonstrație. Dacă $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$, urmează că

$$\int^* | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z) < \infty$$

și că $< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > = 0$ a.p.t. în afara unui șir de mulțimi compacte pentru fiecare $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$ cu $| \mathbf{x}' |_\Psi \leqslant 1$, și chiar pentru orice $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$. Într-adevăr, dacă $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$, să punem $\mathbf{x}'_1(z) = \frac{\mathbf{x}'(z)}{\| \mathbf{x}'(z) \|} v_0$, dacă $\mathbf{x}'(z) \neq 0$, și $\mathbf{x}'_1(z) = 0$, dacă $\mathbf{x}'(z) = 0$. Evident $\mathbf{x}'_1 \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$ și $\| \mathbf{x}'_1(z) \| \leqslant v_0$, deci $| \mathbf{x}'_1 |_\Psi = 0$. Atunci $< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > = \frac{\| \mathbf{x}'(z) \|}{v_0} < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'_1(z) > = 0$ a.p.t. în afara unui șir de mulțimi compacte. Dacă $(\mathbf{x}'_n)$ este șirul de cîmpuri din $\mathcal{A}'$, astfel încît pentru orice $z \in Z$ mulțimea $\{\mathbf{x}'_n(z)\}$ să fie densă în $E'(z)$, există un șir (K_n) de mulțimi compacte, astfel încît, notînd $A = \bigcup_n K_n$, să avem

$$< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'_n(z) > = 0 \quad \text{a.p.t. pe } \complement A,$$

oricare ar fi n.

Urmează că $\mathbf{x}(z) = 0$ a.p.t. pe $\complement A$. Dacă în particular $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ și $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$, urmează $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}}$.

Observație. Mai departe se va arăta, fără a presupune axioma (G) și fără nici o presupunere asupra lui Ψ, că dacă $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ și $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$, atunci $\mathbf{x}(z) = 0$ *local* a.p.t. în afara unui șir de mulțimi compacte, și același lucru este valabil pentru $\| \mathbf{x}' \|_\Psi$, dacă $\Psi(v) > 0$ pentru $v > 0$.

Propozițiile enunțate în acest paragraf arată că pot exista cîmpuri local neglijabile cu seminorma $\| \mathbf{x} \|_\Phi = 0$. Aceste cîmpuri local neglijabile nu trebuie să aparțină spațiului $\mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ pentru a putea regăsi printre spațiile $\mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ spațiile $\mathfrak{L}^p_{\mathcal{A}}$. Pentru aceasta vom impune cîmpurilor din $\mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ să se anuleze a.p.t. în afara unui șir de mulțimi compacte. În cazul cînd $\Psi(v_0) = 0$ pentru un $v_0 > 0$, spațiile $\mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$ generalizează spațiile $\mathfrak{L}^\infty_{\mathcal{A}'}$, și restricția de mai sus nu se mai impune. Aceste lucruri se reflectă în definiția 1 din paragraful următor.

§ 3. Spațiile $\mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$. Definiție și proprietăți

D e f i n i ț i a 1. (i) *Spațiul* $\mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ *este mulțimea cîmpurilor de vectori* $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}}$ *pentru care* $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$.

(ii) *Dacă* $\Psi(v) > 0$ *pentru* $v > 0$, *spațiul* $\mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$ *este mulțimea cîmpurilor de funcționale* $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$ *pentru care* $\| x' \|_\Psi < \infty$.

(iii) *Dacă* $\Psi(v_0) = 0$ *pentru un* $v_0 > 0$, *spațiul* $\mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$ *este mulțimea cîmpurilor de funcționale* $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$ *pentru care* $\| \mathbf{x}' \|_\Psi < \infty$.

Spațiile introduse în definiția 1 generalizează o clasă de spații de funcții numerice $\mathfrak{L}^{\Phi}$ introduse de W. Orlicz [40], de aceea ele vor fi numite spații Orlicz de cîmpuri de vectori.

În cele ce urmează vor fi explicitate unele proprietăți, ale spațiilor $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și $\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$. Propozițiile enunțate pentru spațiul $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ vor fi valabile și pentru spațiul $\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$, dacă nu se va specifica în mod expres contrariul, și demonstrațiile vor fi aceleași pentru spațiile $\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ ca și pentru spațiile $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, cu deosebirile necesare în cazul cînd $\Psi(v_0) = 0$ pentru un $v_0 > 0$.

Propoziția 9. *$\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ este un spațiu vectorial și conține spațiul $\mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. Pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ avem $\| \mathbf{x} \|_{\Phi} \leqslant | \mathbf{x} |_{\Phi} + 1$.*

Demonstrație. Dacă $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{M}^{0}_{\mathcal{A}}$ și $\alpha, \beta \in C$, atunci $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \mathfrak{M}^{0}_{\mathcal{A}}$. Relațiile

$$\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \|_{\Phi} \leqslant \| \mathbf{x} \|_{\Phi} + \| \mathbf{y} \|_{\Phi}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}},$$

$$\| \alpha \mathbf{x} \|_{\Phi} = | \alpha | \, \| \mathbf{x} \|_{\Phi}, \quad \alpha \in C, \ \mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$$

se demonstrează fără dificultate și dovedesc că $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și $\alpha\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, dacă $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Inegalitatea lui Young, pentru $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ și $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}(\mathcal{S}')$, ne dă $| < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \leqslant \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \| \leqslant \Phi(\| \mathbf{x}(z) \|) + \Psi(\| \mathbf{x}'(z) \|)$ și dacă $\mathbf{x} \in \mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, $\mathbf{x}' \in \mathcal{O}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$, atunci

$$\int | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z) \leqslant | \mathbf{x} |_{\Phi} + | \mathbf{x}' |_{\Psi}.$$

Dacă impunem $| \mathbf{x}' |_{\Psi} \leqslant 1$ obținem $\| \mathbf{x} \|_{\Phi} \leqslant | \mathbf{x} |_{\Phi} + 1$.

Observații. 1° Funcția $\mathbf{x} \to \| \mathbf{x} \|_{\Phi}$ este o seminormă pe $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și pentru $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, $\| \mathbf{x} \|_{\Phi} = 0$, dacă, și numai dacă, $\mathbf{x}(z) = 0$ a.p.t. (propoziția 6 și definiția 1).

2° Dacă $\Psi(v) > 0$ pentru $v > 0$, $\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ este un spațiu liniar, $\| \mathbf{x}' \|_{\Psi}$ este o seminormă pe $\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ și pentru $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ $\| \mathbf{x}' \|_{\Psi} = 0$, dacă, și numai dacă, $\mathbf{x}'(z) = 0$ a.p.t. Pentru orice $\mathbf{x}' \in \mathcal{O}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ avem $\| \mathbf{x}' \|_{\Psi} \leqslant | \mathbf{x}' |_{\Psi} + 1$.

3° Dacă $\Psi(v_0) = 0$ pentru un $v_0 > 0$, $\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ este un spațiu liniar, $\| \mathbf{x}' \|_{\Psi}$ este o seminormă și pentru $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$, $\| \mathbf{x}' \|_{\Psi} = 0$, dacă și, numai dacă, $\mathbf{x}'(z) = 0$ local a.p.t. De asemenea, pentru $\mathbf{x}' \in \mathcal{O}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$, avem $\| \mathbf{x}' \|_{\Psi} \leqslant \leqslant \| \mathbf{x}' \|_{\Psi} + 1$.

Teorema 1. *Spațiul vectorial $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ este complet pentru seminorma $\| \mathbf{x} \|_{\Phi}$.*

Demonstrație. Deoarece spațiul separat $L^{\Phi}_{\mathcal{A}} = \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}} / \mathfrak{N}$, asociat lui $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ (unde $\mathfrak{N}$ este mulțimea cîmpurilor neglijabile) este normat, pentru a arăta că $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ este complet este suficient să arătăm că orice șir Cauchy din $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ este convergent. Fie $(\mathbf{x}_n)$ un șir Cauchy din $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și (K_n) un șir de

mulțimi compacte, astfel încît, punînd $A = \bigcup_n K_n$, să avem $\mathbf{x}_n(z) = 0$ a.p.t. pe $\complement A$, oricare ar fi n. Există un șir (A_n) de mulțimi *local compacte* din Z, două cîte două disjuncte, astfel încît $A_n \subset K_n$ pentru fiecare n și $\bigcup_n A_n = A$.

Pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un întreg $N(\varepsilon)$, astfel încît

$$\int \| \mathbf{x}_n(z) - \mathbf{x}_m(z) \| \; | h(z) | \, d\mu(z) < \varepsilon, \tag{1}$$

dacă $n, m > N(\varepsilon)$, oricare ar fi $h \in \mathfrak{M}_C^0$ cu $| h |_\Psi \leqslant 1$.

Fie $p > 0$, astfel încît $\mu(A_1)\Psi(p) \leqslant 1$. Dacă luăm $h_1(z) = p\varphi_{A_1}(z)$, atunci $h_1 \in \mathfrak{M}_C^0$ și $| h_1 |_\Psi \leqslant 1$, deci

$$\int \| \mathbf{x}_n(z) - \mathbf{x}_m(z) \| \; | h_1(z) | \, d\mu(z) = p \int \| \mathbf{x}_n(z) - \mathbf{x}_m(z) \| \, \varphi_{A_1}(z) \, d\mu(z) < \varepsilon,$$

dacă $n, m > N(\varepsilon)$. Așadar,

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \int_{A_1} \| \mathbf{x}_n(z) - \mathbf{x}_m(z) \| \, d\mu(z) = 0$$

și, deoarece $\mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}(A_1)$ este complet, există un cîmp de vectori $\mathbf{y}_1$ (pe care-l putem presupune nul pe $\complement A_1$) și un subșir $(\mathbf{x}_n^1)$ al șirului $(\mathbf{x}_n)$ convergent către $\mathbf{y}_1$ a.p.t. pe A_1. Prin același procedeu se poate găsi un subșir $(\mathbf{x}_n^2)$ al șirului $(\mathbf{x}_n^1)$, convergent a.p.t. pe A_2 către un cîmp de vectori $\mathbf{y}_2$ (presupus nul pe $\complement A_2$), și așa mai departe pentru fiecare n. Dacă punem $\mathbf{x}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{y}_n(z)$, $\mathbf{x}$ este măsurabil în $\mathfrak{M}^0_\mathcal{A}$ și șirul $(\mathbf{x}_n^n)$ converge a.p.t. pe Z către $\mathbf{x}$, cînd n tinde către infinit. Dacă în inegalitatea (1) facem pe $\mathbf{x}_m$ să parcurgă șirul $(\mathbf{x}_n^n)$ și aplicăm lema lui Fatou obținem

$$\int \| \mathbf{x}_n(z) - \mathbf{x}(z) \| \; | h(z) | \, d\mu(z) < \varepsilon,$$

dacă $n > N(\varepsilon)$, $h \in \mathfrak{M}_C^0$ cu $| h |_\Psi \leqslant 1$. Rezultă că $\mathbf{x}_n - \mathbf{x} \in \mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$, deci $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$ și $\| \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \|_\Phi < \varepsilon$ dacă $n > N(\varepsilon)$, deci $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ în $\mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$.

Dacă $\mathbf{y} \in \mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$ este astfel încît $\| \mathbf{x}_n - \mathbf{y} \|_\Phi \to 0$ cînd $n \to \infty$, atunci $\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_\Phi \leqslant \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_n \|_\Phi + \| \mathbf{y} - \mathbf{x}_n \|_\Phi \to 0$, deci $\mathbf{x}(z) = \mathbf{y}(z)$ a.p.t., de unde rezultă că limita șirului $(\mathbf{x}_n)$ este unică. Demonstrația este adaptată după Zaanen [50].

Observații. 1° Dacă $\Psi(v) > 0$ pentru $v > 0$, se demonstrează în același fel că $\mathfrak{L}^\Psi_\mathcal{A}$ este complet.

2° Dacă $\Psi(v_0) = 0$ pentru un $v_0 > 0$, spațiul $\mathfrak{L}^\Psi_\mathcal{A}$ este, de asemenea, complet pentru seminorma $\| \mathbf{x}' \|_\Psi$.

Deosebirea în demonstrație provine din aceea că $\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ poate conține cîmpuri $\mathbf{x}'$ care nu sînt în $\mathfrak{M}^{0}_{\mathcal{A}'}$. Se demonstrează însă, în același mod, că dacă A este reuniunea unui șir de mulțimi compacte, există un cîmp $\mathbf{x}'_A \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$, unic definit a.p.t. pe A și nul în afara lui A, astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \| \varphi_A \mathbf{x}'_n - \mathbf{x}'_A \|_{\Psi} = 0.$$

În particular pentru fiecare compact $K \subset Z$ există un cîmp $\mathbf{x}'_K$, astfel încît dacă K_1 și K_2 sînt două mulțimi compacte să avem $\mathbf{x}'_{K_1}(z) = \mathbf{x}'_{K_2}(z)$ a.p.t. pe $K_1 \cap K_2$. Există*) atunci un cîmp măsurabil $\mathbf{x}'$, astfel încît pentru fiecare compact $K \subset Z$, $\mathbf{x}'(z) = \mathbf{x}'_K(z)$ a.p.t. pe K. Pentru orice mulțime A reuniune numărabilă de compacte avem, așadar, $\lim \| \varphi_A (\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}') \|_{\Psi} = 0$. Cum $(\| \mathbf{x}'_n \|_{\Psi})$ este un șir Cauchy de numere reale, el este mărginit de un număr M. Pentru fiecare compact $K \subset Z$ avem $\| \mathbf{x}'_K \|_{\Psi} = \lim_{n\to\infty} \| \mathbf{x}'_n \varphi_K \|_{\Psi} \leqslant M$ și cum $\| \mathbf{x}' \|_{\Psi} = \sup_K \| \mathbf{x}'_K \|_{\Psi}$, rezultă că $\| \mathbf{x}' \|_{\Psi} < \infty$ deci $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$. Mai rămîne să arătăm că $\| \mathbf{x}'_n - \mathbf{x}' \|_{\Psi} \to 0$. Există un șir crescător (K_p) de mulțimi compacte astfel încît $\| \mathbf{x}'_n - \mathbf{x}' \|_{\Psi} = \sup_p \| \varphi_{K_p} (\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}') \|_{\Psi}$ pentru orice n. Punînd $A = \bigcup_p K_p$ avem $\| \varphi_A (\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}') \|_{\Psi} = \sup_p \| \varphi_{K_p} (\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}') \|_{\Psi}$ pentru orice n. Dar pe A avem $\| \varphi_A \mathbf{x}'_n - \mathbf{x}'_A \|_{\Psi} \to 0$ și deci $\| \mathbf{x}'_n - \mathbf{x}' \|_{\Psi} \to 0$.

Teorema următoare arată că dacă înmulțim un cîmp oarecare din $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ cu o constantă convenabilă, obținem un cîmp din $\mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. Evident, cîmpurile neglijabile din $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ aparțin lui $\mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Demonstrația teoremei următoare este adaptată după Zaanen [50].

Teorema 2. *Dacă* $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ *și* $\| \mathbf{x} \|_{\Phi} \neq 0$, *atunci* $\left| \frac{\mathbf{x}}{\| \mathbf{x} \|_{\Phi}} \right|_{\Phi} \leqslant 1$.

Demonstrație. Să arătăm mai întîi că dacă $q \geqslant 1$ și $v \geqslant 0$, atunci $q\Psi(v) \leqslant \Psi(qv)$:

$$\Psi(qv) - \Psi(v) = \int_v^{qv} \psi(t)\,dt \geqslant (q-1)v\psi(v) = (q-1)\int_0^v \psi(v)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant (q-1)\int_0^v \psi(t)\,dt = (q-1)\Psi(v),$$

*) *Teorema lui Godement* ([9], p. 83). Dacă E este un spațiu local compact și μ o măsură Radon $\geqslant 0$ pe E și dacă (f_α) este o familie de funcții, fiecare definită pe cîte o mulțime deschisă U_α, astfel încît pentru doi indici oarecari α și β, f_α și f_β sînt egale local a.p.t. pe $U_\alpha \cap U_\beta$, atunci există o funcție f definită pe E astfel încît pentru orice α, f și f_α sînt egale local a.p.t. pe U_α.

de unde rezultă inegalitatea. Se arată la fel că $q\Phi(v) \leqslant \Phi(qv)$, dacă $q \geqslant 1$ și $v \geqslant 0$.

Fie $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{C}}$ și $h \in \mathfrak{M}^{0}_{c}$. Dacă $|h|_{\Psi} \leqslant 1$ avem

$$\int \|\mathbf{x}(z)\| \, |h(z)| \, d\mu(z) \leqslant \|\mathbf{x}\|_{\Phi}.$$

Dacă $1 < |h|_{\Psi}$ avem

$$\Psi\left(\frac{|h(z)|}{|h|_{\Psi}}\right) \leqslant \frac{1}{|h|_{\Psi}} \Psi(|h(z)|)$$

și deci $\left|\frac{h}{|h|_{\Psi}}\right|_{\Psi} \leqslant 1$.

Așadar,

$$\int \|\mathbf{x}(z)\| \, \frac{|h(z)|}{|h|_{\Psi}} \, d\mu(z) \leqslant \|\mathbf{x}\|_{\Phi}$$

sau

$$\int \|\mathbf{x}(z)\| \, |h(z)| \leqslant \|\mathbf{x}\|_{\Phi} \, |h|_{\Psi}.$$

Dacă punem $\rho(h) = \max(1, |h|_{\Psi})$, avem pentru orice $h \in \mathfrak{M}^{0}_{c}$ Ψ – sumabil

$$\int \|\mathbf{x}(z)\| \, |h(z)| \, d\mu(z) \leqslant \|\mathbf{x}\|_{\Phi} \, \rho(h).$$

Fie acum $\mathbf{x}$ un cîmp de vectori măsurabil *mărginit* și nul în afara unei mulțimi compacte $K \subset Z$, cu $\|\mathbf{x}\|_{\Phi} \neq 0$. Funcțiile mărginite $\Phi\left(\frac{\|\mathbf{x}(z)\|}{\|\mathbf{x}\|_{\Phi}}\right)$ și $\Psi\left(\varphi\left(\frac{\|\mathbf{x}(z)\|}{\|\mathbf{x}\|_{\Phi}}\right)\right)$ sînt sumabile. Să considerăm funcția scalară măsurabilă h, definită prin $h(z) = \varphi\left(\frac{\|\mathbf{x}(z)\|}{\|\mathbf{x}\|_{\Phi}}\right)$. Inegalitatea lui Young devenind egalitate, avem

$$\rho(h) \geqslant \int \frac{\|\mathbf{x}(z)\|}{\|\mathbf{x}\|_{\Phi}} h(z) \, d\mu(z) = \int \Phi\left(\frac{\|\mathbf{x}(z)\|}{\|\mathbf{x}\|_{\Phi}}\right) d\mu(z) + \int \Psi(h(z)) \, d\mu(z) =$$

$$= \left|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_{\Phi}}\right|_{\Phi} + |h|_{\Psi}$$

și deci

$$\left|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_{\Phi}}\right|_{\Phi} \leqslant \rho(h) - |h|_{\Psi}.$$

Dacă $|h|_\Psi \geqslant 1$, atunci $\rho(h) = |h|_\Psi$ și deci $\left|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right|_\Phi = 0$. Dacă $|h|_\Psi < 1$, atunci $\rho(h) = 1$ și deci $\left|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right|_\Phi \leqslant 1 - |h|_\Psi \leqslant 1$. Pînă aici n-a intervenit comportarea lui Φ în origine, deci raționamentul este valabil și pentru Ψ, chiar dacă $\Psi(v_0) = 0$ pentru un $v_0 > 0$.

Fie acum $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_a^\Phi$ ($\|\mathbf{x}\|_\Phi \neq 0$) și fie (K_n) un șir crescător de mulțimi compacte astfel încît notînd $A = \bigcup_n K_n$ să avem $\mathbf{x}(z) = 0$ a.p.t. pe $\complement A$. Pentru fiecare n întreg să punem

$$\mathbf{x}_n(z) = \begin{cases} \mathbf{x}(z) & \text{dacă } z \in K_n \text{ și } \|\mathbf{x}(z)\| \leqslant n, \\ n\,\dfrac{\mathbf{x}(z)}{\|\mathbf{x}(z)\|} & \text{dacă } z \in K_n \text{ și } \|\mathbf{x}(z)\| > n, \\ 0 & \text{dacă } z \in \complement K_n. \end{cases}$$

Presupunem că $\mathbf{x}$ nu se anulează a.p.t. pe nici o mulțime K_n, deci $\|\mathbf{x}_n\|_\Phi \neq 0$. Evident, pentru fiecare n, $\mathbf{x}_n$ este măsurabil, mărginit și se anulează în afara lui K_n și, după cele de mai sus, avem $\left|\frac{\mathbf{x}_n}{\|\mathbf{x}_n\|_\Phi}\right|_\Phi \leqslant 1$.

Dar șirul $\|\mathbf{x}_n(z)\|$ este crescător și converge a.p.t. către $\|\mathbf{x}(z)\|$, iar $\|\mathbf{x}_n\|_\Phi \leqslant \|\mathbf{x}\|_\Phi$, deci

$$\frac{\|\mathbf{x}_n(z)\|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi} \leqslant \frac{\|\mathbf{x}_n(z)\|}{\|\mathbf{x}_n\|_\Phi},$$

de unde rezultă

$$\int \Phi\left(\frac{\|\mathbf{x}_n(z)\|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right) d\mu(z) \leqslant 1.$$

Funcția Φ fiind continuă, $\lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{\|\mathbf{x}_n(z)\|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right) = \Phi\left(\frac{\|\mathbf{x}(z)\|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right)$ și aplicînd o teoremă din [4]*), deducem

$$\int \Phi\left(\frac{\|\mathbf{x}(z)\|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right) d\mu(z) = \lim_{n\to\infty} \int \Phi\left(\frac{\|\mathbf{x}_n(z)\|}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right) d\mu(z) \leqslant 1,$$

deci $\left|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\Phi}\right|_\Phi \leqslant 1$, și cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Observații 1° Dacă $\Psi(v) > 0$ pentru $v > 0$ și $\Psi(v) < \infty$ pentru $v < \infty$ (adică dacă $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$) se demonstrează în același fel că $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}_a^\Psi$ și $\|\mathbf{x}'\|_\Psi \neq 0$ implică $\left|\frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|_\Psi}\right|_\Psi \leqslant 1$.

*) Teorema 3, p. 110.

2° Dacă $\Psi(v) > 0$ pentru $v > 0$ și $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = l < \infty$ (deci $\Psi(v) = \infty$ pentru $v > l$) *teorema este încă adevărată pentru* $\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{C}'}$, dar aceasta necesită o demonstrație separată.

Să observăm întîi că dacă $x' \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{C}'}$, atunci $\frac{\|x'(z)\|}{\|x'\|_{\Psi}} \leqslant l$ a.p.t. Într-adevăr, dacă ar exista o mulțime A măsurabilă, neneglijabilă, astfel încît $\|x'(z)\| > l \|x'\|_{\Psi}$ pentru orice $z \in A$ să punem $h(z) = \frac{1}{l\mu(A)} \varphi_A(z)$ și, deoarece $\Phi(u) \leqslant lu$, avem

$$\int \Phi(h(z))\, d\mu(z) = \Phi\left(\frac{1}{l\mu(A)}\right) \int \varphi_A(z)\, d\mu(z) = \mu(A)\, \Phi\left(\frac{1}{l\mu(A)}\right) \leqslant 1,$$

deci

$$\int \|x'(z)\| \cdot |h(z)|\, d\mu(z) = \frac{1}{l\mu(A)} \int \|x'(z)\| \varphi_A(z)\, d\mu(z) > |x'|_{\Psi},$$

ceea ce este imposibil. Așadar, avem $\frac{\|x'(z)\|}{\|x'\|_{\Phi}} \leqslant l$ a.p.t.

Să presupunem mai întîi că $x' \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{C}'}$ este nul în afara unei mulțimi A neneglijabile de măsură finită și că $\|x'\|_{\Psi} \neq 0$ și să alegem δ fix astfel ca $0 < \delta < 1$. Atunci $\Psi\left(\delta \frac{\|x'(z)\|}{\|x'\|_{\Psi}}\right)$ și $\Phi\left(\psi\left(\frac{\|x'(z)\|}{\|x\|_{\Psi}}\right)\right)$ sînt mărginite și nule în afara lui A, deci sumabile. Să punem $h(z) = \psi\left(\delta \frac{\|x'(z)\|}{\|x'\|_{\Psi}}\right) \varphi_A(z)$. În același fel, ca și la începutul teoremei 1, se arată că

$$\int \|x'(z)\|\, h(z)\, d\mu(z) \leqslant \|x'\|_{\Psi} \pi(h),$$

unde $\pi(h) = \max(1, |h|_{\Phi})$.

Putem deci scrie

$$\delta\pi(h) \geqslant \int \frac{\delta \|x'(z)\|}{\|x'\|_{\Psi}} h(z)\, d\mu(z) = \int \Psi\left(\delta \frac{\|x'(z)\|}{\|x'\|_{\Psi}}\right) d\mu(z) + |h|_{\Phi},$$

deoarece inegalitatea lui Young devine egalitate. Atunci $|h|_{\Phi} \leqslant \delta\pi(h) < \pi(h)$ și deci deducem că $\pi(h) = 1$ și prin urmare $\left|\frac{\delta x'}{\|x'\|_{\Psi}}\right|_{\Psi} \leqslant \delta < 1$.

Făcînd $\delta \to 1$ și observînd că $\Psi(v)$ este continuu la stînga chiar pentru $v = l$, obținem $\left|\frac{x'}{\|x'\|_{\Psi}}\right|_{\Psi} \leqslant 1$.

Pentru $x' \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{C}'}$, arbitrar, considerăm un șir crescător (K_n) de mulțimi compacte în afara cărora x' se anulează a.p.t. și pentru fiecare n să

punem $\mathbf{x}'_n(z) = \mathbf{x}'(z)\varphi_{K_n}(z)$. Atunci șirul $\| \mathbf{x}'_n(z) \|$ tinde crescător către $\| \mathbf{x}'(z) \|$ a.p.t. Dar, presupunînd că pentru fiecare n, $\| \mathbf{x}'_n \|_\Phi \neq 0$, avem

$$\left| \frac{\mathbf{x}'_n}{\| \mathbf{x}'_n \|_\Psi} \right|_\Psi \leqslant 1.$$

De asemenea, $\| \mathbf{x}_n \|_\Psi \leqslant \| \mathbf{x}' \|_\Psi$ și deci $\left| \frac{\mathbf{x}'_n}{\| \mathbf{x}' \|_\Psi} \right|_\Psi \leqslant 1.$

Aplicînd teorema 3 din [4]*) deducem că

$$\left| \frac{\mathbf{x}'}{\| \mathbf{x}' \|_\Psi} \right|_\Psi = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\mathbf{x}'_n}{\| \mathbf{x}' \|_\Psi} \right|_\Psi \leqslant 1.$$

Corolar. *Dacă* $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_\mathcal{A}$ *și* $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$, *atunci* $\mathbf{x}(z) = 0$ *local* a.p.t., *în afara unui șir de mulțimi compacte.*

Demonstrație. Presupunem $\| \mathbf{x} \|_\Phi \neq 0$. Pentru orice mulțime compactă $K \subset Z$, avem, după teorema 1, $\int \Phi \left(\frac{\| \mathbf{x}_K(z) \|}{\| \mathbf{x} \|_\Phi} \right) d\mu(z) \leqslant 1$. Fie $\lambda = \sup_K \int \Phi \left(\frac{\| \mathbf{x}_K(z) \|}{\| \mathbf{x} \|_\Phi} \right) d\mu(z)$.

Există un șir crescător (K_n) de mulțimi compacte astfel încît

$$\lambda = \sup_n \int \Phi \left(\frac{\| \mathbf{x}_{K_n}(z) \|}{\| \mathbf{x} \|_\Phi} \right) d\mu(z).$$

Dacă notăm $A = \bigcup_n K_n$, avem $\lambda = \int \Phi \left(\frac{\| \mathbf{x}_A(z) \|}{\| \mathbf{x} \|_\Phi} \right) d\mu(z)$.

Fie K o mulțime compactă neneglijabilă astfel ca $K \cap A = \Phi$ și să arătăm că $\mathbf{x}(z) = 0$ a.p.t. pe K. Dacă n-ar fi așa, atunci

$$\lambda < \int \Phi \left(\frac{\| \mathbf{x}_{A \cup K}(z) \|}{\| \mathbf{x} \|_\Phi} \right) d\mu(z).$$

Dar $A \cup K = \bigcup_n (K_n \cup K)$ și $(K_n \cup K)$ este un șir crescător și

$$\int \Phi \left(\frac{\| \mathbf{x}_{K_n}(z) \|}{\| \mathbf{x} \|_\Phi} \right) d\mu(z) < \int \Phi \left(\frac{\| \mathbf{x}_{K_n \cup K}(z) \|}{\| \mathbf{x} \|_\Phi} \right) d\mu(z).$$

Atunci

$$\lambda = \sup_n \int \Phi \left(\frac{\| \mathbf{x}_{K_n}(z) \|}{\| \mathbf{x} \|_\Phi} \right) d\mu(z) = \int \Phi \left(\frac{\| \mathbf{x}_A(z) \|}{\| \mathbf{x} \|_\Phi} \right) d\mu(z) <$$

$$< \int \Phi \left(\frac{\| \mathbf{x}_{A \cup K}(z) \|}{\| \mathbf{x} \|_\Phi} \right) d\mu(z) = \sup_n \int \Phi \frac{\| \mathbf{x}_{K_n \cup K}(z) \|}{\| \mathbf{x} \|_\Phi} \Big) d\mu(z) \leqslant \lambda$$

*) p. 110.

și deci am ajuns la o contradicție. Urmează că $\mathbf{x}$ se anulează local a.p.t. în afara lui A.

Observații. Dacă $\Psi(v) > 0$ pentru $v > 0$, $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$ și $\| \mathbf{x}' \|_\Psi < \infty$, atunci $\mathbf{x}'(z) = 0$ local a.p.t., în afara unui și de compacte, oricare ar fi comportarea lui Ψ către ∞.

Rămîne să demonstrăm teorema 2 în cazul cînd $\Psi(v_0) = 0$ pentru un $v_0 > 0$.

T e o r e m a 2'. *Dacă* $\Psi(v_0) = 0$ *pentru* $v_0 > 0$ *și* $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty$ (*deci* $\Psi(v) < \infty$ dacă $v < \infty$), *atunci pentru orice* $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$, *cu* $\| \mathbf{x}' \|_\Psi \neq 0$, *există un cîmp de funcționale* $\mathbf{x}'_1 \in \mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$, *astfel încît* $\mathbf{x}'_1(z) = \mathbf{x}'(z)$ *local* a.p.t. *și* $\left| \frac{\mathbf{x}'_1}{\| \mathbf{x}' \|_\Psi} \right|_\Psi \leqslant 1$.

Demonstrație. Se demonstrează ca în teorema 2 că dacă $\mathbf{x}'$ este un cîmp de funcționale măsurabil, *mărginit* și nul în afara unei mulțimi compacte neneglijabile, avem

$$\left| \frac{\mathbf{x}'}{\| \mathbf{x}' \|_\Psi} \right|_\Psi \leqslant 1.$$

Fie acum $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$, oarecare, și $K \subset Z$ o mulțime compactă. Cum $\| \mathbf{x}'_K \|_\Psi \leqslant \| \mathbf{x}' \|_\Psi$, avem

$$\int \Psi\left(\frac{\| \mathbf{x}'_K(z) \|}{\| \mathbf{x}' \|_\Psi} \right) d\mu(z) \leqslant \int \Psi\left(\frac{\| \mathbf{x}'_K(z) \|}{\| \mathbf{x}'_K \|_\Psi} \right) d\mu(z) \leqslant 1.$$

Fie $\lambda = \sup_K \int \Psi\left(\frac{\| \mathbf{x}'_K(z) \|}{\| \mathbf{x}' \|_\Psi} \right) d\mu(z) \leqslant 1$.

Există un șir (K_n) crescător de mulțimi compacte cu

$$\lambda = \sup_n \int \Psi\left(\frac{\| \mathbf{x}'_{K_n}(z) \|}{\| \mathbf{x}' \|_\Psi} \right) d\mu(z) = \int \Psi\left(\frac{\| \mathbf{x}'_{A_n}(z) \|}{\| \mathbf{x}' \|_\Psi} \right) d\mu(z),$$

unde $A = \bigcup_n K_n$. Dacă K este o mulțime disjunctă de A, atunci $\| \mathbf{x}'(z) \| \leqslant v_0$ a.p.t. pe K (presupunînd $\Psi(v) > 0$ pentru $v > v_0$). Într-adevăr dacă ar exista o asemenea mulțime compactă neneglijabilă K, disjunctă de A, astfel încît pe K, $\| \mathbf{x}'(z) \|$ nu este $\leqslant v_0$ a.p.t., atunci

$$\lambda = \sup_n \int \Psi\left(\frac{\| \mathbf{x}'_{K_n}(z) \|}{\| \mathbf{x}' \|_\Psi} \right) d\mu(z) = \int \Psi\left(\frac{\| \mathbf{x}'_A(z) \|}{\| \mathbf{x}' \|_\Psi} \right) d\mu(z) <$$

$$< \int \Psi\left(\frac{\| \mathbf{x}'_{A \cup K}(z) \|}{\| \mathbf{x}' \|_\Psi} \right) d\mu(z) = \sup_n \int \Psi\left(\frac{\| \mathbf{x}'_{K_n \cup K}(z) \|}{\| \mathbf{x}' \|_\Psi} \right) d\mu(z) \leqslant \lambda$$

și am ajunge la contradicție.

Pe de altă parte, $\| x' \|_\Psi = \sup_K \| x'_K \|_\Psi$ (propoziția 2). Există un șir crescător (K'_n) de mulțimi compacte, care conține șirul (K_n), astfel încît notînd $A' = \bigcup_n K'_n$ să avem

$$\| x' \|_\Psi = \sup_n \| x'_{K'_n} \|_\Psi = \| x'_{A'} \|_\Psi .$$

Prin raționamentul din teorema 1 deducem că $\left| \frac{x'_{A'}}{\| x'_{A'} \|_\Psi} \right|_\Psi \leqslant 1$ și cum $\| x'_{A'} \|_\Psi \leqslant \| x' \|_\Psi < \infty$, deducem $\left| \frac{x'_{A'}}{\| x' \|_\Psi} \right|_\Psi \leqslant 1$.

Luînd

$$x'_1(z) = x'(z), \text{ dacă } z \in A',$$

$$x'_1(z) = x'(z), \text{ dacă } z \in \complement A', \text{ și } \| x'(z) \| \leqslant v_0,$$

$$x'_1(z) = 0 \text{ dacă } z \in \complement A' \text{ și } \| x'(z) \| > v_0,$$

atunci $x'_1(z) = x'(z)$ local a.p.t. și verifică condițiile teoremei.

Observații. 1° *Dacă* $\Psi(v_0) = 0$ *pentru un* $v_0 > 0$ *și* $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = l < \infty$ (deci $\Psi(v) = \infty$ pentru $v > l$), *pentru orice* $x' \in \mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$, *cu* $\| x' \|_\Psi \neq 0$, *există un* $x'_1 \in \mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$, *egal local* a.p.t. *cu* x', *astfel încît* $\left| \frac{x'_1}{\| x' \|_\Psi} \right| \leqslant 1$.

Demonstrație. Pentru orice mulțime compactă $K \subset Z$ avem $\int \Psi\left(\frac{\| x'_K(z) \|}{\| x' \|_\Psi} \right) d\mu(z) \leqslant 1$, deoarece $\| x'_K \|_\Psi \leqslant \| x' \|_\Psi$, și se demonstrează, ca în observația de la teorema 2, că $\frac{\| x'(z) \|}{\| x' \|_\Psi} \leqslant l$ local a.p.t.

Se demonstrează ca în teorema 2 că $\| x'(z) \| \leqslant v_0$ local a.p.t., în afara unui șir de mulțimi compacte (K_n). Pentru a obține pe x'_1, modificăm pe x' în punctele dinafara șirului (K_n), în care $\| x'(z) \| > v_0$, și anume în aceste puncte punem $x'_1(z) = 0$.

2° Dacă $\| x \|_\Phi \leqslant 1$, atunci $| x |_\Phi \leqslant \left| \frac{x}{\| x \|_\Phi} \right|_\Phi \leqslant 1$, deci dacă $| x |_\Phi > 1$, atunci $\| x \|_\Phi > 1$. Dacă $| x |_\Phi \leqslant 1$, atunci $\| x \|_\Phi \leqslant | x |_\Phi + 1 \leqslant 2$.

P r o p o z i ț i a 10. *Pentru orice* $x \in \mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}'}$ *și orice* $x' \in \mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$ *funcția scalară* $< x(z), x'(z) >$ *este sumabilă și avem*

$$\int | < x(z), x'(z) > | \, d\mu(z) \leqslant \int \| x(z) \| \, \| x'(z) \| \, d\mu(z) \leqslant \| x \|_\Phi \, \| x' \|_\Psi .$$

Demonstrație. Dacă $\| \mathbf{x} \|_\Phi = 0$, atunci $\mathbf{x}(z) = 0$ a.p.t. și inegalitatea este verificată. Dacă $\| \mathbf{x} \|_\Phi \neq 0$, avem

$$\int \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \| \, d\mu(z) = \| \mathbf{x} \|_\Phi \int \left\| \frac{\mathbf{x}(z)}{\| \mathbf{x} \|_\Phi} \right\| \| \mathbf{x}'(z) \| \, d\mu(z) \leqslant \| \mathbf{x} \|_\Phi \| \mathbf{x}' \|_\Psi ,$$

deoarece $\left| \frac{(\mathbf{x})}{\| \mathbf{x} \|_\Phi} \right|_\Phi \leqslant 1$.

Propoziția 11. $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$ *dacă, și numai dacă,* $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^0_\mathcal{A}$ *și funcția scalară* $< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >$ *este sumabilă pentru orice* $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$.

Demonstrație. Este evident, după propoziția 10, că dacă $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}'}$, atunci $< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >$ este sumabilă pentru orice $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$, iar $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^0_\mathcal{A}$.

Reciproc, fie $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^0_\mathcal{A}$ și să presupunem că $< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >$ este sumabilă pentru orice $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$. Să notăm cu A mulțimea—reuniune numărabilă de mulțimi compacte — astfel că $\mathbf{x}(z) = 0$ a.p.t. pe $\complement A$. Să presupunem că $\| \mathbf{x} \|_\Phi = \infty$ și să arătăm că ajungem la o contradicție. Deoarece în acest caz

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_{|h|_\Psi \leqslant 1} \int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, | h(z) | \, d\mu(z)$$

(unde funcțiile h le putem presupune nule în afara lui A), există un șir (h_n) de funcții $\geqslant 0$, nule în afara lui A, cu $| h_n |_\Psi \leqslant 1$, astfel încît pentru fiecare n

$$\int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, h_n(z) \, d\mu(z) > n^3 .$$

Să punem $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} h_n(z)$. Atunci $\| h \|_\Psi < \infty$ (deoarece $\| h_n \|_\Psi \leqslant 2$ pentru orice n) și

$$\int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, h(z) \, d\mu(z) \geqslant \frac{1}{n^2} \int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, h_n(z) \, d\mu(z) > n$$

pentru fiecare n (deoarece $h(z) \geqslant h_n(z)$ pentru fiecare n), deci $\int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, h(z) \, d\mu(z) = \infty$.

Pentru orice $0 < a < 1$ există un cîmp $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$ (presupunem $\mathbf{x}'(z) = 0$ în afara lui A), astfel încît

$$a \| \mathbf{x}(z) \| \leqslant | \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \qquad \text{a.p.t. pe } A,$$

$$a \leqslant \| \mathbf{x}'(z) \| \leqslant 2 - a \qquad \text{a.p.t. pe } A.$$

Să punem $\mathbf{y}'(z) = \frac{\mathbf{x}'(z)}{2 - a} h(z)$. Atunci $\| \mathbf{y}'(z) \| = \frac{\| \mathbf{x}'(z) \|}{2 - a} h(z) \leqslant h(z)$, deci

$\| \mathbf{y}' \|_{\Psi} \leqslant \| h \|_{\Psi} < \infty$. Dar $| < \mathbf{x}(z), \mathbf{y}'(z) > | = \frac{h(z)}{2-a} | \langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle | \geqslant \frac{a}{2-a} \| \mathbf{x}(z) \| h(z)$ și deci

$$\int^{*} | < \mathbf{x}(z), \mathbf{y}'(z) > | \, d\mu(z) \geqslant \frac{a}{2-a} \int^{*} \| \mathbf{x}(z) \| \, h(z) \, d\mu(z) = \infty$$

și am ajuns astfel la o contradicție, deoarece $\mathbf{y}' \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$.

Observație. $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ dacă, și numai dacă, $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$ și funcția scalară $< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >$ este sumabilă pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Într-adevăr, în acest caz

$$\| \mathbf{x}' \|_{\Psi} = \sup_{|h|_{\Phi} \leqslant 1} \int^{*} \| \mathbf{x}'(z) \| \, |h(z)| \, d\mu(z).$$

Să presupunem că $< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >$ este sumabilă pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și că totuși $\| \mathbf{x}' \|_{\Psi} = \infty$. Există atunci pentru fiecare n o funcție scalară măsurabilă $h_n \geqslant 0$ cu $| h_n |_{\Phi} \leqslant 1$ (deci $h_n \in \mathfrak{M}^0_C$), astfel ca

$$\int^{*} \| \mathbf{x}'(z) \| \, h_n(z) \, d\mu(z) > n^3.$$

Fie A mulțimea — reuniune numărabilă de mulțimi compacte — astfel ca $h_n(z) = 0$ a.p.t. pe $\complement A$ pentru orice n. Atunci $\| \mathbf{x}'_A \|_{\Psi} = \| \mathbf{x}' \|_{\Psi} = \infty$ și raționamentul se face mai departe ca la propoziția 11, pentru cîmpul $\mathbf{x}'_A$

Demonstrația folosește o idee datorită lui G.G. Lorentz și D. G. Wertheim [32].

Dacă există o constantă $M > 1$ astfel încît $\Psi(2v) \leqslant M \Psi(v)$ pentru $v \geqslant 0$, atunci $0 < v < \infty$ implică $0 < \Psi(v) < \infty$. De aceea propozițiile care urmează sînt valabile și pentru spațiile $\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$, dacă Ψ verifică această condiție.

Propoziția 12. *Dacă există o constantă $M > 1$ astfel încît $\Phi(2u) \leqslant M \Phi(u)$ pentru $u \geqslant 0$, mulțimile $\mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ conțin aceleași elemente.*

Demonstrație. Este suficient să arătăm că $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ (propoziția 9). Fie $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$; dacă $\mathbf{x}(z) = 0$ a.p.t., atunci evident $\mathbf{x} \in \mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$; dacă $\| \mathbf{x} \|_{\Phi} \neq 0$, atunci $\frac{\mathbf{x}}{\| \mathbf{x} \|_{\Phi}} \in \mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ (teorema 2). Fie $p > 0$, astfel încît $\| \mathbf{x} \|_{\Phi} \leqslant 2^p$. Atunci

$$\Phi(\| \mathbf{x}(z) \|) \leqslant \Phi\left(\frac{\| \mathbf{x}(z) \|}{\| \mathbf{x} \|_{\Phi}} 2^p \right) \leqslant M^p \Phi\left(\frac{\| \mathbf{x}(z) \|}{\| \mathbf{x} \|_{\Phi}} \right),$$

de unde rezultă că $\mathbf{x} \in \mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Observație. Dacă $\Phi(2u) \leqslant M \Phi(u)$ pentru $u \geqslant u_0 > 0$ și μ este *mărginită*, atunci $\mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ conțin aceleași elemente. Să scriem $\mathbf{x}_1(z) = \mathbf{x}(z)$,

dacă $\frac{\|x(z)\|}{\|x\|_\Phi} < u_0$ și $x_1(z) = 0$ în caz contrar. Atunci x_1 este mărginit deci $\Phi(\|x_1(z)\|)$ este sumabil. Să scriem apoi $x_2(z) = 0$, dacă $\frac{\|x(z)\|}{\|x\|_\Phi} < u_0$, și $x_2(z) = x(z)$ în caz contrar; x_2 nu este, în general, mărginit, dar $\frac{x_2}{\|x_2\|_\Phi} \in \mathcal{O}_a^\Phi$. Dacă $p > 0$ este astfel încît $\|x_2\|_\Phi \leqslant 2^p$, atunci

$$\Phi(\|x_2(z)\|) \leqslant \Phi\left(\frac{\|x_2(z)\|}{\|x_2\|_\Phi} 2^p\right) \leqslant M^p \Phi\left(\frac{\|x_2(z)\|}{\|x_2\|_\Phi}\right),$$

deci $x_2 \in \mathcal{O}_a^\Phi$. Cum $x = x_1 + x_2$ urmează că

$$\Phi(\|x(z)\|) = \Phi(\|x_1(z)\|) + \Phi(\|x_2(z)\|)$$

și deci $x \in \mathcal{O}_a^\Phi$ [50].

Propoziția 13. *Dacă există o constantă* $M > 1$ *astfel încît* $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ *pentru* $u \geqslant 0$, *atunci* $|x|_\Phi \leqslant \frac{1}{M^p}$ *implică* $\|x\|_\Phi \leqslant \frac{2}{2^p}$. *In particular dacă* $|x_n - x|_\Phi \to 0$, *atunci* $\|x_n - x\|_\Phi \to 0$.

Demonstrație. Avem

$$\int \Phi(2^p \|x(z)\|)\, d\mu(z) \leqslant M^p \int \Phi(\|x(z)\|)\, d\mu(z) = M^p |x|_\Phi \leqslant 1.$$

Pentru orice $h \in \mathfrak{M}_c^0$, cu $|h|_\Psi \leqslant 1$, avem, după inegalitatea lui Young,

$$\int 2^p \|x(z)\| \, |h(z)| \, d\mu(z) \leqslant \int \Phi(2^p \|x(z)\|)\, d\mu(z) + \int \Psi(|h(z)|) d\mu(z) \leqslant 2$$

și deci $\|x\|_\Phi \leqslant \frac{2}{2^p}$ [50].

Dacă însemnăm cu $\mathfrak{N}$ mulțimea cîmpurilor $x \in \mathfrak{M}_a$ neglijabile, atunci $\mathfrak{N}$ este un subspațiu vectorial închis al lui $\mathfrak{L}_a^\Phi$ (aderența originii în $\mathfrak{L}_a^\Phi$). Dacă $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$ pentru $u \geqslant 0$, $\mathfrak{N}$ este un subspațiu vectorial închis și în $\mathcal{O}_a^\Phi$. Spațiul cît $L_a^\Phi = \mathfrak{L}_a^\Phi/\mathfrak{N}$ este un spațiu normal și conține aceleași elemente ca și spațiul cît $O_a^\Phi = \mathcal{O}_a^\Phi/\mathfrak{N}$. Cum, după propoziția 13, topologia lui $\mathcal{O}_a^\Phi$ este mai fină decît topologia spațiului L_a^Φ, și cum ambele spații sînt metrizabile complete, cele două topologii sînt echivalente [3]*). Rezultă ca mulțimea cîmpurilor mărginite din $\mathfrak{L}_a^\Phi$ este densă în $\mathfrak{L}_a^\Phi$ (propoziția, 6, cap II).

*) Cap. I, § 3, teorema 1, corolar 2.

Observații. 1° Dacă $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = l < \infty$, atunci $\mathfrak{L}^1_{\mathcal{A}} \subset \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și $\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'} \subset \mathfrak{L}^{\infty}_{\mathcal{A}'}$.

Într-adevăr, în acest caz $\Phi(u) = \int_0^u \varphi(t)dt \leqslant lu$. Dacă $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^1_{\mathcal{A}}$, atunci $\int \Phi(\| x(z) \|)\, d\mu(z) \leqslant l \int \| \mathbf{x}(z) \|\, d\mu(z) < \infty$, deci $\mathbf{x} \in \mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}} \subset \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Dacă $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$, am văzut din demonstrația teoremei 2, observația 2, că $\frac{\| \mathbf{x}'(z) \|}{\| \mathbf{x}' \|_{\Psi}} \leqslant l$ a.p.t. deci $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^{\infty}_{\mathcal{A}'}$.

Dacă în plus μ este *mărginită* atunci $\mathfrak{L}^1_{\mathcal{A}} = \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și $\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'} = \mathfrak{L}^{\infty}_{\mathcal{A}'}$. Fie $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^{\infty}_{\mathcal{A}'}$; putem alege $p > 0$, astfel ca $p\| \mathbf{x}'(z) \| < \frac{l}{2}$ a.p.t. deci

$\int \Psi(p \| \mathbf{x}'(z) \|)\, d\mu(z) \leqslant \Psi\left(\frac{l}{2}\right) \|\mu\| < \infty$; prin urmare $p\mathbf{x}' \in \mathcal{O}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ și deci $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$.

Dacă $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, atunci $\| \mathbf{x}(z) \|\, h(z)$ este sumabilă pentru orice $h \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{c}$. Dacă luăm $h(z) \equiv 1$, $h \in \mathfrak{L}^{\infty}_{c} = \mathfrak{L}^{\Psi}_{c}$ și deci funcția $\| \mathbf{x}(z) \|$ este sumabilă, adică $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^1_{\mathcal{A}}$.

2° Dacă $\varphi(t) = t^{p-1}$, atunci $\psi(t) = t^{q-1}$, $\Phi(u) = \frac{1}{p} u^p$ și $\Psi(v) = \frac{1}{q} v^q$, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, $(1 < p < \infty)$.

Cum în acest caz $\Phi(2u) = 2^p \Phi(u)$ pentru orice $u \geqslant 0$ și $\Psi(2v) = 2^q \Psi(v)$ pentru orice $v \geqslant 0$, spațiile $\mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ conțin aceleași elemente cu $\mathfrak{L}^p_{\mathcal{A}}$, iar spațiile $\mathcal{O}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ și $\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ conțin aceleași elemente cu $\mathfrak{L}^q_{\mathcal{A}'}$. Seminormele pe $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, $\mathfrak{L}^p_{\mathcal{A}}$, respectiv pe $\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$, $\mathfrak{L}^q_{\mathcal{A}'}$, nu sînt egale, însă avem

$$\| \mathbf{x} \|_p = \sup \int |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle|\, d\mu(z) \quad \text{pentru} \int \| \mathbf{x}'(z) \|^q d\mu(z) \leqslant 1,$$

$$\| \mathbf{x} \|_{\Phi} = \sup \int |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle|\, d\mu(z) \quad \text{pentru} \int \| \mathbf{x}'(z) \|^q d\mu(z) \leqslant q,$$

ceea ce arată că $\| \mathbf{x} \|_{\Phi} = q^{1/q} \| \mathbf{x} \|_p$. În mod analog deducem, $\| \mathbf{x}' \|_{\Psi} = p^{1/p} \| \mathbf{x}' \|_q$.

Dacă $\Phi(u) = u$, atunci $\| \mathbf{x} \|_{\Phi} = \| \mathbf{x} \|_1$, deci $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și $\mathfrak{L}^1_{\mathcal{A}}$ sînt identice în acest caz. Atunci avem și $\| \mathbf{x}' \|_{\Psi} = \| \mathbf{x}' \|_{\infty}$.

3° Să luăm $\varphi(t) = \begin{cases} t \text{ pentru } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 \text{ pentru } t \geqslant 1 \end{cases}$,

și deci

$$\psi(t) = \begin{cases} t \text{ pentru } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \infty \text{ pentru } t > 1 \end{cases}$$

$$\text{Atunci } \Phi(u) = \begin{cases} \frac{u^2}{2} \text{ pentru } 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ u - \frac{1}{2} \text{ pentru } u \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\text{și } \Psi(v) = \begin{cases} \frac{v^2}{2} \text{ pentru } 0 \leqslant v \leqslant 1 \\ \infty \text{ pentru } v > 1 \end{cases}$$

Φ verifică condiția (Δ) cu $M = 4$.

În acest caz $\mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$ conține pe $\mathfrak{L}^1_\mathcal{A}$ și pe $\mathfrak{L}^2_\mathcal{A}$. Într-adevăr,

$$|\mathbf{x}|_\Phi = \int \Phi(\|\mathbf{x}(z)\|)\, d\mu(z) = \frac{1}{2}\int_A \|\mathbf{x}(z)\|^2\, d\mu(z) + \int_B \left(\|\mathbf{x}(z)\| - \frac{1}{2}\right) d\mu(z),$$

unde $A = \{z \mid \|\mathbf{x}(z)\| \leqslant 1\}$ și $B = \{z \mid \|\mathbf{x}(z)\| > 1\}$ și $\mu(B) < \infty$.

Dacă $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^1_\mathcal{A}$, $\int_A \|\mathbf{x}(z)\|^2\, d\mu(z) \leqslant \int_A \|\mathbf{x}(z)\|\, d\mu(z) \leqslant \|\mathbf{x}\|_1$, deci $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$;

dacă $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^2_\mathcal{A}$, $\int_B \|\mathbf{x}(z)\|\, d\mu(z) \leqslant \int_B \|\mathbf{x}(z)\|^2\, d\mu(z) \leqslant \|\mathbf{x}\|_2^2$, deci $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$.

De asemenea, se pot construi funcții Φ astfel încît $\mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$ să continue pe $\mathfrak{L}^p_\mathcal{A}$ și $\mathfrak{L}^q_\mathcal{A}$ $(1 \leqslant p, q < \infty)$.

Capitolul IV

OPERATORI DECOMPOZABILI. FUNCTIONALE PE $\mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$

În acest capitol se studiază funcționalele liniare continue definite pe $\mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$ și se dă o reprezentare integrală a lor. Teorema de reprezentare se bazează pe o teoremă de descompunere a operațiilor liniare continue de la un spațiu Orlicz la altul. Rezultatele obținute generalizează pe de o parte niște rezultate obținute de Zaanen [50] pentru spațiile Orlicz iar pe de altă parte unele rezultate obținute de J. von Neumann [38], R. Godement [17] și C. T. Ionescu Tulcea [21]. Metoda de demonstrație este adaptată cu unele modificări după C. T. Ionescu Tulcea.

§ 1. Operații liniare decompozabile

Fie Z un spațiu local compact și μ o măsură Radon pozitivă pe Z. Fie $\mathcal{E} = (E(z))_{z \in Z}$ o familie de spații Banach și $\mathcal{E}' = (E'(z))_{z \in Z}$ familia spațiilor duale. Să presupunem că există familiile fundamentale $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{E}')$, care verifică condițiile:

(*) *pentru orice* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ *și orice* $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'$, *funcția scalară* $< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >$ *este continuă pe* Z;

(G*) *pentru orice mulțime compactă* $K \subset Z$ *există o parte numărabilă* $\mathcal{A}_{0K} \subset \mathcal{A}$, *astfel încît pentru orice* $z \in K$, *mulțimea* $\{\mathbf{x}(z) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{A}_{0K}\}$ *este densă în* $E(z)$.

Fie $\mathcal{F} = (F(z))_{z \in Z}$ o familie de spații Banach și $\mathcal{F}' = (F'(z))_{z \in Z}$ familia spațiilor duale. Să presupunem că există familiile fundamentale $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(\mathcal{F})$ și $\mathcal{B}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{F}')$, care verifică condiția (*).

Fie φ_1 și φ_2 două funcții reale definite pe $[0,\infty]$ și avînd proprietățile funcției φ date în cap. III, § 1, și să considerăm funcțiile $\Phi_1(u) = \int_0^u \varphi_1(t)\,dt$ și $\Phi_2(u) = \int_0^u \varphi_2(t)\,dt$. Fie ψ_1 și ψ_2 funcțiile „inverse" ale lui φ_1 și φ_2 și să considerăm funcțiile $\Psi_1(v) = \int_0^v \psi_1(t)\,dt$, $\Psi_2(v) = \int_0^v \psi_2(t)\,dt$.

Definiția 1. *O aplicație liniară continuă* T *a unui subspațiu vectorial* $\mathfrak{X}$ *al spațiului* $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ *în spațiul* $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}$ *este decompozabilă dacă pentru orice* $z \in Z$ *există o aplicație liniară continuă* $T(z)$ *a lui* $E(z)$ *în* $F(z)$, *astfel încît pentru fiecare* $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$ *să avem*

$$T\mathbf{x}(z) = T(z)\mathbf{x}(z) \quad \text{a.p.t.}$$

Să observăm că dacă $f \in \mathfrak{L}_C^\infty$ și $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$, atunci $f\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ și, de asemenea, dacă $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}$, $f\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}$.

Pentru orice $f \in \mathfrak{L}_C^\infty$ vom nota cu U_f aplicația $\mathbf{x} \to f\mathbf{x}$ a lui $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ în $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ sau a lui $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}$ în $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}$. U_f este o aplicație liniară decompozabilă.

În cele ce urmează nu vom deosebi între ele cîmpuri egale a.p.t.

Teorema 1. *Condiția necesară și suficientă pentru ca o aplicație liniară continuă* T *a lui* $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ *în* $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}$ *să fie decompozabilă este ca pentru orice* $f \in \mathfrak{L}_C^\infty$,

$$U_f T = T U_f. \tag{1}$$

Dacă $\Phi_1 = \Phi_2$ *și* T *este decompozabil, atunci*

$$\| T \| = \max \text{ în măsură } \| T(z) \|. \tag{2}$$

Demonstrație. Condiția (1) este necesară : dacă T este decompozabil și $f \in \mathfrak{L}_C^\infty$ atunci, pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ avem

$$(U_f T)\,\mathbf{x}(z) = U_f(T\mathbf{x}(z)) = \text{a.p.t.} f(z)\,(T(z)\,\mathbf{x}(z)) = T(z)\,(f(z)\,\mathbf{x}(z)) =$$

$$= T(z)\,(U_f \mathbf{x}(z)) = \text{a.p.t.}\ T(U_f \mathbf{x}(z)) = (T U_f)\mathbf{x}(z)$$

deci $U_f T = T U_f$.

a) Pentru a demonstra că condiția (1) este suficientă vom presupune mai întîi că Z este *compact*. Fie $\mathfrak{D}$ mulțimea cîmpurilor care sînt combinații liniare cu coeficienți complecși raționali de elemente din $\mathcal{A}_0$ și, pentru fiecare $z \in Z$, să notăm $E_0(z) = \{\mathbf{x}(z) \mid \mathbf{x} \in \mathfrak{D}\}$. Pentru fiecare

$\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ să însemnăm cu $\mathbf{x}^*$ un cîmp determinat din $\mathfrak{L}^{\Phi_2}_{\mathcal{B}}$, care aparține clasei de echivalență a lui $T\mathbf{x}$. Fie

$$N(\lambda, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{z \mid (\lambda \mathbf{x} + \beta \mathbf{y})^*(z) \neq \lambda \mathbf{x}^*(z) + \beta \mathbf{y}^*(z)\}$$

$$(\lambda, \beta \text{ raționali}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{D})$$

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{z \mid \mathbf{x}(z) = \mathbf{y}(z), \ \mathbf{x}^*(z) \neq \mathbf{y}^*(z)\}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{D},$$

și fie N reuniunea tuturor mulțimilor $N(\lambda, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ și $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Fiecare $N(\lambda, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ este neglijabil, evident. De asemenea fiecare $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este neglijabil. Într-adevăr, dacă scriem $V = \{z \mid \mathbf{x}(z) = \mathbf{y}(z)\}$ avem

$$\varphi_V(z)\mathbf{x}^*(z) = \varphi_V(z)T\mathbf{x}(z) = U_{\varphi_V} T\mathbf{x}(z) = \text{a.p.t. } TU_{\varphi_V}\mathbf{x}(z) =$$

$$= TU_{\varphi_V}\mathbf{y}(z) = \text{a.p.t.} U_{\varphi_V} T\mathbf{y}(z) = \varphi_V(z)\mathbf{y}^*(z)$$

și deci $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este neglijabil. Urmează că N este neglijabil. Pentru fiecare $x \in E_0(z)$, $(z \in \complement N)$ să punem

$$T(z)x = x^*, \tag{3}$$

unde $x^* = \mathbf{x}^*(z)$, dacă $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$ și $\mathbf{x}(z) = x$; $T(z)$ este definit fără ambiguitate pentru $z \in \complement N$ pe $E_0(z)$, deoarece dacă $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{D}$ și $z \in \complement N$, $\mathbf{x}_1(z) = \mathbf{x}_2(z)$ implică $\mathbf{x}_1^*(z) = \mathbf{x}_2^*(z)$.

$T(z)$ este o aplicație liniară pe corpul numerelor complexe raționale a lui $E_0(z)$ în $F(z)$, $z \in \complement N$, și vom arăta că aproape pentru orice $z \in Z$, $T(z)$ este continuă pe $E_0(z)$.

Pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$ și $z \in \complement N$ avem

$$T\mathbf{x}(z) = T(z)\mathbf{x}(z). \tag{4}$$

Pentru orice $z \in N$ vom pune $T(z) = 0$. Pentru a arăta că $T(z)$ este continuă aproape pentru orice $z \in Z$, este suficient să arătăm că funcția scalară

$$g(z) = \sup \{\| T(z)x \| \mid x \in E_0(z), \| x \| \leqslant 1\} =$$

$$= \sup \{\| T(z)\mathbf{x}(z) \| \mid \mathbf{x} \in \mathfrak{D}, \| \mathbf{x}(z) \| \leqslant 1\}$$

este *sumabilă*, deci finită aproape peste tot. Presupunînd că $g(z)$ este sumabilă avem

$$\| T(z)x \| \leqslant g(z) < \infty \qquad \text{a.p.t.},$$

dacă $x \in E_0(z)$ și $\| x \| \leqslant 1$.

În punctele în care g este infinită vom modifica pe $T(z)$, punînd $T(z) = 0$ și atunci vom avea

$$\| T(z)x \| < \infty,$$

dacă $x \in E_0(z)$ și $\| x \| \leqslant 1$, oricare ar fi $z \in E$.

Se arată ușor ca $T(z)$ este *aditiv* pe $E_0(z)$. Dacă $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{D}$ $\mathbf{x}(z) = x$ și $\mathbf{y}(z) = y$, atunci

$$T(z)(x+y) = (x+y)^* = (\mathbf{x}+\mathbf{y})^*(z) = \mathbf{x}^*(z) + \mathbf{y}^*(z) =$$
$$= x^* + y^* = T(z)\,x + T(z)\,y.$$

Rezultă că pentru fiecare $z \in Z$, $T(z)$ este omogen pentru numerele raționale.

Fie $x \in E_0(z)$ oarecare. Pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr a astfel încît $1 < a < 1+\varepsilon$ și astfel încît $a\,\|x\|$ să fie *rațional*. Elementul $\dfrac{x}{a\,\|x\|}$ aparține lui $E_0(z)$ și are norma < 1, deci

$$\left\| T(z)\,\frac{x}{a\,\|x\|} \right\| \leqslant g(z),$$

adică $\|T(z)x\| \leqslant a g(z)\,\|x\|$.
Făcînd $a \to 1$ prin numere raționale obținem

$$\|T(z)x\| \leqslant g(z)\,\|x\| \quad \text{pentru orice } x \in E_0(z). \tag{5}$$

Aceasta înseamnă că pentru fiecare $z \in Z$, $T(z)$ este *uniform continuă* pe $E_0(z)$ și deci poate fi prelungită în mod unic la întreg $E(z)$ ca o aplicație continuă, în felul cunoscut : dacă $x \in E(z)$, $x_n \in E_0(z)$ și $x_n \to x$, atunci punem $T(z)\,x = \lim T(z)\,x_n$.

$T(z)$ este *aditiv* pe $E(z)$: dacă $x, y \in E(z)$, $x_n, y_n \in E_0(z)$, $x_n \to x$ și $y_n \to y$, atunci $x_n + y_n \to x + y$ și

$$T(z)\,(x+y) = T(z)\,(\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)) = \lim_{n\to\infty} T(z)\,(x_n+y_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} T(z)\,x_n + \lim_{n\to\infty} T(z)\,y_n = T(z)\,x + T(z)\,y.$$

Urmează că $T(z)$ este omogenă pe $E(z)$, adică este o aplicație liniară continuă pe $E(z)$.

Rămîne să arătăm că pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ avem egalitatea (4),

$$\mathbf{T}\mathbf{x}(z) = \mathbf{T}(z)\mathbf{x}(z) \quad \text{a.p.t.}$$

Am văzut că această egalitate este valabilă, prin definiția lui $T(z)$ pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$. Ea este atunci valabilă pentru orice $\mathbf{x}$ de forma $\sum f_i \mathbf{x}_i$, $(f_i \in \mathfrak{L}^\infty_C,\ \mathbf{x}_i \in \mathfrak{D},\ 1 \leqslant i \leqslant m)$. Într-adevăr

$$T\Big(\sum f_i \mathbf{x}_i\Big)(z) = \sum (T f_i \mathbf{x}_i)\,(z) = \text{a.p.t.} \sum f_i(z)\,T\mathbf{x}_i(z) =$$
$$= \text{a.p.t.} \sum f_i(z)\,T(z)\,\mathbf{x}_i(z) = T(z)\Big(\sum f_i(z)\,\mathbf{x}_i(z)\Big) = T(z)\Big(\sum f_i \mathbf{x}_i\Big)\,(z).$$

Dacă $(\mathbf{x}_n)$ este un șir de cîmpuri din $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ pentru care este valabilă egalitatea (4), și care *converge uniform* către un cîmp $\mathbf{x}$, atunci egalitatea (4)

este valabilă și pentru $\mathbf{x}$. Într-adevăr, convergența uniformă atrage convergența în $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ (deoarece Z este compact):

$$\| \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \|_{\Phi_1} = \sup_{|h|_{\Psi_1} \leqslant 1} \int \| \mathbf{x}_n(z) - \mathbf{x}(z) \| \, | h(z) | \, d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant \text{ad max} \| \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \| \sup_{|h|_{\Psi_1} \leqslant 1} \int | h(z) | \, d\mu(z) = \text{ad max} \| \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \| \, \| \varphi_Z \|_{\Phi_1}$$

și cum $| \varphi_Z |_{\Phi_1} = \int \Phi_1(\varphi_Z(z)) \, d\mu(z) = \Phi_1(1) \, \mu(Z) < \infty$, urmează că $\| \varphi_Z \|_{\Phi_1} < \infty$ și deci $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ în $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$. Atunci $T\mathbf{x}_n \to T\mathbf{x}$. Pe de altă parte, deoarece am presupus că $\mathbf{x}_n$ verifică egalitatea (4),

$$T(z)\,\mathbf{x}(z) = \lim_{n \to \infty} T(z)\,\mathbf{x}_n(z) = \lim_{n \to \infty} T\mathbf{x}_n(z) = T\mathbf{x}(z) \quad \text{a.p.t.}$$

În particular, rezultă că egalitatea (4) este valabilă pentru cîmpurile $\mathbf{x}$ continue, deoarece un asemenea cîmp este limită uniformă, pe Z, de cîmpuri de forma $\sum f_i \mathbf{x}_i$, f_i continue pe Z, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{A}_0 \subset \mathfrak{D}$, $1 \leqslant i \leqslant m$ (cap. I proprietatea 4) a cîmpurilor continui).

Fie acum $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ oarecare; $\mathbf{x}$ fiind măsurabil, există o mulțime neglijabilă $A \subset Z$ și o partiție a lui $Z \cap \complement A$ formată dintr-un șir (K_n) de mulțimi compacte, astfel încît $\mathbf{x}$ să fie continuă pe fiecare K_n. Să punem pentru fiecare n, $\mathbf{x}_n = \varphi_{K_n} \mathbf{x}$. Atunci $\mathbf{x}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n(z)$ a.p.t. Pentru fiecare n, $\mathbf{x}_n$ este limită uniformă pe K_n de cîmpuri de forma $\sum_{i=1}^{m} f_i^n \mathbf{x}_i^n$, unde f_i^n sînt continue pe K_n și nule în afara lui K_n, iar $\mathbf{x}_i^n \in \mathcal{A}_0$ și prin urmare $\mathbf{x}_n$ verifică relația (4). Să reamintim că $T(\varphi_{K_n} \mathbf{x})(z) = \varphi_{K_n}(z)\, T\mathbf{x}(z)$ a.p.t. Fie atunci $z \in Z$; dacă $z \in K_n$, urmează că $\mathbf{x}(z) = \mathbf{x}_n(z)$ și deci $T\mathbf{x}(z) = \varphi_{K_n}(z)\, T\mathbf{x}(z) = T\mathbf{x}_n(z) = T(z)\,\mathbf{x}_n(z) = T(z)\,\mathbf{x}(z)$ aproape pentru orice z și egalitatea (4) este verificată.

b) Să arătăm acum că funcția g este *sumabilă*. Mai întîi g este *măsurabilă* deoarece dacă punem $V(\mathbf{x}) = \{ z \mid \| \mathbf{x}(z) \| \leqslant 1 \}$ pentru $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$, g este anvelopa superioară a mulțimii numărabile de funcții măsurabile $\varphi_{V(\mathbf{x})} \| T(z)\,\mathbf{x}(z) \|$.

Fie $0 < a < 1$ și pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$ să punem

$$B(\mathbf{x}) = \{ z \mid \| T(z)\,\mathbf{x}(z) \geqslant a g_n(z), \| \mathbf{x}(z) \| \leqslant 1 \},$$

unde $g_n = \inf(g, n)$, n întreg > 0. $B(\mathbf{x})$ este măsurabilă pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$, deoarece $T(z)\,\mathbf{x}(z) = T\mathbf{x}(z)$ a.p.t. și $\| T\mathbf{x}(z) \|$ este măsurabil ($T\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi_2}_{\mathcal{B}}$), $\| \mathbf{x}(z) \|$ este continuă,
$B(\mathbf{x}) = \{ z \mid \| T(z)\,\mathbf{x}(z) \| \geqslant a g_n(z) \} \cap \{ z \mid \| \mathbf{x}(z) \| \leqslant 1 \}$ iar cei doi membri ai intersecției sînt mulțimi măsurabile.

Fie $(A(\mathbf{x}))_{\mathbf{x}\in\mathfrak{D}}$ o familie de părți măsurabile disjuncte două cîte două, astfel ca $\bigcup_{\mathbf{x}\in\mathfrak{D}} A(\mathbf{x}) = Z$ și $A(\mathbf{x}) \subset B(\mathbf{x})$ pentru fiecare $\mathbf{x}\in\mathfrak{D}$. Să punem

$$\mathbf{u}(z) = \sum_{\mathbf{x}\in\mathfrak{D}} \varphi_{A(\mathbf{x})}(z)\,\mathbf{x}(z).$$

Dacă $z\in A(\mathbf{x})$ avem $\mathbf{u}(z) = \mathbf{x}(z)$, deci $\|\mathbf{u}(z)\| = \|\mathbf{x}(z)\| \leqslant 1$.

Pentru fiecare $f\in\mathcal{L}_C^\infty$ avem

$$\|T\|\,\|f\|_{\Phi_1} \geqslant \|T\|\cdot\|f\mathbf{u}\|_{\Phi_1} \geqslant \|Tf\mathbf{u}\|_{\Phi_2} =$$

$$= \sup_{|h|_{\Psi_2}\leqslant 1}\int \|Tf(z)\,\mathbf{u}(z)\|\,|h(z)|\,d\mu(z) = \sup_{|h|_{\Psi_2}\leqslant 1}\int \|f(z)\,T\mathbf{u}(z)\|\,|h(z)|\,d\mu(z) =$$

$$= \sup_{|h|_{\Psi_2}\leqslant 1}\int |f(z)|\,\|T(z)\,\mathbf{u}(z)\|\,|h(z)|\,d\mu(z) \geqslant \sup_{|h|_{\Psi_2}\leqslant 1}\int |f(z)|\,a g_n(z)\,|h(z)|\,d\mu(z),$$

unde h sînt funcții scalare măsurabile definite pe Z; a și n fiind arbitrari obținem

$$\|T\|\,\|f\|_{\Phi_1} \geqslant \sup_{|h|_{\Psi_2}\leqslant 1}\int |f(z)|\,|g(z)|\,|h(z)|\,d\mu(z). \tag{7}$$

Dacă $p>0$ este astfel ca $\mu(z)\Psi_2(p) \leqslant 1$ și luăm $h(z) \equiv p$ avem $|h|_{\Psi_2} \leqslant 1$, deci

$$\|T\|\,\|f\|_{\Phi_1} \geqslant p\int |f(z)|\,|g(z)|\,d\mu(z) \tag{8}$$

și pentru că $\|f\|_{\Phi_1} \leqslant |f|_{\Phi_1}+1$,

$$\|T\|\,(|f|_{\Phi_1}+1) \geqslant p\int |f(z)|\,|g(z)|\,d\mu(z). \tag{9}$$

Dacă $q>0$ este astfel încît $\mu(Z)\Phi_1(q)\leqslant 1$ și luăm $f(z)\equiv q$ avem $|f|_{\Phi_1}\leqslant 1$ și deci

$$2\|T\| \geqslant pq\int g(z)\,d\mu(z), \tag{10}$$

de unde rezultă că funcția g este sumabilă și cu aceasta prima parte a teoremei este demonstrată, dacă Z este compact.

c) Să demonstrăm acum egalitatea (2) pentru cazul $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$. Pentru aceasta reluăm inegalitatea (7) sub forma

$$\sup_{|h|_\Psi\leqslant 1}\int |f(z)|\,\|T\|\,|h(z)|\,d\mu(z) \geqslant \sup_{|h|_\Psi\leqslant 1}\int |f(z)|\,|g(z)|\,|h(z)|\,d\mu(z).$$

Fie b astfel încît $0<b<1$. Presupunînd $T\neq 0$ (altfel teorema este banal verificată), pentru orice funcție neneglijabilă $f\in\mathcal{L}_C^\infty$ avem

$$\sup_{|h|_\Psi\leqslant 1}\int |f(z)|\,\|T\|\,|h(z)|\,d\mu(z) > b\sup_{|h|_\Psi\leqslant 1}\int |f(z)|\,|g(z)|\,|h(z)|\,d\mu(z), \tag{11}$$

de unde

$$\sup_{|h|_\Psi \leqslant 1} \int |f(z)| \, (\|T\| - bg(z)) \, |h(z)| \, d\mu(z) > 0. \tag{12}$$

Fie $\varepsilon > 0$ și $A_\varepsilon = \{z \mid \|T\| - bg(z) \leqslant -\varepsilon\}$; A_ε este neglijabil pentru că altfel φ_{A_ε} ar fi neneglijabil, deci ar verifica relația (12) în locul lui f și am obține

$$0 < \sup_{|h|_\Psi \leqslant 1} \int \varphi_{A_\varepsilon}(z) \, (\|T\| - bg(z)) \, |h(z)| \, d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|h|_\Psi \leqslant 1} \left(-\varepsilon \int \varphi_{A_\varepsilon}(z) \, |h(z)| \, d\mu(z) \right) \leqslant 0,$$

ceea ce este absurd. Cum

$$A = \{z \mid \|T\| - bg(z) < 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1-\frac{1}{n}},$$

A este neglijabil și deci avem a.p.t. $\|T\| \geqslant bg(z)$; făcînd $b \to 1$ obținem

$$\|T\| \geqslant g(z) \qquad \text{a.p.t.}$$

Inegalitatea inversă se demonstrează printr-un calcul direct, ținînd seama că $\|T(z)\| = g(z)$ a.p.t. și deci $\|T(z)\|$ este mărginită în măsură:

$$\|T\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1} \|T\mathbf{x}\|_\Phi = \sup_{\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1} \left(\sup_{|h|_\Psi \leqslant 1} \int \|T\mathbf{x}(z)\| \, |h(z)| \, d\mu(z) \right) =$$

$$= \sup_{\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1} \left(\sup_{|k|_\Psi \leqslant 1} \int \|T(z)\mathbf{x}(z)\| \, |h(z)| \, d\mu(z) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1} \left(\sup_{|h|_\Psi \leqslant 1} \int \|T(z)\| \, \|\mathbf{x}(z)\| \, |h(z)| \, d\mu(z) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \text{ad max} \|T(z)\| \sup_{\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1} \left(\sup_{|h|_\Psi \leqslant 1} \int \|\mathbf{x}(z)\| \, |h(z)| \, d\mu(z) \right) =$$

$$= \text{ad max} \|T(z)\| \sup_{\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1} \|\mathbf{x}\|_\Phi = \text{ad max} \|T(z)\|,$$

de unde rezultă egalitatea (2).

d) Să considerăm acum cazul Z *local compact*. Să observăm mai întîi că mulțimea

$$A = \{z \mid \mathbf{x}(z) = 0, \quad T\mathbf{x}(z) \neq 0\}$$

este neglijabilă. Într-adevăr, dacă $V = \{z \mid \mathbf{x}(z) = 0\}$, atunci

$$\varphi_V(z) \, T\mathbf{x}(z) = \text{a.p.t.} \quad T(\varphi_V \mathbf{x}(z)) = T\mathbf{x}(z).$$

Prin urmare dacă un cîmp $\mathbf{x}$ are suportul într-o mulțime $A \subset Z$, $T\mathbf{x}$ poate fi modificat pe o mulțime neglijabilă ca să aibă suportul tot în A.

Să considerăm spațiul vectorial $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}(K)$ al cîmpurilor de vectori definite pe o submulțime compactă $K \subset Z$ sumabile. El poate fi identificat cu un subspațiu vectorial al lui $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$, prelungind cu zero în afara lui K cîmpurile din $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}(K)$. Din cele de mai sus se poate considera că, notînd cu T_K restricția lui T la $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}(K)$, T_K aplică pe $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}(K)$ în $\mathfrak{L}^{\Phi_2}_{\mathcal{B}}(K)$. Pentru un cîmp de vectori $\mathbf{x}$, definit pe Z, vom nota cu $\mathbf{x}_K$ restricția lui $\mathbf{x}$ la K (identificat cu cîmpul $\varphi_K\mathbf{x}$). Se verifică ușor că norma $\| \mathbf{x}_K \|_{\Phi_1}$, calculată pe K, coincide cu norma $\| \varphi_K\mathbf{x} \|_{\Phi}$, calculată pe Z. Să mai observăm că restricția $\mathcal{A}_K$ a familiei fundamentale $\mathcal{A}$ la K, este o familie fundamentală pe K și verifică axioma (G) (deoarece $\mathcal{A}$ verifică axioma (G*)).

După prima parte a demonstrației, pentru fiecare mulțime compactă $K \subset Z$ există o familie $(T_K(z))$ de aplicații liniare continue de la $E(z)$ în $F(z)$, $(z \in K)$, astfel încît

$$T_K\mathbf{x}(z) = T_K(z)\mathbf{x}(z) \qquad \text{a.p.t.} \quad \text{în } K.$$

și

$$\| T_K \| = \text{ad max} \| T_K(z) \| \text{ dacă } \Phi_1 = \Phi_2.$$

Dacă K și K' sînt două mulțimi compacte, atunci $T_K(z) = T_{K'}(z)$ a.p.t. în $K \cap K'$. Într-adevăr, pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{K0} \subset \mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ avem

$$T_K\mathbf{x}(z) = T_K(z)\mathbf{x}(z) = T_{K'}(z)\mathbf{x}(z) \quad \text{a.p.t.} \quad \text{în } K \cap K'$$

și cum mulțimea $\{\mathbf{x}(z) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{A}_{0K}\}$ este numărabilă și densă în $E(z)$ pentru orice $z \in K$, rezultă $T_K(z) = T_{K'}(z)$ a.p.t.

După teorema lui Godement există o familie $(T(z))_{z \in Z}$ de aplicații de la $E(z)$ în $F(z)$, astfel încît pentru orice compact $K \subset Z$, $T(z) = T_K(z)$ a.p.t. pe K. Avem atunci pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$, $T\mathbf{x}(z) = T(z)\mathbf{x}(z)$ local a.p.t. și deci a.p.t., fiindcă $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}} \subset \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}}$.

Pentru a deduce formula (2) în cazul $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ să observăm mai întîi că $\| T_K \| \leqslant \| T \|$ pentru orice mulțime compactă $K \subset Z$. Într-adevăr, $T_K\mathbf{x}_K = T\mathbf{x}_K$, deci

$$\| T_K \| = \sup_{\|\mathbf{x}_K\|_{\Phi} \leqslant 1} \| T_K\mathbf{x}_K \|_{\Phi_1} = \sup_{\|\mathbf{x}_K\|_{\Phi} \leqslant 1} \| T\mathbf{x}_K \|_{\Phi} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\Phi} \leqslant 1} \| T\mathbf{x}_K \|_{\Phi} \leqslant \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\Phi} \leqslant 1} \| T\mathbf{x} \|_{\Phi} = \| T \|$$

și cum $\| T_K \| = \text{ad max} \| T_K(z) \|$, urmează $\| T \| \geqslant \| T(z) \|$ a.p.t. pe orice compact K, adică $\| T \| \geqslant \max$ în măsură $\| T(z) \|$.

Inegalitatea inversă se deduce printr-un calcul direct ca și în cazul Z compact și cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Observații. 1° Orice familie $(P(z))_{z \in Z}$ verificînd egalitățile $T\mathbf{x}(z) = P(z)\mathbf{x}(z)$ a.p.t. pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ (sau chiar numai pentru cîmpurile

mărginite din $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$) coincide cu familia $(T(z))_{z\in Z}$ local a.p.t. (și deci a.p.t. dacă Z este numărabil la infinit, sau, mai general, dacă Z este reuniune numărabilă de mulțimi de măsură finită). Într-adevăr, fie $K \subset Z$ o mulțime compactă, și $(\mathbf{x}_n)$ un șir de cîmpuri din $\mathcal{A}$ astfel încît pentru fiecare $z \in K$ mulțimea $\{\mathbf{x}_n(z)\}$ să fie densă în $E(z)$. ($\mathcal{A}$ verifică axioma (G*)). Atunci avem

$$T(z)\,\varphi_K(z)\,\mathbf{x}_n(z) = P(z)\varphi_K(z)\,\mathbf{x}_n(z) \quad \text{a.p.t.}$$

pentru orice n, (deoarece $\varphi_K \mathbf{x}_n \in \mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ pentru orice n), de unde rezultă ca $T(z) = P(z)$ a.p.t. pe K, deci $T(z) = P(z)$ local a.p.t. Reciproc, dacă $T(z) = P(z)$ local a.p.t., atunci $T\mathbf{x}(z) = P(z)\,\mathbf{x}(z)$ a.p.t. pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$.

2° Teorema 1 este valabilă, de asemenea, dacă în locul lui $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ se consideră un subspațiu al său invariant față de toți operatorii $U_f, f \in \mathfrak{L}^{\infty}_{C}$, în particular pentru aderența $\mathfrak{X}$ a cîmpurilor mărginite din $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$. Demonstrația este exact aceeași.

3° O aplicație decompozabilă T definită pe $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ este perfect determinată prin restricția sa la $\mathfrak{X}$. Într-adevăr, fie $(T(z))_{z\in Z}$ astfel încît

$$T\mathbf{x}(z) = T(z)\,\mathbf{x}(z) \quad \text{a.p.t.}$$

pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ și $(T_1(z))_{z\in Z}$ astfel încît

$$T_1\mathbf{x}(z) = T_1(z)\mathbf{x}(z) \quad \text{a.p.t.}$$

pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$. Atunci, pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$ avem

$$T(z)\mathbf{x}(z) = T\mathbf{x}(z) = T_1\mathbf{x}(z) = T_1(z)\mathbf{x}(z) \quad \text{a.p.t.}$$

După observația 1°, avem $T(z) = T_1(z)$ local a.p.t., și deci $T\mathbf{x}(z) = T_1(z)\,\mathbf{x}(z)$ a.p.t. pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$. Rezultă că dacă T_1 este o operație decompozabilă definită pe $\mathfrak{X}$ care se poate prelungi la o operație decompozabilă T pe întreg $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$, atunci prelungirea este unică, iar dacă $\Phi_1 = \Phi_2$, atunci $\|T\| = \|T_1\|$. Dacă $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ și T_1 este o operație decompozabilă definită pe $\mathfrak{X}$, atunci T_1 se poate prelungi la întreg $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Să observăm mai întîi că dacă $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ este mărginit, atunci $T_1\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{B}}$ este mărginit,

$$\|T_1\mathbf{x}(z)\| = \|T_1(z)\mathbf{x}(z)\| \leqslant \|T_1(z)\|\;\|\mathbf{x}(z)\| \leqslant \|T_1\|\,\|\mathbf{x}\|_\infty,$$

local a.p.t., și deci dacă $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$, atunci $T_1\mathbf{x} \in \mathfrak{Y}$, unde $\mathfrak{Y}$ este aderența cîmpurilor mărginite din $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{B}}$.

Pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$ să punem

$$T\mathbf{x}(z) = T_1(z)\,\mathbf{x}(z).$$

Dacă $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$, atunci

$$\| T\mathbf{x} \|_{\Phi} = \sup_{|h|_{\Psi} \leqslant 1} \int \| T\mathbf{x}(z) \| \; | h(z) | \, d\mu(z) =$$

$$= \sup_{|h|_{\Psi} \leqslant 1} \int \| T(z)\,\mathbf{x}(z) \| \; | h(z) | \, d\mu(z) \leqslant \| T_1 \| \sup_{|h|_{\Psi} \leqslant 1} \int \| \mathbf{x}(z) \| \; | h(z) | \, d\mu(z) =$$

$$= \| T_1 \| \, \| \mathbf{x} \|_{\Phi} < \infty,$$

deci $T\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi}$, și deci T este o operație decompozabilă a cărei restricție la $\mathfrak{X}$ este egală cu T_1.

Observațiile 2° și 3° nu se pot pune în evidență în spațiile $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{P}$ ale lui Godement, deoarece $\mathfrak{X} = \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{P}$.

4° Fie $(T(z))_{z \in Z}$ o familie de aplicații liniare continue ale spațiilor $E(z)$ în spațiile respective $F(z)$. Pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ vom pune

$$T\mathbf{x}(z) = T(z)\mathbf{x}(z).$$

T este o aplicație liniară a lui $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ în $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ vom indica prin T atît această aplicație, cît și familia $(T(z))_{z \in Z}$ însăși.

Vom spune că familia T este *măsurabilă*, dacă $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ implică $T\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$. Pentru ca T să fie măsurabil este necesar și suficient ca $T\,\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$ pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ (demonstrația se face ca în [17] *)

Vom spune că familia T este *mărginită* (*în măsură*) dacă funcția scalară $z \to \| T(z) \|$ este mărginită în măsură.

Fie $T(z))_{z \in Z}$ o familie de operații liniare, *măsurabilă* și *mărginită în măsură*. Pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ *mărginit*, $T\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$ este mărginit, $\| T\mathbf{x}(z) \| = \| T(z)\,\mathbf{x}(z) \| \leqslant \| T(z) \| \; \| \mathbf{x}(z) \|$ și deci $\| T\,\mathbf{x} \|_{\infty} \leqslant$ ad max $\| T(z) \| \cdot \| \mathbf{x} \|_{\infty} < \infty$.

Urmează că familia T este *continuă* pentru topologia convergenței uniforme pe $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ și $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}$.

Fie Φ_1, Ψ_1, Φ_2, Ψ_2, două perechi de funcții complementare în sensul lui Young astfel ca :

$|h|_{\Psi_2} \leqslant 1$ *implică* $|h|_{\Psi_1} \leqslant 1$ *pentru orice funcție scalară măsurabilă* h, *definită pe* Z.

Atunci T este o aplicație liniară continuă (decompozabilă) a lui $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ în $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}$. Într-adevăr, dacă $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$, avem

$$\| T\mathbf{x} \|_{\Phi_2} = \sup_{|h|_{\Psi_2} \leqslant 1} \int \| T\mathbf{x}(z) \| \; | h(z) | \, d\mu(z) = \sup_{|h|_{\Psi_2} \leqslant 1} \int \| T(z)\,\mathbf{x}(z) \| \; | h(z) | \, d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant \text{ad max } \| T(z) \| \sup_{|h|_{\Psi_1} \leqslant 1} \int \| \mathbf{x}(z) \| \; | h(z) | \, d\mu(z) = \text{ad max } \| T(z) \| \; \| \mathbf{x} \|_{\Phi_1}$$

și $\| T \| \leqslant$ ad max $\| T(z) \|$. Avem $T(\mathfrak{X}) \subset \mathcal{Y}$.

*) Propoziția 18, p. 95.

În particular, putem lua $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$; atunci

$$\|T\| = \text{ad max } \|T(z)\|$$

și în acest caz, $\|T\|$ este independent de Φ.

De aici rezultă de asemenea că dacă T_1 este o aplicație decompozabilă definită pe $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$, cu valori în $\mathfrak{L}^{\Phi_2}_{\mathcal{B}}$ astfel ca familia $(T(z))_{z\in Z}$ corespunzătoare să fie *mărginită în măsură*, și dacă Φ_1 și Φ_2 verifică condiția de mai sus, T_1 se poate prelungi la o operație decompozabilă T pe întreg $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ și $T_1(\mathfrak{X}) \subset \mathfrak{Y} \subset \mathfrak{L}^{\Phi_2}_{\mathcal{B}}$.

5° Dacă în teorema 1, $\Phi_1(u) = \frac{1}{p} u^p$, $\Phi_2(u) = \frac{1}{q} u^q$, și dacă $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, C. T. Ionescu Tulcea [21] a arătat că familia $(T(z))_{z\in Z}$, care verifică relația $T\mathbf{x}(z) = T(z)\mathbf{x}(z)$ a.p.t. pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$, se poate alege astfel încît

$$\|T\| = \left(\int \|T(z)\|^{\frac{pq}{p-q}} d\mu(z)\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

unde $\|T\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|_p \leqslant 1} \|T\mathbf{x}\|_p$.

6° Să considerăm cazul particular cînd $F(z) = C$ pentru orice $z \in Z$ și $\Phi_2(u) = u$. În acest caz $\mathfrak{L}^{\Phi_2}_{\mathcal{B}} = \mathfrak{L}^1_C$ și $\|\mathbf{x}\|_{\Phi_2} = \|\mathbf{x}\|_1$; $\Psi_2(v) = 0$ pentru $v \leqslant 1$ și $\Psi_2(v) = \infty$ pentru $v > 1$ și deci $\mathbf{x}' \in \mathcal{O}^{\Psi_2}_{\mathcal{A}'}$ implică $\|\mathbf{x}'(z)\| \leqslant 1$ a.p.t., adică $|\mathbf{x}'|_{\Psi_2} = 0$. Vom scrie Φ în loc de Φ_1. Familia $(T(z))_{z\in Z}$ este atunci un cîmp de funcționale din $\mathcal{C}(\mathcal{B}')$ pe care-l vom nota cu T'. Pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ funcția scalară $< \mathbf{x}(z), T(z) >$ este *măsurabilă*, deoarece $< \mathbf{x}(z), T(z) > = T(z)\,\mathbf{x}(z) =$ a.p.t. $T\mathbf{x}(z)$ și $T\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^1_C$. Vom arăta că avem în acest caz următoarele inegalități:

$$\frac{1}{2} \|T'\|_{\Psi} \leqslant \|T\| \leqslant \|T'\|_{\Psi}. \tag{13}$$

a) Să presupunem mai întîi Z *compact*. Formula (7) devine, dacă luăm $h(z) \equiv 1$,

$$\sup_{|\mathbf{u}|_{\Psi} \leqslant 1} \|T\| \int |f(z)|\ |\mathbf{u}(z)|\, d\mu(z) \geqslant \int |f(z)|\, g(z)\, d\mu(z) \tag{14}$$

și cum $ab \leqslant \Phi(a) + \Psi(b)$, deducem,

$$\sup_{|\mathbf{u}|_{\Psi} \leqslant 1} \|T\| \left(\int \Phi(|f(z)|)\, d\mu(z) + \int \Psi(|h(z)|)\, d\mu(z) \right) \geqslant$$

$$\geqslant \int |f(z)|\ g(z)\, d\mu(z) \tag{15}$$

Dacă impunem $|f|_\Phi \leqslant 1$, obținem

$$2\|T\| \geqslant \sup_{|f|_\Phi \leqslant 1} \int |f(z)|\, g(z)\, d\mu(z) = \|g\|_\Psi \geqslant \|T'\|_\Psi, \tag{16}$$

adică

$$\frac{1}{2}\|T'\|_\Psi \leqslant \frac{1}{2}\|g\|_\Psi \leqslant \|T\|. \tag{17}$$

Pe de altă parte

$$\|T\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1} \|T\mathbf{x}\|_1 = \sup_{\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1} \int |T\mathbf{x}(z)|\, d\mu(z) =$$

$$= \sup_{\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1} \int |<\mathbf{x}(z), T(z)>|\, d\mu(z) \leqslant \sup_{|\mathbf{x}|_\Phi \leqslant 1} \int |<\mathbf{x}(z), T(z)>|\, d\mu(z) = \|T'\|_\Psi,$$

deoarece $\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1$ implică $|\mathbf{x}|_\Phi \leqslant 1$, adică

$$\|T\| \leqslant \|T'\|_\Psi \leqslant \|g\|_\Psi. \tag{18}$$

Inegalitățile (17) și (18) ne dau (13).

b) Să trecem la cazul *Z local compact*. Deoarece $\|T'\|_\Psi \leqslant \|g\|_\Psi$ pentru a demonstra inegalitatea (17) este suficient să observăm că $\|g\|_\Psi = \sup_K \|g_K\|_\Psi$ și că $\|T\| = \sup_K \|T_K\|$. Inegalitatea (18) se deduce ca mai sus.

Să demonstrăm egalitatea $\|T\| = \sup_K \|T_K\|$. Deoarece $\|T\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1} \|T\mathbf{x}\|_1$ pentru orice $0 < a < 1$ există $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$, astfel încît $a \cdot \|T\| < \|T\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1$. Fie A o mulțime în afara căreia $\mathbf{x}(z) = 0$ a.p.t., pe care s-o presupunem reuniunea unui șir crescător (K_n) de mulțimi compacte. Atunci

$$T\mathbf{x} = T\varphi_A\mathbf{x} = \varphi_A T\mathbf{x} \quad \text{a.p.t.}$$

și deci

$$\|T\mathbf{x}\|_1 = \|T\mathbf{x}\varphi_A\|_1 = \sup_n \|\varphi_{K_n} T\mathbf{x}\|_1.$$

Există atunci o mulțime compactă K_n astfel încît

$$a \cdot \|T\| \leqslant \|T\mathbf{x}\varphi_{K_n}\|_1.$$

Dar $\|\varphi_{K_n} T\mathbf{x}\|_1 = \|T_{K_n}\mathbf{x}_{K_n}\|_1 \leqslant \|T_{K_n}\|\,\|\mathbf{x}_{K_n}\|_\Phi \leqslant \|T_{K_n}\| \leqslant \sup_K \|T_K\|$, deci $a \cdot \|T\| \leqslant \sup \|T_K\|$ și, făcînd $a \to 1$, obținem $\|T\| \leqslant \sup_K \|T_K\|$. Reciproc, $\|T_K\| = \sup_{\|\mathbf{x}_k\|_\Phi \leqslant 1} \|T_K\mathbf{x}_K\|_1 = \sup_{\|\mathbf{x}_k\|_\Phi \leqslant 1} \|T\mathbf{x}_K\|_1 \leqslant \sup_{\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1} \|T\mathbf{x}\|_1 = \|T\|$ și astfel inegalitatea este demonstrată.

7° Dacă familia fundamentală $\mathcal{A}'$ verifică axioma (G*) atunci cîmpul de funcționare T' este *măsurabil*. Fie $K \subset Z$ o mulțime compactă și $\mathcal{A}_{0K}$

o parte numărabilă din $\mathcal{A}'$ astfel încît pentru orice $z \in K$ mulțimea $\{\mathbf{x}'(z) \mid \mathbf{x}' \in \mathcal{A}'_{0K}\}$ este densă în $E'(z)$, și fie

$$B(\mathbf{x}') = \{z \mid \|\mathbf{x}'(z) - T(z)\| < \varepsilon\} \cap K;$$

$B(\mathbf{x}')$ este măsurabilă. Într-adevăr, pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{0K}$, funcția scalară $<\mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z)>$ este măsurabilă (chiar continuă) și, de asemenea, $T(z)\mathbf{x}_K(z)$ este măsurabilă (deoarece $\mathbf{x}_K \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și $T\mathbf{x}_K \in \mathfrak{L}^1_C$). Atunci

$$<\mathbf{x}_K(z), \mathbf{x}'(z)> - <\mathbf{x}_K(z), T(z)> = <\mathbf{x}_K(z), \mathbf{x}'(z) - T(z)>$$

este măsurabilă. Mulțimea $V(\mathbf{x}) = \{z \mid \|\mathbf{x}(z)\| \leqslant 1\} \cap K$ este măsurabilă, fiindcă $\mathbf{x}$ este continuu.

Funcția $\|\mathbf{x}'(z) - T(z)\|$ este pe K anvelopa superioară a mulțimii numărabile de funcții măsurabile $\varphi_{V(\mathbf{x})} |<\mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) - T(z)>|$ cînd $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{0k}$, deci restricția sa la K este măsurabilă, de unde rezultă că $B(\mathbf{x}')$ este măsurabil pentru orice $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'_{0K}$ și $K = \bigcup_{\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'_{0K}} B(\mathbf{x}')$.

Fie $(A(\mathbf{x}'))_{\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'_{0K}}$ o familie de părți măsurabile disjuncte două cîte două, astfel încît $K = \bigcup_{\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'_{0K}} A(\mathbf{x}')$ și $A(\mathbf{x}') \subset B(\mathbf{x}')$ pentru fiecare $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'_{0K}$.

Să punem

$$\mathbf{y}'(z) = \sum_{\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'_{0K}} \varphi_{A(\mathbf{x}')} \mathbf{x}'(z);$$

$\mathbf{y}'$ este evident măsurabil și pentru $z \in A(\mathbf{x}')$ avem

$\mathbf{y}'(z) = \mathbf{x}'(z)$, deci $\|\mathbf{y}'(z) - T(z)\| \leqslant \varepsilon$ pentru orice $z \in K$.

Urmează că pe fiecare mulțime compactă, T' este limita uniformă de cîmpuri măsurabile, de unde rezultă că T' este măsurabil (cap. I, propoziția 6).

8° În condițiile de la observația 7°, dacă $\Psi(v_0) = 0$ pentru un $v_0 > 0$, urmează că $T' \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$. Dacă $\Psi(v) > 0$ pentru $v > 0$, din $\|T'\|_{\Psi} < \infty$ deducem că $T'(z) = 0$ local a.p.t., în afară unui șir de mulțimi compacte, și deci modificînd pe T' convenabil pe o mulțime local neglijabilă, obținem $T' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$ și deci $T' \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$.

§ 2. Funcționale liniare continue pe $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Pe baza teoremei 1 și a observațiilor 6°, 7°, 8°, care o urmează, vom da o teoremă de reprezentare integrală a funcționalelor liniare continue definite pe $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Teorema 2. *Dacă există o constantă* $M > 1$ *astfel încît* $\Phi(2u) \leqslant M\,\Phi(u)$, *pentru* $u \geqslant 0$, *pentru orice formă liniară continuă* f, *definită pe* $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathfrak{A}}$, *există un cîmp de funcționale* $\mathbf{x}'_f \in \mathfrak{C}(\mathfrak{S}')$, *astfel încît*

$$f(\mathbf{x}) = \int < \mathbf{x}(z),\ \mathbf{x}'_f(z) > d\mu(z) \tag{19}$$

pentru fiecare $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathfrak{A}}$ *și*

$$\frac{1}{2} \| \mathbf{x}'_f \|_{\Psi} \leqslant \|f\| \leqslant \| \mathbf{x}'_f \|_{\Psi}. \tag{20}$$

Dacă $\mathfrak{A}'$ *verifică axioma* (G*), *atunci* $\mathbf{x}'_f \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathfrak{A}'}$.

Demonstrație. a) Vom presupune mai întîi Z *compact*. Fie $\mathbf{x}$ un cîmp *mărginit* din $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathfrak{A}}$; pentru orice mulțime măsurabilă $A \subset Z$ să punem

$$\nu_{\mathbf{x}}(A) = f(\varphi_A \mathbf{x}). \tag{21}$$

b) $\nu_{\mathbf{x}}$ este o funcție complexă de mulțime, *complet aditivă*.

Într-adevăr, fie (A_n) un șir de mulțimi măsurabile, disjuncte două cîte două, și să notăm $A = \bigcup_n A_n$. Avem

$$\|\varphi_A \mathbf{x}\|_{\Phi} = \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_{A_n} \mathbf{x}\|_{\Phi}$$

cum se constată ușor. Vom arăta că avem și $\|\varphi_A \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} \mathbf{x}\|_{\Phi} \to 0$.

Dar $\|\sum_{i=n}^{\infty} \varphi_{A_i} \mathbf{x}\|_{\Phi} \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \|\varphi_{A_i} \mathbf{x}\|_{\Phi} \to 0$, deoarece este restul unei serii convergente. Urmează că

$$f(\varphi_A \mathbf{x}) = \lim_{n \to \infty} f\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} \mathbf{x}\right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varphi_{A_i} \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\varphi_{A_i} \mathbf{x}),$$

adică

$$\nu_{\mathbf{x}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_{\mathbf{x}}(A_i).$$

c) Este evident că $\nu_{\mathbf{x}}$ este *absolut continuă* în raport cu μ.

Există atunci după teorema lui Radon-Nikodym o funcție integrabilă complexă $T\mathbf{x}(z)$, astfel încît pentru orice mulțime măsurabilă $A \subset Z$ să avem

$$\nu_{\mathbf{x}}(A) = \int \varphi_A(z)\, T\mathbf{x}(z) d\mu(z) = f(\varphi_A \mathbf{x}).$$

Vom pune $\nu_{\mathbf{x}}(\varphi_A) = \nu_{\mathbf{x}}(A)$; $\nu_{\mathbf{x}}$ se poate prelungi ca o *funcțională liniară continuă* pe $\mathfrak{L}^{\infty}_{C}$, punînd pentru orice $g \in \mathfrak{L}^{\infty}_{C}$

$$\nu_{\mathbf{x}}(g) = \int g(z)\, T\mathbf{x}(z)\, d\mu(z),$$

și atunci $\nu_{\mathbf{x}}(g) = f(g\mathbf{x})$ pentru $g \in \mathfrak{L}_C^\infty$. Într-adevăr, dacă g este o funcție etajată măsurabilă de forma $g = \sum c_i \varphi_{A_i}$, $f(g\mathbf{x}) = \sum c_i f(\varphi_{A_i}\mathbf{x}) =$

$$= \sum c_i \int \varphi_{A_i}(z)\, T\mathbf{x}(z) d\mu(z) = \int \sum c_i \varphi_{A_i}(z) T\mathbf{x}(z)\, d\mu(z) = \int g(z) T\mathbf{x}(z) d\mu(z) = \nu_{\mathbf{x}}(g).$$

Fie $g \in \mathfrak{L}_C^\infty$ oarecare. Există un șir de funcții etajate măsurabile (g_n), uniform convergent a.p.t. către g și astfel ca $|g_n(z)| \leqslant |g(z)|$. După teorema lui Lebesque, avem

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n(z) T\mathbf{x}(z)\, d\mu(z) = \int g(z)\, T\mathbf{x}(z)\, d\mu(z).$$

Pe de altă parte, convergența uniformă a șirului (g_n) către g implică $|g_n\mathbf{x} - g\mathbf{x}\|_\Phi \to 0$. Atunci $\lim_{n\to\infty} f(g_n\mathbf{x}) = f(g\mathbf{x})$, și cum $f(g_n(\mathbf{x})) =$

$= \int g_n(z)\, T\mathbf{x}(z)\, d\mu(z)$, urmează $f(g\mathbf{x}) = \int g(z) T\mathbf{x}(z)\, d\mu(z) = \nu_{\mathbf{x}}(g)$ pentru orice $g \in \mathfrak{L}_C^\infty$.

d) $T\mathbf{x}$ este astfel definită pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^\Phi$ mărginit și are valori în $\mathfrak{L}_c^1$. T este o *operație liniară* pentru cîmpurile mărginite din $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^\Phi$. Într-adevăr, pentru orice $g \in \mathfrak{L}_C^\infty$

$$\int g(z) T(\lambda\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})(z) d\mu(z) = f(g(\lambda\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})) = \lambda f(g\mathbf{x}) + \beta f(g\mathbf{y}) =$$

$$= \lambda \int g(z)\, T\mathbf{x}(z)\, d\mu(z) + \beta \int g(z)\, T\mathbf{y}(z) d\mu(z) = \int g(z)(\lambda T\mathbf{x}(z) + \beta T\mathbf{y}(z))\, d\mu(z),$$

de unde rezultă $T(\lambda\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})(z) = \lambda T\mathbf{x}(z) + \beta T\mathbf{y}(z)$ a.p.t.

e) Dacă $h \in \mathfrak{L}_C^\infty$ avem $(Th\mathbf{x})(z) = h(z) T\mathbf{x}(z)$ a.p.t.

Într-adevăr, pentru orice $g \in \mathfrak{L}_C^\infty$ avem

$$\nu_{h\mathbf{x}}(g) = \int (Th\mathbf{x})(z) g(z)\, d\mu(z) = f(hg\mathbf{x}) = \nu_{\mathbf{x}}(hg) = \int (T\mathbf{x})(z) h(z) g(z)\, d\mu(z)$$

și deci $(Th\mathbf{x})(z) = (T\mathbf{x})(z) h(z)$ a.p.t.

f) $T\mathbf{x}$ este *continuă* pe subspațiul cîmpurilor mărginite $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^\Phi$.

Dacă alegem $g(z) = \dfrac{\overline{T\mathbf{x}(z)}}{|T\mathbf{x}(z)|}$, obținem

$$\nu_{\mathbf{x}}(g) = \int T\mathbf{x}(z) \frac{\overline{T\mathbf{x}(z)}}{|T\mathbf{x}(z)|}\, d\mu(z) = \int |T\mathbf{x}(z)|\, d\mu(z).$$

Să observăm că $\|g(z)\mathbf{x}(z)\| = |g(z)|\,\|\mathbf{x}(z)\| = \|\mathbf{x}(z)\|$ și deci $\|g\mathbf{x}\|_\Phi = \|\mathbf{x}\|_\Phi$. Atunci

$$|\nu_{\mathbf{x}}(g)| = |f(g\mathbf{x})| \leqslant \|f\|\, \|g\mathbf{x}\|_\Phi = \|f\|\, \|\mathbf{x}\|_\Phi$$

și prin urmare

$$\|T\mathbf{x}\|_1 = \int |T\mathbf{x}(z)| d\mu(z) \leqslant \|f\| \, \|\mathbf{x}\|_\Phi.$$

Mulțimea cîmpurilor mărginite din $\mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$ fiind densă în $\mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$ (propoziția 6, cap. II), T se poate prelungi la o operație liniară continuă pe $\mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$, cu păstrarea inegalității

$$\|T\mathbf{x}\|_1 \leqslant \|f\| \cdot \|\mathbf{x}\|_\Phi, \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A},$$

de unde rezultă

$$\|T\| \leqslant \|f\|. \tag{22}$$

g) Sîntem acum în condițiile teoremei 1 (observația 6°) și deci există un cîmp de funcționale $\mathbf{x}'_f \in \mathcal{C}(\mathcal{S}')$ astfel încît pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$ să avem

$$T\mathbf{x}(z) = <\mathbf{x}(z), \, \mathbf{x}'_f(z)> \quad \text{a.p.t.} \tag{23}$$

Avem pentru orice $\mathbf{x}$ mărginit din $\mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$

$$f(\mathbf{x}) = \nu_\mathbf{x}(\varphi_z) = \int T\mathbf{x}(z) \, d\mu(z) = \int <\mathbf{x}(z), \, \mathbf{x}'_f(z)> \, d\mu(z). \tag{24}$$

Dacă $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$ și $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ în $\mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$, unde $\mathbf{x}_n$ sînt mărginiți, atunci $T\mathbf{x}_n \to T\mathbf{x}$ în $\mathfrak{L}^1_C$ și $f(\mathbf{x}_n) \to f(\mathbf{x})$. Urmează că $f(\mathbf{x}) = \int T\mathbf{x}(z) \, d\mu(z) = \int <\mathbf{x}(z), \mathbf{x}'_f(z)> d\mu(z)$ pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^\Phi_\mathcal{A}$, și astfel prima parte a teoremei 2 este demonstrată pentru Z compact.

Rămîn de stabilit inegalitățile (20). Din teorema 1 (observația 6°) avem

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{x}'_f\|_\Psi \leqslant \|T\| \leqslant \|\mathbf{x}'_f\|_\Psi. \tag{25}$$

Apoi $\|f\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1} |f(\mathbf{x})| \leqslant \sup_{\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1} \int |<\mathbf{x}(z), \, \mathbf{x}'_f(z)>| \, d\mu(z) = |\mathbf{x}'_f\|_\Psi$

și, ținînd seama de (22) și (25), obținem

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{x}'_f\|_\Psi \leqslant \|T\| \leqslant \|f\| \leqslant \|\mathbf{x}'_f\|_\Psi,$$

de unde rezultă (20).

Dacă Z compact verifică axioma (G), atunci $\mathbf{x}'_f$ este măsurabil, deci $\mathbf{x}'_f \in \mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$ (observația 8° de la teorema 1).

h) Să trecem la cazul Z *local compact*. După cele ce preced, pentru fiecare mulțime compactă $K \subset Z$, există un cîmp $\mathbf{x}'_K \in \mathcal{C}(\mathcal{S}')$ (presupus nul pe $\complement K$) astfel ca pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ să avem

$$f(\varphi_K \mathbf{x}) = \int <\varphi_K(z)\,\mathbf{x}(z),\ \mathbf{x}'_K(z)>\ d\mu(z)$$

$$\frac{1}{2}\,\|\mathbf{x}'_K\|_{\Psi} \leqslant \|f_K\| \leqslant \|\mathbf{x}'_K\|_{\Psi},$$

unde f_K este restricția lui f la $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}(K)$.

Dacă K și K' sînt două mulțimi compacte, atunci

$$\mathbf{x}'_K(z) = \mathbf{x}'_{K'}(z) \quad \text{a.p.t.}$$

Într-adevăr, pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{0K} \cup \mathcal{A}_{0K'}$, avem

$$f(\varphi_{K \cap K'}\,\mathbf{x}) = \int_{K \cap K'} <\mathbf{x}(z),\ \mathbf{x}'_K(z)>\ d\mu(z) = \int_{K \cap K'} <\mathbf{x}(z),\ \mathbf{x}'_{K'}(z)>\ d\mu(z)$$

și deci pentru $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{0K} \cup \mathcal{A}_{0K'}$, avem

$$<\mathbf{x}(z),\ \mathbf{x}'_K(z)> = <\mathbf{x}(z),\ \mathbf{x}'_{K'}(z)> \quad \text{a.p.t.},$$

de unde $\mathbf{x}'_K(z) = \mathbf{x}'_{K'}(z)$ a.p.t.

Există atunci (teorema lui Godement) un cîmp de funcționale $\mathbf{x}'_f$, definit pe Z astfel încît pentru orice compact $K \subset Z$

$$\mathbf{x}'_f(z) = \mathbf{x}'_K(z) \quad \text{a.p.t. pe } K.$$

Atunci

$$f(\mathbf{x}) = \int <\mathbf{x}(z),\ \mathbf{x}'_f(z)>\ d\mu(z),$$

oricare ar fi $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, deoarece $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}} \subset \mathfrak{M}^{0}_{\mathcal{A}}$. Într-adevăr, fie (K_n) un șir de mulțimi compacte disjuncte două cîte două în afara cărora $\mathbf{x}$ se anulează a.p.t. și fie $\mathbf{x}_n = \varphi_{K_n}\mathbf{x}$.

Atunci $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \to \mathbf{x}$ în $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ și deci $f\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{x}_i) \to f(\mathbf{x})$.

Dar $f(\mathbf{x}_n) = \int <\mathbf{x}_n(z),\ \mathbf{x}'(z)>\, d\mu(z)$.

De asemenea, $\sum_{i=1}^{n} <\mathbf{x}_i(z),\ \mathbf{x}'_f(z)> \to <\mathbf{x}(z),\ \mathbf{x}'_f(z)>$ a.p.t. și

$$\sum_{i=1}^{n} |<\mathbf{x}_i(z),\ \mathbf{x}'_f(z)>| \leqslant |<\mathbf{x}(z),\ \mathbf{x}_f(z)>|.$$

Dacă $|<\mathbf{x}(z), \mathbf{x}_f'(z)>|$ este sumabilă, aplicăm teorema lui Lebesgue și obținem

$$\sum_{i=1}^{n}\int <\mathbf{x}_i(z), \mathbf{x}_f'(z)> d\mu(z) \to \int <\mathbf{x}(z), \mathbf{x}_f'(z)> d\mu(z),$$

de unde $f(\mathbf{x}) = \int <\mathbf{x}(z), \mathbf{x}_f'(z)> d\mu(z)$.

Să arătăm că $<\mathbf{x}(z), \mathbf{x}_f'(z)>$ este sumabilă. Dacă punem

$$\rho(z)e^{i\theta(z)} = <\mathbf{x}(z), \mathbf{x}_f'(z)>, \quad (e^{i\theta(z)} = 1, \text{ dacă } \rho(z) = 0) \text{ și}$$

$$\mathbf{y}(z) = \frac{\mathbf{x}(z)}{e^{i\theta(z)}}, \quad \text{atunci} \quad |<\mathbf{x}_n(z), \mathbf{x}_f'(z)>| = <\mathbf{y}_n(z), \mathbf{x}_f'(z)>,$$

$$|<\mathbf{x}(z), \mathbf{x}_f'(z)>| = <\mathbf{y}(z), \mathbf{x}_f'(z)> \text{ și } \|\mathbf{y}\|_\Phi = \|\mathbf{x}_f'\|_\Phi.$$

Dar $\sum_{j=1}^{n} <\mathbf{y}_i(z), \mathbf{x}_f'(z)>$ este un șir crescător de funcții $\geqslant 0$ integrabile convergent către $<\mathbf{y}(z), \mathbf{x}_f'(z)>$ și

$$\sum_{i=1}^{n}\int <\mathbf{y}_i(z), \mathbf{x}_f'(z)> d\mu(z) = \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{y}_i) \leqslant \|f\| \cdot \|\mathbf{y}\|_\Phi.$$

Rezultă deci din [4]*) că $<\mathbf{y}(z), \mathbf{x}_f'(z)>$ este integrabilă.

i) Să punem pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_a^\Phi$, $T\mathbf{x}(z) = <\mathbf{x}(z), \mathbf{x}_f'(z)>$. T este o aplicație liniară continuă de la $\mathfrak{L}_a^\Phi$ în $\mathfrak{L}_c^1$, permutabilă cu operatorii U_t pentru orice $f \in \mathfrak{L}_c^\infty$ și, după teorema 1, îi corespunde o familie $(T(z))_{z\in Z}$ astfel încît pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_a^\Phi$, $T\mathbf{x}(z) = T(z)\mathbf{x}(z)$ a.p.t. După observațiile de la teorema 1, $T(z) = \mathbf{x}_f'(z)$ local a.p.t. și $\frac{1}{2}\|x_f'\|_\Psi \leqslant \|T\| \leqslant \|\mathbf{x}_f'\|_\Psi$.

Să observăm însă că

$$\|f\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1} |f(\mathbf{x})| = \sup_{\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1} \int |<\mathbf{x}(z), \mathbf{x}_f'(z)>| d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\mathbf{x}\|_\Phi \leqslant 1} \int |<\mathbf{x}(z), \mathbf{x}_f'(z)>| \, d\mu(z) = \|\mathbf{x}_f'\|_\Psi$$

și că

$$\|T\mathbf{x}\|_1 = \int |T\mathbf{x}(z)| \, d\mu(z) = \int |<\mathbf{x}(z), \mathbf{x}_f'(z)>| d\mu(z) =$$

$$= f(\mathbf{y}) \leqslant \|f\| \, \|\mathbf{y}\|_\Phi = \|f\| \, \|\mathbf{x}\|_\Phi,$$

unde $\mathbf{y}(z) = \frac{\mathbf{x}(z)}{e^{i\theta(z)}}$, $e^{i\theta(z)} = \arg <\mathbf{x}(z), \mathbf{x}_f'(z)>$. Urmează că $\|T\| \leqslant \|f\|$ și, ținînd seama de inegalitățile de mai sus, obținem

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{x}_f'\|_\Psi \leqslant \|f\| \leqslant \|\mathbf{x}_f'\|_\Psi.$$

*) Teorema 3, p. 110.

După observațiile de la teorema 1, dacă $\mathcal{A}'$ verifică axioma (G*) x_f' este măsurabil și deci $x_f' \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$, dacă x_f' este modificat convenabil pe o mulțime local neglijabilă. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Observații. Dacă Φ nu verifică condiția $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$, M. A. Krasnoselski și la B. Rutițki [26] au arătat că există funcționale liniare continue pe $\mathfrak{L}^{\Phi}_{c}$ care nu admit reprezentare integrală. Teorema 2 rămîne adevărată și în acest caz dacă în enunț se înlocuiește $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ cu aderența în $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ a mulțimii cîmpurilor mărginite din $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Corolar. *Dacă există o constantă* $M > 1$. *astfel încît* $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$, $\Psi(2u) \leqslant M\Psi(u)$, $u \geqslant 0$, *dacă* $\mathcal{A}$ *și* $\mathcal{A}'$ *verifică axioma* (G*), *dacă* $E(z) = E''(z)$ *pentru fiecare* $z \in Z$ *și dacă* $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$, *atunci* $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ *este reflexiv* (și de asemenea $\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$).

De observat că corespondența $(\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'})' \to \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}''} = (\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}})''$ nu este izometrică.

ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Пусть Z — локально компактное пространство, а μ мера Радона, положительная на Z. Пусть $\mathcal{E} = (E(z))_{z \in Z}$ — семейство пространств Банаха и $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ множество векторных полей x, определенных на Z, таких что $x(z) \in E(z)$ при любом $z \in Z$. Предположим, что существует фундаментальное семейство $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$ непрерывных векторных полей. Р. Годман [17] определил пространства $\mathfrak{L}^{p}_{\mathcal{A}}$ ($1 \leqslant p < \infty$) векторных полей p-й суммируемой степенью. С другой стороны, В. Орлич [40] определил пространства $\mathfrak{L}^{\Phi}$, которые носят его имя, образованные числовыми функциями, определенными на числовой прямой.

В настоящей работе исследуется класс пространств $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, образованных векторными полями на Z. Пространства $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ включают одновременно пространства $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ и $\mathfrak{L}^{\Phi}$. Большинство результатов приведено в [13[и [14].

Глава 1. Векторные поля.

Эта глава имеет вступительный характер. Вначале излагаются элементы теории векторных полей и пространств по Р. Годеману [17]. Затем вводятся поля функционалов. Рассмотрим семейство $\mathcal{E}' = (E'(z))_{z \in Z}$, где для каждого $z \in Z$, $E'(z)$ сопряжено к $E(z)$.

Полем функционалов называется определенная на Z функция x' такая, что $x'(z) \in E'(z)$ при любом $z \in Z$.

Пусть $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$ — множество полей функционалов. Предполагается, что существует фундаментальное семейство $\mathcal{A}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ непрерывных полей функционалов, таких, что (*) для всякого $x \in \mathcal{A}$ и для всякого $x' \in \mathcal{A}$, скалярная функция $z \to \langle x(z), x'(z) \rangle$ непрерывна.

Если $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ и $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ непрерывны в точке $z_0 \in Z$, то скалярная функция $z \to < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >$ непрерывна в точке z_0; если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ измеримы, функция $z \to < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >$ измерима (предложения 9—11).

Через $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ обозначают подмножество $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, образованное измеримыми векторными полями, а через $\mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}}$ подмножество $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$, образованное полями $\mathbf{x}$ такими, что $\{z \mid \mathbf{x}(z) \neq 0\}$ содержится в объединении пренебрегаемого множества и последовательности компактов. Аналогичные определения для $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$ и $\mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$.

Для всякого $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}}$ и всякого числа $0 < a < 1$ существует поле функционалов $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}}$, такое, что (предложение 12 — 14);

$$a \| \mathbf{x}(z) \| \leqslant | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \text{ почти всюду,}$$
$$a \leqslant \| \mathbf{x}'(z) \| \leqslant 2 - a \text{ почти всюду, где } \mathbf{x}(z) \neq 0.$$

Глава II. Пространства $\mathcal{E}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

В этой главе вводится вспомогательный класс пространств векторных полей $\mathcal{E}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. Пусть $\Phi(u)$ действительная (конечная или бесконечная функция, определенная на $[0, \infty]$, возрастающая, непрерывная слева, такая, что $\lim_{u \to 0} \Phi(u) = 0$ и $\lim_{u \to \infty} \Phi(u) = \infty$. Имеем $\Phi(0) = 0$.

Определение 1. Измеримое векторное поле $\mathbf{x}$ есть Φ-суммируемая, если скалярная функция $z \to \Phi(\|\mathbf{x}(z)\|)$ суммируема. Через $\mathcal{E}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ обозначают множество. Φ — суммируемых векторных полей, а через $|\mathbf{x}|_{\Phi}$ интеграл

$$\int \Phi(\|\mathbf{x}(z)\|) d\mu(z),$$

Далее предполагается, что (Δ) существует такая постоянная $M > 1$, что $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$, $u \geqslant 0$. В этом случае имеем:

1) $0 < \Phi(u) < \infty$, если $0 < u < \infty$;

2) $\Phi(u + v) \leqslant M(\Phi(u) + \Phi(v))$, $u, v \geqslant 0$;

3) $\Phi(\alpha u) \leqslant M^n \Phi(u)$, если $0 \leqslant \alpha \leqslant 2^n$;

4) $\Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M^n \Phi(a_n)$ для всякой последовательности (a_n) чисел $\geqslant 0$;

5) $|\Phi(u) - \Phi(v)| \leqslant M\Phi(|u - v|)$, $u, v \geqslant 0$,

Из свойств 2) и 3) выводятся соответственно

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|_{\Phi} \leqslant M(|\mathbf{x}|_{\Phi} + |\mathbf{y}|_{\Phi}) \text{ и } |\alpha \mathbf{x}|_{\Phi} \leqslant M^n |\mathbf{x}|_{\Phi},$$

если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ и $|\alpha| \leqslant 2^n$, следовательно $\mathcal{E}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ является векторным пространством (свойства 3 и 4).

Для всякого $\mathbf{x} \in \mathcal{E}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ и всякого целого числа $n > 0$ рассматривается множество $V_n = \left\{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}|_{\Phi} \leqslant \frac{1}{n}\right\}$. Семейство (V_n) является фундамен-

тальной системой окрестностей начала в топологической совместимой со структурой векторного пространства $\mathcal{O}_a^\Phi$ (свойства 4, 7, 8). Пространство $\mathcal{O}_a^\Phi$ является полным (свойство 4, 5); множество Φ суммируемых и ограниченных векторных полей плотно в $\mathcal{O}_a^\Phi$ (предлож. 6); причем хаусдорфово пространство O_a^Φ, связанное с $\mathcal{O}_a^\Phi$, является полным метризуемым (предположение 9). Если $\Phi(u) = u^p$, $(1 \leqslant p < \infty)$, то условие (Δ) выполняется, пространства $\mathcal{L}_a^p$ и $\mathcal{O}_a^\Phi$ содержат те же самые элементы и топологически эквивалентны.

Глава III. Пространства $\mathcal{L}_a^\Phi$.

Пусть Φ и Ψ — две дополнительные функции, в смысле Юнга, причем $0 < \Phi(u) < \infty$ если $0 < u < \infty$.

Для всякого векторного поля $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ (не обязательно измеримого) полагают

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1} \int^* | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z)$$

и для всякого поля функционалов $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ полагают:

$$\| \mathbf{x}' \|_\Psi = \sup_{|\mathbf{x}|_\Phi \leqslant 1} \int^* | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z),$$

Эти функции могут быть также вычислены по следующим формулам:

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup \{ \int^* | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z); \ \mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_a^0, \ | \mathbf{x}' |_\Psi \leqslant 1 \},$$

если $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$ (предложение 1), $\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup \| \varphi_K \mathbf{x} \|_\Phi$, если $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$ (предложение 2), а sup вычисляется для компактных множеств $K \subset Z$.

Если $\mathbf{x}$ измеримо, то получается также (предложение 4).

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_{|\mathbf{x}'|_\Phi \leqslant 1} \int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \| \, d\mu(z) \quad \text{если} \quad \| \mathbf{x} \|_\Phi = \infty$$

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup \{ \int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \| \, d\mu(z) \ ; \ \mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_a^0, \| \mathbf{x}' \|_\Psi \leqslant 1 \} \quad \text{если}$$

$\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$, и можно заменить $\| \mathbf{x}'(z) \|$ через $| h(z) |$, где h скалярная функция от z (предложение 5).

Поле $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ удовлетворяет $\| \mathbf{x} \|_\Phi = 0$ тогда и только тогда, когда $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$ и $\mathbf{x}(z) = 0$ локально почти всюду (предложение 6) и если $\mathbf{x}$ измеримо, $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$ влечет $\mathbf{x}(z) = 0$ локально почти всюду вне последовательности компактов (следствия теоремы 2). В известных условиях получается $\| \mathbf{x} \|_\Phi = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}(z) = 0$ почти всюду (предложение 7) и $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$ влечет $\mathbf{x}(z) = 0$ почти всюду вне последовательности компактов (предложение 8).

Определение I. (i) Пространство $\mathcal{L}_a^\Phi$, представляет множество векторных полей $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_a^0$, для которых $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$;

(ii). Если $\Psi(v) > 0$ при $v > 0$ пространство $\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ представляет множество полей функционалов $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$, для которых $\| \mathbf{x}' \|_{\Psi} < \infty$;

(iii). Если $\Psi(v_0) = 0$ при $v_0 > 0$ пространство $\mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$ представляет множество полей функционалов $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$, для которых $\| \mathbf{x}' \|_{\Psi} < \infty$.

Приводятся некоторые свойства пространств $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$:

1) $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ представляет векторное пространство и содержит $\mathcal{E}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$; для всякого $\mathbf{x} \in \mathcal{E}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ имеет $\| \mathbf{x} \|_{\Phi} \leqslant | \mathbf{x} |_{\Phi} + 1$; функция $\mathbf{x} \to \| \mathbf{x} \|_{\Phi}$ представляет полунорму на $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, (предложение 9).

2) $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ является полной для полунормы $\| \mathbf{x} \|_{\Phi}$ (теорема 1).

3) Если $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, то существует число p, при котором $p\,\mathbf{x} \in \mathcal{E}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ (теорема 2).

4) Если $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ и $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}'}$, то скалярная функция $z \to \langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle$ суммируема и имеется (предложение 10):

$$\int | \langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle | d\mu(z) \leqslant \| \mathbf{x} \|_{\Phi} \| \mathbf{x}' \|_{\Psi}$$

5) $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}}$ и $\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle$ суммируемо при любом $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^{\Psi}_{\mathcal{A}}$ (предложение 11),

6) Если Φ удовлетворяет условию (Δ), то $\mathcal{E}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ и $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ содержат те же элементы (предложение 12) и их топологии эквивалентны (предложение 13).

Если $\Phi(u) = \frac{1}{p} u^p$, то $\Psi(v) = \frac{1}{q} v^q, \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = 1$; $(1 < p < \infty)$, пространства $\mathfrak{L}^p_{\mathcal{A}}$ и $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ содержат те же элементы и их топологии эквивалентны: $\| \mathbf{x} \|_{\Phi} = q^{1/q} \| \mathbf{x} \|_p$; если $p = 1$, то получается $\| \mathbf{x} \|_{\Phi} = \| \mathbf{x} \|_1$ и $\| \mathbf{x}' \|_{\Psi} = \| \mathbf{x}' \|_{\infty}$.

Глава IV. Разложимые линейные операции. Линейные функционалы на $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$.

Пусть $\mathcal{F} = (F(z))_{z \in Z}$ — семейство пространств Банаха и $\mathcal{F}_1 = (F'(z))_{z \in Z}$ — сопряженное семейством. Предполагается, что существуют фундаментальные семейства $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(\mathcal{F})$ и $\mathcal{B}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{F}')$, которые удовлетворают аксиоме (*) из первой главы. Предполагается также, что фундаментальное семейство $\mathcal{A}$ удовлетворяет следующей аксиоме:

(G) существует такая счетная часть $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, что для всякого $z \in Z$ множество $\{\mathbf{x}(z) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{A}_0\}$ всюду плотно в $E(z)$.

Пусть Φ_1, Ψ_1 и Φ_2, Ψ_2 две пары функций, дополнительных в смысле Юнга.

Определение 1, Линейное и непрерывное отображение T подпространства $\mathfrak{X}$ из $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ в $\mathfrak{L}^{\Phi_2}_{\mathcal{B}}$ разложимо, если для каждого $z \in Z$ существует линейное и непрерывное отображение $T(z)$ из $E(z)$ в $F(z)$ таким образом, что каждому $x \in \mathfrak{X}$ почти всюду соответствует $T\mathbf{x}(z) = T(z)\,\mathbf{x}(z)$.

Для всякого $f \in \mathfrak{L}_c^\infty$ обозначают через U_f отображение $\mathbf{x} \to f\mathbf{x}$ из $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ в $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ или из $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}$ в $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}$.

Теорема 1. ***Линейное и непрерывное отображения T из $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ в $\mathfrak{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}$ разложимо тогда, и только тогда, когда для всякого $f \in \mathfrak{L}_c^\infty$ имеем***

$$U_f T = T U_f.$$

Если T разложимо и $\Phi_1 = \Phi_2$, то в этом случае $\| T \| =$ максимум по мере от $\| T(z) \|$.

Эта теорема обобщает некоторые результаты И. Неймана [38], Р. Годемана [17] и К. Т. Ионеску-Тульча [21].

Замечания. 1°. Эта теорема остается в силе, если вместо $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ рассматривать замыкание $\mathfrak{X}$ множества ограниченных векторных полей из $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$,

2°. Разложимое отображение T, определяемое на $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ вполне определяется своими значениями T_1 на $\mathfrak{X}$; следовательно, если T_1 представляет собой разложимое отображение на $\mathfrak{X}$ и если T_1 может быть продолжено до разложимого отображения T на $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$, это продолжение однозначно. В некоторых случаях это продолжение возможно. С помощью теоремы 1 доказывается.

Теорема 2. ***Если Φ удовлетворяет условию (Δ), то для любого линейного и непрерывного функционала f на $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$, существует поле функционалов $\mathbf{x}'_f \in \mathcal{C}(\mathcal{S}')$ такое, что***

$$f(\mathbf{x}) = \int < \mathbf{x}(z),\ \mathbf{x}'_f(z) > d\mu(z)$$

для всякого $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$, и

$$\frac{1}{2} \| \mathbf{x}'_f \|_\Psi \leqslant \| f \| \leqslant \| \mathbf{x}'_f \|_\Psi.$$

Если фундаментальнов семейство $\mathcal{A}'$ удовлетворяет аксиоме (G), то можно изменить $\mathbf{x}'_f$ на локально нулевом множестве таким образом, что $\mathbf{x}'_f \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}'}^{\Psi}$.

Эта теорема обобщает некоторые результаты А. К. Заанена [50], Р. Годемана [17] и К. Т. Ионеску-Тульча [21].

Замечания. Если Φ не удовлетворяет условию (Δ), то, как показали Красносельский и Рутицкий [26], существуют линейные и непрерывные функционалы на $\mathfrak{L}_c^{\Phi}$, которые не допускают представления в виде интеграла. Все же теорема 2 остается в силе, если вместо $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ рассматривать замыкание $\mathfrak{X}$ множества ограниченных векторных полей из $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$.

Следствие. Если Φ и Ψ удовлетворяют условию (Δ), $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$, удовлетворяют аксиоме (G), $E(z) = E''(z)$ для всякого $z \in Z$ и $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$, то $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ и $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}'}^{\Psi}$ является рефлексивным.

ESPACES D'ORLICZ DE CHAMPS DE VECTEURS

(RÉSUMÉ)

Soit Z un espace localement compact et μ une mesure de Radon positive sur Z. Soit $\mathcal{S} = (E(z))_{z \in Z}$ une famille d'espaces de Banach et $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, l'ensemble des champs de vecteurs $\mathbf{x}$ définis sur Z, tels que $\mathbf{x}(z) \in E(z)$ quel que soit $z \in Z$. Supposons qu'il existe une famille fondamentale $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{S})$ de champs de vecteurs continus. R. Godement [17] a défini les espaces $\mathfrak{L}^p_{\mathcal{A}}(1 \leqslant p < \infty)$, de champs de vecteurs de puissance p sommable. D'autre part, W. Orlicz [40] a défini les espaces $\mathfrak{L}^{\Phi}$, qui portent son nom, formés de fonctions numériques, définies sur la droite numérique.

Dans ce travail, on étudie une classe d'espaces, $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ formés de champs de vecteurs sur Z. Les espaces $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$ contiennent à la fois les espaces $\mathfrak{L}^p_{\mathcal{A}}$ et $\mathfrak{L}^{\Phi}$. La plupart des résultats ont été annoncés dans [13] et [14].

Champs de vecteurs. Le I-er chapitre a un caractère introductif. L'auteur expose tout d'abord des éléments de la théorie des champs de vecteurs et des espaces $\mathfrak{L}^p_{\mathcal{A}}$ d'après R. Godement [17]. Il introduit ensuite les champs de fonctionnelles. Considérons la famille $\mathcal{S}' = (E'(z))_{z \in Z}$ où, pour chaque $z \in Z$, $E'(z)$ est le dual de $E(z)$.

Un champ de fonctionnelles est une fonction $\mathbf{x}'$ définie sur Z, telle que $\mathbf{x}'(z) \in E'(z)$, quel que soit $z \in Z$.

Soit $\mathcal{C}(\mathcal{S}')$ l'ensemble des champs de fonctionnelles. On suppose qu'il existe une famille fondamentale $\mathcal{A}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{S}')$ de champs de fonctionnelles continus, telle que (*) : *pour tout* $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ *et pour tout* $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'$, *la fonction scalaire* $z \to < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >$ *est continue.*

Si $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ et $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}(\mathcal{S}')$ sont continus au point $z_0 \in Z$, la fonction scalaire $z \to < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >$ est continue en z_0 ; si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$, sont mesurables, la fonction $z \to < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >$ est mesurable (prop. 9—11).

On désigne par $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ formé, des champs de vecteurs mesurables, et par $\mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}}$, le sous-ensemble de $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ formé, des champs $\mathbf{x}$, tels que $\{z \mid \mathbf{x}(z) \neq 0\}$ est contenu dans la réunion d'un ensemble négligeable et d'une suite de compacts. Définitions analogues pour $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$ et $\mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$.

Pour tout $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}}$ et pour tout nombre $0 < a < 1$, il existe un champ de fonctionnelles $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$ tel que (prop. 12—14) :

$$a \| \mathbf{x}(z) \| \leqslant | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \quad \text{presque partout (p.p.)}$$

$$a \leqslant \| \mathbf{x}'(z) \| \leqslant 2 - a \quad \text{p.p. là où } \mathbf{x}(z) \neq 0.$$

Les espaces $\mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. Dans ce chapitre (II), on introduit une classe auxiliaire d'espaces de champs de vecteurs, $\mathcal{O}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. Soit $\Phi(u)$ une fonction

réelle (finie ou non) définie sur $[0, \infty]$, croissante, continue à gauche, telle que $\lim_{u \to 0} \Phi(u) = 0$ et $\lim_{u \to \infty} \Phi(u) = \infty$. On a $\Phi(0) = 0$.

Définition 1. *Un champ de vecteurs mesurable* $\mathbf{x}$ *est* Φ*-sommable si la fonction scalaire* $z \to \Phi(\| \mathbf{x}(z) \|)$ est sommable. *On désigne par* $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ *l'ensemble des champs de vecteurs* Φ*-sommables, et par* $| \mathbf{x} |_{\Phi}$, *l'intégrale* $\int \Phi(\| \mathbf{x}(z) \|) d\mu(z)$.

Dans la suite de ce chapitre, on fait la supposition que :

(Δ) il existe une constante $M > 1$, telle que $\Phi(2u) \leqslant M\Phi(u)$, $u \geqslant 0$. Dans ce cas on a :

1) $0 < \Phi(u) < \infty$ si $0 < u < \infty$;

2) $\Phi(u + v) \leqslant M(\Phi(u) + \Phi(v))$, $u, v \geqslant 0$;

3) $\Phi(\alpha u) \leqslant M^n \Phi(u)$ si $0 \leqslant \alpha \leqslant 2^n$

4) $\Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M^n \Phi(a_n)$, pour toute suite (a_n) de nombres $\geqslant 0$;

5) $| \Phi(u) - \Phi(v) | \leqslant M\Phi(| u - v |)$, $u, v \geqslant 0$.

Des propriétés 2) et 3), on déduit, respectivement, $| \mathbf{x} + \mathbf{y} |_{\Phi} \leqslant M(| \mathbf{x} |_{\Phi} + | \mathbf{y} |_{\Phi})$ et $| \alpha \mathbf{x} |_{\Phi} \leqslant M^n | \mathbf{x} |_{\Phi}$ si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ et $| \alpha | \leqslant 2^n$, donc $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ est un espace vectoriel (prop. 3 et 4).

Pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ et tout entier $n > 0$, on considère l'ensemble $V_n = \left\{ \mathbf{x} \mid | \mathbf{x} |_{\Phi} \leqslant \frac{1}{n} \right\}$. La famille (V_n) est un système fondamental de voisinages de l'origine, dans une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ (prop. 4, 8, 9). L'espace $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ est complet (prop. 5, 6) ; l'ensemble des champs de vecteurs Φ-sommables et bornés est dense dans $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ (prop. 7) ; l'espace séparé $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ associé à $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ est un espace métrisable complet (prop. 10). Si $\Phi(u) = u^p$, $(1 \leqslant p < \infty)$ la condition (Δ) est vérifiée, les espaces $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{p}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ contiennent les mêmes éléments et leurs topologies sont équivalentes.

Les espaces $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ (IIIe chapitre). Soit Φ et Ψ, deux fonctions complémentaires au sens de Young, telle que $0 < \Phi(u) < \infty$ si $0 < u < \infty$.

Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$ (non nécessairement mesurable), on pose

$$\| \mathbf{x} \|_{\Phi} = \sup_{|\mathbf{x}'|_{\Psi} \leqslant 1} \int^{*} | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z)$$

et pour tout champ de fonctionnelles $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}(\mathcal{S}')$ on pose

$$\| \mathbf{x}' \|_{\Psi} = \sup_{|\mathbf{x}|_{\Phi} \leqslant 1} \int^{*} | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z).$$

Ces fonctions peuvent aussi être calculées par les formules suivantes :

$$\| \mathbf{x} \|_{\Phi} = \sup \left\{ \int^{*} | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z) ; \ \mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}^{0}, \ | \mathbf{x}' |_{\Psi} \leqslant 1 \right\}$$

si $\| \mathbf{x} \|_{\Phi} < \infty$, (prop. 1),

$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup \| \varphi_k \mathbf{x} \|_\Phi$ si $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$, (prop. 2), le sup étant calculé pour tous les ensembles compacts $K \subset Z$.

Si $\mathbf{x}$ est *mesurable*, on a aussi (prop. 4)

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup_{|\mathbf{x}'|_\Phi \leqslant 1} \int^* \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \| \, d\mu(z) \text{ si } \| \mathbf{x} \|_\Phi = \infty$$

$$\| \mathbf{x} \|_\Phi = \sup \left\{ \int \| \mathbf{x}(z) \| \, \| \mathbf{x}'(z) \| \, d\mu(z) ; \; \mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}, \; |\mathbf{x}'|_\Psi \leqslant 1 \right\} \text{si } \| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty ;$$

et on peut remplacer $\| \mathbf{x}'(z) \|$ par $| h(z) |$, où h est une fonction scalaire sur Z (prop. 5).

Un champ $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ vérifie $\| \mathbf{x} \|_\Phi = 0$ si, et seulement si, $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$ et $\mathbf{x}(z) = 0$ localement p.p. (prop. 6) et si $\mathbf{x}$ est mesurable, $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$ implique $\mathbf{x}(z) = 0$ localement p.p. en dehors d'une suite de compacts (corollaire du théorème 2). Dans certaines conditions, on a $\| \mathbf{x} \|_\Phi = 0$ si, et seulement si, $\mathbf{x}(z) = 0$ p.p. (prop. 7), et $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$ implique $\mathbf{x}(z) = 0$ p.p. en dehors d'une suite de compacts (prop. 8).

Définition 1. (i) *L'espace* $\mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ *est l'ensemble des champs de vecteurs* $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}}$ *tels que* $\| \mathbf{x} \|_\Phi < \infty$;

(ii). *Si* $\Psi(v) > 0$ *pour* $v > 0$, *l'espace,* $\mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$ *est l'ensemble des champs de fonctionnelles* $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}'}$, *tels que* $\| \mathbf{x}' \|_\Psi < \infty$;

(iii) *Si* $\Psi(v_0) = 0$ *pour un* $v_0 > 0$, *l'espace* $\mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$ *est l'ensemble des champs de fonctionnelles* $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$, *tels que* $\| \mathbf{x}' \|_\Psi < \infty$.

On donne quelques propriétés des espaces $\mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$:

1) $\mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ est un espace vectoriel et contient $\mathcal{O}^\Phi_{\mathcal{A}}$: pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{O}^\Phi_{\mathcal{A}}$ on a $\| \mathbf{x} \|_\Phi \leqslant | \mathbf{x} |_\Phi + 1$; la fonction $\mathbf{x} \to \| \mathbf{x} \|_\Phi$ est une semi-norme sur $\mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$, (prop. 9)

2) $\mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ est complet pour la semi-norme $\| \mathbf{x} \|_\Phi$ (théorème 1)

3) Si $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$, il existe un nombre p, tel que $p\mathbf{x} \in \mathcal{O}^\Phi_{\mathcal{A}}$ (théorème 2)

4) Si $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ et $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$, la fonction scalaire $z \to < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >$ est sommable et l'on a (prop. 10) :

$$\int | < \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) > | \, d\mu(z) \leqslant \| \mathbf{x} \|_\Phi \, \| \mathbf{x}' \|_\Psi$$

5) $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ si, et seulement si, $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}^0_{\mathcal{A}}$ et $< \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) >$ est sommable, quel que soit $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}^\Psi_{\mathcal{A}'}$ (prop. 11).

6) Si Φ vérifie la condition (Δ), $\mathcal{O}^\Phi_{\mathcal{A}}$ et $\mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ contiennent les mêmes éléments (prop. 12), et leurs topologies sont équivalentes (prop. 13).

Si $\Phi(u) = \frac{1}{p} u^p$, alors $\Psi(v) = \frac{1}{q} v^q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 ; \; 1 < p < \infty \right)$.

Les espaces $\mathfrak{L}^p_{\mathcal{A}}$ et $\mathfrak{L}^\Phi_{\mathcal{A}}$ contiennent les mêmes éléments et leurs topologies sont équivalentes : $\| \mathbf{x} \|_\Phi = q^{1/q} \| \mathbf{x} \|_p$; si $p = 1$, on a $\| \mathbf{x} \|_\Phi = \| \mathbf{x} \|_1$ et $\| \mathbf{x}' \|_\Psi = \| \mathbf{x}' \| \infty$.

Opérations linéaires décomposables. Fonctionnelles linéaires sur $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$. (IV-ème chapitre).

Soit $\mathcal{F} = (F(z))_{z\in Z}$ une famille d'espaces de Banach et $F' = (F'(z))_{z\in Z}$ la famille des duals. On suppose qu'il existe des familles fondamentales $\mathfrak{B} \subset \mathcal{C}(\mathcal{F})$ et $\mathfrak{B}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{F}')$ qui vérifient l'axiome (*) du Ier chapitre. On suppose également que la famille fondamentale $\mathcal{A}$ vérifie l'axiome :

(*G*) *il existe une partie dénombrable* $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, *telle que pour tout* $z\in Z$, *l'ensemble* $\{\mathbf{x}(z) \mid \mathbf{x}\in\mathcal{A}_0\}$ *est partout dense dans* $E(z)$.

Soient Φ_1, Ψ_1 et Φ_2 Ψ_2 deux paires de fonctions complémentaires au sens de Young.

Définition 1. *Une application linéaire et continue* T *d'un sous-espace* $\mathfrak{X}$ *de* $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ *dans* $\mathfrak{L}^{\Phi_2}_{\mathfrak{B}}$ *est décomposable, si pour tout* $z\in Z$ *il existe une application linéaire et continue* $T(z)$ *de* $E(z)$ *dans* $F(z)$, *de sorte que pour chaque* $\mathbf{x}\in\mathfrak{X}$ *l'on a*

$$T\mathbf{x}(z) = T(z)\mathbf{x}(z) \quad \text{p.p.}$$

Pour tout $f\in\mathfrak{L}^{\infty}_{C}$ on désigne par U_f l'application $\mathbf{x} \to f\mathbf{x}$ de $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ dans $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ ou de $\mathfrak{L}^{\Phi_2}_{\mathfrak{B}}$ dans $\mathfrak{L}^{\Phi_2}_{\mathfrak{B}}$.

Théorème 1. *Une application linéaire et continue* T *de* $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ *dans* $\mathfrak{L}^{\Phi_2}_{\mathfrak{B}}$ *est décomposable si, et seulement si, pour tout* $f\in\mathfrak{L}^{\infty}_{C}$ *l'on a*

$$U_f T = T U_f$$

Si T *est décomposable et si* $\Phi_1 = \Phi_2$ *alors*

$$\| T \| = \textit{maximum en mesure de } \| T(z) \|.$$

Ce théorème généralise certains résultats de J. von Neumann [38], R. Godement [17] et C. T. Ionescu Tulcea [21].

Remarques : 1° Ce théorème reste valable şi au lieu de $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ on considère l'adhérence $\mathfrak{X}$ de l'ensemble des champs de vecteurs bornés de $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$.

2°. L'application décomposable T définie sur $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$ est parfaitement déterminée par sa restriction T_1 à $\mathfrak{X}$: donc si T_1 est une application décomposable sur $\mathfrak{X}$ et si T_1 peut être prolongée à une application décomposable T sur $\mathfrak{L}^{\Phi_1}_{\mathcal{A}}$, ce prolongement est unique. Dans certaines conditions, ce prolongement est possible. A l'aide du théorème 1 on démontre le

Théorème 2. *Si* Φ *vérifie la condition* (Δ), *pour toute fonctionnelle linéaire et continue* f *sur* $\mathfrak{L}^{\Phi}_{\mathcal{A}}$, *il existe un champ de fonctionnelles* $\mathbf{x}'_f \in \mathcal{C}(\mathcal{S}')$ *tel que*

$$f(\mathbf{x}) = \int < \mathbf{x}(z),\ \mathbf{x}'_f(z) > d\mu(z)$$

pour chaque $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$, *et*

$$\frac{1}{2} \| \mathbf{x}'_f \|_{\Psi} \leqslant \| f \| \leqslant \| \mathbf{x}'_f \|_{\Psi}$$

Si la famille fondamentale $\mathcal{A}'$ *vérifie l'axiome* (G), *on peut modifier* $\mathbf{x}'_f$ *sur un ensemble localement négligeable de sorte que* $\mathbf{x}'_f \in \mathfrak{L}_{\mathcal{A}'}^{\Psi}$.

Ce théorème généralise certains résultats de A.C. Zaanon [50], R. Godement [17] et C.T. Ionescu Tulcea [21].

Remarques. Si Φ ne vérifie pas la condition (Δ), Krasnoselski et Rutitzki [26] ont montré qu'il existe des fonctionnelles linéaires et continues sur $\mathfrak{L}_c^{\infty}$ qui n'admettent pas une représentation intégrale. Quant-même, le théorème 2 reste valable si au lieu de $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ on considère l'adhérence $\mathfrak{X}$ de l'ensemble des champs de vecteurs bornés de $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$.

Corrolaire. Si Φ *et* Ψ *vérifient la condition* (Δ), $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{A}'$ *vérifient l'axiome* (G), $E(z) = E''(z)$ *pour chaque* $z \in Z$, *et* $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$, *alors* $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ *(et* $\mathfrak{L}_{\mathcal{A}}^{\Psi}$*) est réflexif.*

BIBLIOGRAFIE

1. Banach S., *Théorie des opérations linéaires.* Varşovia, 1932.
2. Bourbaki N., *Topologie générale.* Paris, 1940, vol. III, cap. I, II.
3. — *Espaces vectoriels topologiques.* Paris, 1953, vol. V, cap. I, II.
4. — *Intégration.* Paris, 1952, vol. VI, cap. I—IV.
5. Day M., *Reflexive Banach Spaces not Isomorphic to Uniformly Convex Spaces.* Bull. Am. Math. Soc., 1941, t. 47, p. 313.
6. — *Some More Uniformly Convex Spaces.* Bull. Am. Math. Soc., 1941, t. 47, p. 504.
7. — *Uniform Convexity* III. Bull. Am. Math. Soc., 1943, t. 49, p. 745.
8. Dieudonné J., *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym.* V. Can. J. Math., 1951, t. 3, p. 129.
9. — *Sur les espaces de Köthe.* J. Analyse Math., 1951, t. 1, p. 81.
10. — *Champs de vecteurs non localement triviaux.* Archiv der Mathematik, 1956, t. 7, p. 6.
11. — *Sur la théorie spectrale.* J. Math. pures et appliquées, 1956, t. 35, p. 175.
12. Dixmier J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann).* Paris, 1957.
13. Dinculeanu N., *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs* (I). Rendiconti dell'Accad. Naz. dei Lincei, 1957, t. 12, p. 135.
14. — *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs (II) Fonctionnelles linéaires continues.* Rendiconti dell'Accad. Naz. dei Lincei, 1957, t. 12, p. 269.
15. Ellis W. H. a. Halperin I., *Function Spaces Determined by a Levelling Length Function.* Can. J. Math., 1953, t. 5, p. 576.
16. Godement R., *Théorie générale des sommes continues d'espaces de Banach.* C.R. de l'Académie des Sciences de Paris, 1949, t. 228, p. 1321.
17. — *Sur la théorie des représentations unitaires.* Annals of. Math., 1951, t. 53, p. 68.
18. Halperin I., *Function Spaces.* Can. J. Math., 1953, t. 5, p. 273.
19. — *Uniform Convexity in Function Spaces,* Duke Math., J., 1954, t. 21, p. 195.
20. — *Reflexicity in the* L^{λ} *Function Spaces.* Duke Math., J., 1954, t. 21, p. 205.
21. Ionescu Tulcea C.T., *Deux théorèmes concernant certains espaces de champs de vecteurs* Bull. Sciences Math., 1955, t. 79, p. 106.
22. — *Spații Hilbert.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1956.

23. K r a s n o s e l s k i M. A., *Nekotorie zadaci nelineinîh analiza.* Uspehi Mat. Nauk., 1954, t. 9, p. 57.
24. K r a s n o s e l s k i M. A. i R u t i ţ k i Ia. B., *K teorii pronstrastv Orlicia.* DAN SSSR, 1951, t. 81, nr. 4, p. 497.
25. — *Lineinîe integralnîe operatori deistvuiuşcie iz odnovo pronstranstva Orlicia v drugoe.* DAN SSSR, 1952, t. 85, nr. 1, p. 33.
26. — *Lineinîe functionali v pronstranstvah Orlicia.* DAN SSSR, 1954, t. 97, nr. 4, p. 581.
27. — *Ob adnom sposobe postroenia N'-funcţii ekivalentnîh dopolnitelnîm k zadannîm.* Trudî Voronejskogo Universiteta, 1954, p. 3.
28. K r a s n o s e l s k i M. A. i S o b o l e v V. I. *Uslovia separabelnosti pronstrastv Orlicia.* Izvestia Akad. Nauk. SSSR, 1955, t. 19, p. 59.
29. L o r e n t z G. G., *Some New Functional Spaces.* Annals of Math., 1950, t. 51, p. 37.
30. — *On the Theory of Spaces* A. Pacific Journal of Math., 1951, t. 1, p. 411.
31. — *Majorants in Spaces of Integrable Functions,* Am. J. Math., 1955, t. 77, p. 484.
32. L o r e n t z G. G. a. W e r t h e i m D. G., *Representation of Linear Functionals on Köthe Spaces.* Can. J. Math., 1953, t. 5, p. 568.
33. L u x e m b u r g W. A., *Banach Function Spaces.* Thesis, Delft, 1955.
34. L u x e m b u r g W. A. a. Z a a n e n A. C., *Conjugate Spaces of Orlicz Spaces.* Indagationes Math., 1956, t. 18, p. 217.
35. — *Some Remarks on Banach Functions Spaces.* Indagationes Math., 1956, t. 18, p. 110.
36. M a c k e y G. W., *Induced Representation of Locally Compact Groups I.* Annals of Math., 1952, t. 55, p. 101.
37. M o r s e M. a. T r a n s u e W., *Functionals F Bilinear Over the Product A × B of Two Pseudo-Normed Vector Spaces* II. *Admissible spaces* A. Annals of Math., 1950, t. 51, p. 576.
38. J. von N e u m a n n, *On Rings of Operators. Reduction Theory.* Annals of Math., 1948, t. 50, p. 401.
39. O r l i c z W. u. B i r n b a u m Z. W., *Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen.* Studia Math., 1931, t. 3, p. 1.
40. O r l i c z W., *Über eine gewisse Klasse von Räumen von typus B.* Bull. Intern. Acad. Polonaise des Sciences et des Lettres, 1932, p. 207.
41. — *Über Räume* (L^M). Bull. Intern. Acad. Polonaise des Sciences et des Lettres, 1936, p. 93.
42. — *On a Class of Operations Over the Spaces of Integrable Functions.* Studia Math., 1955, t. 14, p. 302.
43. R u t i ţ k i Ia. B., *Ob odnom svoistve vpolne neprerivnîh lineinîh integralnîh operatorov deistvuiuşcih v pronstranstvah Orlicia.* Uspehi Mat. Nauk, 1956, t. 11, p. 201.
44. T a k a h a s h i T., *On the Compactness of the Function-set by the Convergence in Mean of General Type,* Studia Math., 1934, t. 5, p. 141.
45. W e i s s G., *A Note on Orlicz Spaces.* Protugalia Math., 1956, t. 15, p. 35.
46. Y o o d B., *Banach Algebras of Bounded Functions.* Duke Math. J. 1949, t. 16, p. 151.
47. Z a a n e n A. C., *On a Certain Class of Banach Spaces.* Annals of Math., 1946, t. 47, p. 654.
48. — *Note on a Certain Class of Banach Spaces.* Indagationes Math., 1949, t. 11, p. 148.
49. — *Integral Transformations and their Resolvents in Orlicz and Lebesgue Spaces.* Compositio Math., 1952, t. 10, p. 56.
50. — *Linear Analysis.* New York-Amsterdam, 1953.
51. Z y g m u n d A., *Trigonometrical Series.* Warszawa-Lwow, 1935.

PROPRIETĂȚI ERGODICE ALE UNOR LANȚURI CU LEGĂTURI COMPLETE *)

DE

GEORGE CIUCU

INTRODUCERE

Lanțurile cu legături complete au fost introduse în calculul probabilităților de către O. Onicescu și Gh. Mihoc în memoriul [1]. Imediat după apariția acestei prime lucrării o serie de cercetători au adus în aceeași direcție diferite contribuții și au făcut diverse aplicații. Menționăm teza lui R. Fortet [2] în care acest autor aduce contribuții directe la studiul lanțurilor introduse în [1], lucrarea lui W. Doeblin și R. Fortet [3] și lucrarea lui W. Doeblin [4] în care acesta utilizează o categorie de lanțuri cu legături complete, numite lanțuri de tip (B) în studiul fracțiilor continue. Menționăm, de asemenea, că în ultimul timp lanțurile cu legături complete au început să fie studiate în legătură cu modele stochastice speciale care se întîlnesc în procese de asimilare de cunoștințe (învățare).

În prezenta lucrare autorul își propune să aducă mai multe contribuții teoretice la studiul lanțurilor cu legături complete cu *o infinitate numărabilă de stări* sau cu *o mulțime oarecare de stări*, dar în ipoteza că probabilitățile de trecere au *densități* care satisfac o serie de condiții precizate în text.

Lucrarea cuprinde două capitole. În primul capitol se studiază lanțurile cu legături complete cu o infinitate numărabilă de stări. Se obține mai întîi o teoremă ergodică privind probabilitățile de trecere, iar după aceea se arată că teorema limită centrală (legea lui Laplace-Gauss) rămîne valabilă pentru șiruri de variabile aleatoare legate în lanț cu legături complete.

Demonstrarea teoremei limită centrală este destul de laborioasă și cere calcule și evaluări în special pentru studiul comportării momentelor de ordinul doi al sumelor primelor n variabile considerate. Rezultatul

*) Disertație susținută la 3 iunie 1957 pentru obținerea titlului de candidat în științele fizico-matematice

obținut conține evident rezultatele precedente privind lanțurile Markov de ordin finit a căror demonstrație este, comparativ, mai simplă.

În al doilea capitol sînt studiate lanțurile cu legături complete ale căror probabilități de trecere au densități care verifică anumite condiții. Se obțin rezultate directe privind densitățile de trecere. Mai întîi se studiază aceste densități prin metode operaționale, iar după aceea se introduc lanțuri a căror densitate de trecere satisfac o condiție analogă cu condiția impusă probabilităților de trecere ale unui lanț numărabil de tip (B) și se demonstrează o teoremă ergodică.

Extensiunea eventuală la aceste lanțuri a legii lui Gauss-Laplace nu este studiată în această lucrare*).

Capitolul I

LANȚURI NUMĂRABILE CU LEGĂTURI COMPLETE DE TIPUL (B)

§ 1. Proprietăți ergodice

În acest paragraf vom demonstra o teoremă ergodică privind probabilitățile de trecere ale unui lanț cu legături complete de tipul (B) cu o infinitate numărabilă de stări.

1. Definiții și notații generale. Fie :

(i) S o mulțime numărabilă ;

$$(ii) \qquad W = \prod_{j \in -N} S^{(j)},$$

unde $\prod$ este simbolul produsului cartezian, și $S^{(j)} = S$ pentru orice $j \in -N$**) ;

(iii) pentru orice parte $I \subset N$, $S^I = \prod_{j \in I} S^{(j)}$,

unde $S^{(j)} = S$ pentru orice $j \in N$.

Pentru orice șir $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^{[1,n]}$ vom nota prin $U_{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ aplicația spațiului W în W definită prin egalitatea

$$U_{x_1, x_2, \ldots, x_n}(c) = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

dacă drumul $c = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0)$.

Fie $P_x^1(c)$ o funcție definită pentru orice $x \in S$ și orice $c \in W$ satisfăcînd condițiile

$$0 \leqslant P_x^1(c) \leqslant 1, \tag{I}$$

$$\sum_{x \in S} P_x^1(c) = 1. \tag{II}$$

---

*) Rezultatele demonstrate în capitolul 1, § 1 și în capitolul 2, § 1 au fost enunțate parțial sub o formă mai puțin generală în articolele autorului [5] și [6].

**) $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ și deci $-N = \{0, -1, -2, \ldots\}$,

Pentru orice $n > 1$ să punem

$$P_x^n(c) = \sum_{y \in S} P_y^1(c)\, P_x^{n-1}(u_y(c)). \tag{III}$$

Funcțiile $P_x^n(c)$ definite mai sus prin egalitatea (III) pot fi considerate ca probabilitățile de trecere corespunzătoare unui lanț cu legături complete cu o infinitate numărabilă de stări*).

Pentru $c = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0)$ și $(a_1, \ldots, a_l) \in S^{[1,l]}$ să punem

$$P^1_{(a_1, \ldots, a_l)}(c) = P^1_{a_1}(c)\, P^1_{a_2}(u_{a_1}(c)) \ldots P^1_{a_l}(u_{a_1, \ldots, a_{l-1}}(c))$$

și pentru orice parte $A \subset S^{[1,l]}$

$$P^1_A(c) = \sum_{(a_1, a_2, \ldots, a_l) \in A} P^1_{(a_1, a_2, \ldots, a_l)}(c). \tag{1}$$

Să notăm prin $\mathfrak{B}$ corpul borelian**) generat de părțile produsului S^{N^*} de forma $\prod_{j \in N^*} A_j$, unde $A_j \subset S$ pentru fiecare $j \in N^*$ și unde mulțimea indicilor $j \in N^*$ pentru care $A_j \neq S$ este finită. Dacă pentru orice mulțime $A \subset \mathfrak{B}$ de forma $A = \mathrm{pr}^{-1}_{\{1, \ldots, l\}}(A_1)$, punem

$$Q_c(A) = P^1_A(c)$$

atunci $Q_c(A)$ se poate extinde [7], [8] în mod unic ca probabilitate pe $\mathfrak{B}$. Extensiunea o vom nota în același fel, adică tot prin $Q_c(A)$.

Plecînd de la probabilitățile $P^1_A(c)$ definite prin formula (1) vom pune pentru $n > 1$

$$P^n_A(c) = \sum_{y \in S} P^1_y(c)\, P^{n-1}_A(u_y(c)). \tag{2}$$

Să arătăm că : *oricare ar fi* : $c \in W$, $(x_1, \ldots, x_p) \in S^{[1,p]}$, *și* $M_p \subset S^{[1,p]}$

$$\sum_{(x_1, \ldots, x_p) \subset M_p} P^1_{(x_1, \ldots, x_p)}(c)\, P^n_A(u_{x_1, \ldots, x_p}(c)) =$$

$$= Q_c(\mathrm{pr}^{-1}_{\{1, \ldots, p\}}(M_p) \cap \mathrm{pr}^{-1}_{\{p+n, \ldots, p+n+l-1\}}(A)). \tag{3}$$

Este suficient să demonstrăm egalitatea (3) pentru $n > 1$, $M_p = \{(x_1, \ldots, x_p)\}$ și $A = \{(a_1, \ldots, a_l)\}$. Dar în acest caz membrul stîng al egalității (3) devine

$$P^1_{(x_1, \ldots, x_p)}(c)\, P^n_A(u_{x_1, \ldots, x_p}(c)) = P^1_{(x_1, \ldots, x_p)}(c) \sum, \tag{4}$$

*) Vezi lucrarea [1] în care au fost introduse lanțurile cu legături complete. Ecuațiile funcționale de tipul (III) au fost scrise pentru prima dată de O. Onicescu și Gh. Mihoc, în acest memoriu.

**) O mulțime $\mathfrak{B}$ de părți ale unei mulțimi X este un corp borelian dacă :

1) $\mathfrak{B} \ni X$;

2) $\mathfrak{B} \ni A$ dacă $\mathfrak{B} \ni A$;

3) $\mathfrak{B} \ni \bigcup_{j \in N^*} A_j$ dacă $\mathfrak{B} \ni A_j$ pentru fiecare $j \in N^*$.

unde

$$\Sigma = \sum_{(x_{p+1},\ldots,x_{p+n}) \in S^{[p+1,\,p+n-1]}} P^1_{x_{p+1}}(u_{x_1,\ldots,x_p}(c))\, P^1_{x_{p+2}}(u_{x_p,\ldots,x_{p+1}}(c)\ldots$$

$$\ldots P^1_{x_{p+n-1}}(u_{x_1,\ldots,x_{p+n-2}}(c))\, P^1_A(u_{x_1,\ldots,x_{p+n-1}}(c))$$

deci

$$P^1_{(x_1,\ldots,x_p)}(c)\, P^n_A(u_{x_1,\ldots,x_p})(c) =$$

$$= \sum_{(x_{p+1},\ldots,x_{p+n-1}) \in S^{[p+1,\,p+n-1]}} P^1_{(x_1,\ldots,x_p,\,x_{p+1},\ldots,x_{p+n-1},\,a_1,\ldots,a_l)},$$

ceea ce demonstrează egalitatea (3).

Observația precedentă ne dă interpretarea probabilistică a funcțiilor $P^n_A(u_{x_1,\ldots,x_p}(c))$ definite prin egalitățile (2) ca probabilități condiționate ale procesului stochastic $(S^N, \overset{*}{\mathfrak{B}}, Q_c)$. Din egalitatea (4) deducem imediat și egalitatea

$$P^n_A(c) = Q_c(\mathrm{pr}^{-1}_{\{n,\ldots,n+l-1\}}(A)) \tag{5}$$

dacă $A \subset S^{[1,\,l]}$. Din (3) și (4) obținem pentru p și $n \geqslant 1$

$$P^{n+p}_A(c) = \sum_{(x_1,\ldots,x_p) \in S^{[1,\,p]}} P^1_{(x_1,\ldots,x_p)}(c)\, P^n_A(u_{x_1,\ldots,x_p}(c)) \tag{6}$$

formulă esențială pentru dezvoltările ulterioare și care conține, evident, ca un caz particular, formula (2) prin care s-au definit probabilitățile de trecere $P^n_A(c)$.

2. Lanțuri de tip (B). Vom spune că un lanț cu legături complete cu probabilitățile de trecere $P^1_x(c)$ este un *lanț de tip* (B) dacă, oricare ar fi $c, c' \in W$, $y \in S$ și $(x_1, \ldots, x_s) \in S^{[1,\,s]}$, avem

$$P^1_y(u_{x_1,\ldots,x_s}(c)) = P^1_y(u_{x_1,\ldots,x_s}(c'))(1 + \theta\varepsilon_s), \tag{7}$$

unde $\theta = \theta(c, c', y, s)$ este un număr $\leqslant 1$ în modul și

$$\varepsilon_s > 0, \quad \sum_{s \in N^*} \varepsilon_s < \infty.\ ^*)$$

Această categorie de lanțuri au fost introduse în [3] pentru S mulțime finită. Să observăm, înainte de a trece mai departe, că orice lanț Markov multiplu de ordinul $p \geqslant 1$ poate fi considerat ca un lanț cu legături complete de tipul (B); în particular, un lanț cu legături complete de tip (B) se reduce la un lanț Markov (de ordinul întîi) dacă și numai dacă

$$P^1_y(u_x(c)) = P^1_y(u_x(c')),$$

oricare ar fi $x, y \in S$ și $c, c' \in W$.

Egalitatea (7) ne arată că pentru un lanț cu legături complete de tipul (B) probabilitățile de trecere $P^1_y(u_{x_1,\ldots,x_s}(c))$ și $P^1_A(u_{x_1,\ldots,x_s}(c'))$

*) Vom nota cu T un întreg $\in N^*$ pentru care $s \geqslant T$ implică $\varepsilon_s < 1$.

au valori apropiate dacă s este suficient de mare oricare ar fi $n \geqslant 1$, $A \subset S^{[1,\,l]}$ și $c, c' \in W$.

În mod precis vom demonstra următoarea *propoziție*

Oricare ar fi $n \geqslant 1$, $(x_1, \ldots, x_s) \in S^{[1,s]}$ *cu* $s \geqslant T$, *unde* T *este întregul introdus în nota din* josul p. 416 $c, c' \in W$ și $A \subset S^{[1,\,l]}, (j \geqslant 1)$ avem

$$\left| P_A^n (u_{x_1, \ldots, x_s}(c)) - P_A^n (u_{x_1, \ldots, x_s}(c')) \right| \leqslant \sum_{j \geqslant s} \varepsilon_j. \tag{8}$$

Din (7) rezultă, pentru orice $x \in S$ și $(x_1, \ldots, x_j) \in S^{[1,j]}$, $(j \geqslant 1)$,

$$P_x^1 (u_{x_1, \ldots, x_j}(c)) \geqslant (1 - \varepsilon_j) P_x^1 (u_{x_1, \ldots, x_j}(c')). \tag{9}$$

Dacă $A = \{(a_1, \ldots, a_l)\}$*, din (9) deducem următoarea inegalitate $(n > 1)$

$$P_A^n (u_{x_1, \ldots, x_s}(c)) = \sum_{(x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}) \in S^{[s+1,\,s+n-1]}} P_{x_{s+1}}^1 (u_{x_1, \ldots, x_s}(c)) \ldots$$

$$\ldots P_{x_{s+n-1}}^1 (u_{x_1, \ldots, x_{s+n-2}}(c)) \; P_{(a_1, \ldots, a_l)} (u_{x_1, \ldots, x_{s+n-1}}(c)) =$$

$$= \sum_{(x_{s+1}, \ldots, x_{x+n}) \in S^{[s+1,\,s+n-1]}} P_{x_{s+1}}^1 (u_{x_1, \ldots, x_s}(c')) \ldots P_{x_{s+n-1}}^1 (u_{x_1, \ldots, x_{x+n-2}}(c')$$

$$P_{a_1}^1 (u_{x_1, \ldots, x_{s+n-1}}(c)) \ldots P_{a_l}^1 (u_{x_1, \ldots, x_{s+n-1}, a_1, \ldots, a_{l-1}}(c)) \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon(s, n, l) \sum_{(x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}) \in S^{[s+1,\,s+n-1]}} P_{x_{s+1}}^1 (u_{x_1, \ldots, x_s}(c')) \ldots$$

$$P_{x_{s+n-1}}^1 (u_{x_1, \ldots, x_{s+n-2}}(c')) P_a^1 (u_{x_1, \ldots, x_{s+n-1}}(c')) \ldots$$

$$P_{a_l}^1 (u_{x_1, \ldots, x_{s+n-1}, a_1, \ldots, a_{l-1}}(c')) = \varepsilon(s, n, l) \; P_A^n (u_{x_1, \ldots, x_s}(c')),$$

unde am notat

$$\varepsilon(s,n,l) = (1 - \varepsilon_s) \ldots (1 - \varepsilon_{s+n-1}) (1 - \varepsilon_{s+n}) \ldots (1 - \varepsilon_{s+n-1+l-1}).$$

Cum $\varepsilon_j < 1$ dacă $j \geqslant s \geqslant T$ atunci

$$\varepsilon(s,n,l) \geqslant \prod_{j \geqslant \mu} (1 - \varepsilon_j)$$

și deci

$$P_A^n (u_{x_1, \ldots, x_s}(c)) \geqslant \prod_{j \geqslant \mu} (1 - \varepsilon_j) P_A^n (u_{x_1, \ldots, x_s}(c')) \tag{10}$$

dacă $A = \{(a_1, \ldots, a_l)\}$. Prin însumare deducem imediat că inegalitatea precedentă rămîne adevărată oricare ar fi partea $A \subset S^{[1,\,l]}$. Dacă ținem seama de inegalitatea

$$\prod_{\mu \geqslant s} (1 - \varepsilon_\mu) \geqslant 1 - \sum_{\mu \geqslant s} \varepsilon_\mu \; **)$$

deducem din (10)

$$P_A^n (u_{x_1, \ldots, x_s}(c) - P_A^n (u_{x_1, \ldots, x_s}(c')) \geqslant - \sum_{\mu \geqslant s} \varepsilon_\mu. \tag{11}$$

*) Vezi și inegalitatea (4) de mai sus.

**) Vezi [9], formula (3), p. 122.

Permutînd pe c cu c' obținem

$$P_A^n(u_{x_1,\ldots,x_s}(c')) - P_A^n(u_{x_1,\ldots,x_s}(c)) \leqslant \sum_{\mu \geq s} \varepsilon_\mu \tag{12}$$

și din (11) și (12) rezultă imediat inegalitatea (8).

Acest rezultat va fi utilizat în mod esențial în cursul paragrafului următor.

3. Proprietăți ergodice ale probabilităților $P_A^n(c)$. Vom spune că un lanț cu legături complete dat prin probabilitățile $P_x^1(c)$ satisface *condiția* (K) dacă există un număr $\lambda > 0$ care verifică inegalitatea

$$P_x^1(c) \geqslant \lambda P_x^1(c')^*),$$

pentru orice c, $c' \in W$ și $x \in S$.

Condiția (K) a fost introdusă de A. Kolmogoroff [10] pentru lanțurile Markov (de ordinul întîi) și a fost folosită în studiul acestor lanțuri în variante mai generale sau mai restrictive. Pentru lanțurile cu legături complete, o condiție mai restrictivă decît condiția (K), dar mai ușor de verificat în cazuri speciale, este următoarea: există un număr $\alpha > 0$ care verifică inegalitatea

$$P_x^1(c) \geqslant \alpha$$

pentru orice $x \in S$ și $c \in W$.

Să presupunem acum că avem un lanț cu legături complete de tipul (B) care satisface condiția (K) și să alegem numărul T convenabil astfel încît să avem

$$\prod_{j \geq T} (1 - \varepsilon_j) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Să notăm prin h raportul $\frac{[\lambda^T}{2}$. Atunci, pentru orice șir $(a_1, \ldots, a_l) \in S^{[1,\, l]}$, avem

$$P^1_{(a_1,\ldots,a_l)}(c) \geqslant h\, P^1_{(a_1,\ldots,a_l)}(c'). \tag{13}$$

Într-adevăr, dacă $l \leqslant T$ inegalitatea (13) este evidentă. Să presupunem $l > T$; atunci

$$P^1_{(a_1,\ldots,a_l)}(c) = P^1_{(a_1,\ldots,a_T)}(c)\, P^1_{(a_{T+1},\ldots,a_l)}(u_{a_1,\ldots,a_T}(c)) \geqslant$$

$$\geqslant \lambda^T P^1_{(a_1,\ldots,a_T)}(c)\, P^1_{(a_{T+1},\ldots,a_l)}(u_{a_1,\ldots,a_T}(c)). \tag{14}$$

*) Să remarcăm că numărul λ care intervine în formularea condiției (K) este necesar $\leqslant 1$.

Dar

$$P^1_{(a_{T+1},\ldots,a_l)}(u_{a_1,\ldots,a_T}(c)) \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{\mu \geqslant T}(1-\varepsilon_j)\, P^1_{(a_{T+1},\ldots,a_l)}(u_{a_1,\ldots,a_T}(c')) \qquad (15)$$

după inegalitatea (10). Din inegalitățile (14) și (15) obținem (13). Deci inegalitatea (13) este valabilă pentru orice $l \geqslant 1$.

Teorema 1. *Dacă un lanț cu legături complete de tipul (B) cu probabilitățile de trecere $P^1_x(c)$ satisface condiția (K), atunci există un șir descrescător $(\eta(n))_{1\leqslant n<\infty}$ convergent către zero și o funcție P^∞_A definită pentru orice parte $A \subset S^{[1,\,l]}$ $(l \in N^*)$ care verifică inegalitățile*

$$|P^n_A(c) - P^\infty_A| \leqslant \eta(n)$$

pentru orice $n \in N^*$, $c \in W$, $A \subset S^{[1,\,l]}$, $(l \in N^*)$.

Demonstrație. Să punem

$$\overline{P}^n_A = \sup_{c\in S} P^n_A(c) \text{ și } \underline{P}^n_A = \inf_{c\in S} P^n_A(c).$$

Din relația (III) se deduce fără dificultate

$$\overline{P}^{n'}_A \geqslant \overline{P}^{n''}_A \geqslant \underline{P}^{n''}_A \geqslant \underline{P}^{n'}_A$$

pentru orice n', $n'' \in N^*$, $n' \leqslant n''$.

Pe baza relației (6) avem, pentru $n > s \geqslant T$,

$$P^n_A(c') - P^n_A(c'') =$$

$$= \sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in S^{[1,\,s]}} P^1_{(x_1,\ldots,x_s)}(c')\, P^{n-s}_A(u_{x_1,\ldots,x_s}(c')) -$$

$$- \sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in S^{[1,\,s]}} P^1_{(x_1,\ldots,x_s)}(c'')\, P^{n-s}_A(u_{x_1,\ldots,x_s}(c'')) =$$

$$= \sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in S^{[1,\,s]}} (P^1_{(x_1,\ldots,x_s)}(c') - P^1_{(x_1,\ldots,x_s)}(c''))\, P^{n-s}_A(u_{x_1,\ldots,x_s}(c')) +$$

$$+ \sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in S^{[1,\,s]}} P^1_{(x_1,\ldots,x_s)}(c'')\,(P^{n-s}_A(u_{x_1,\ldots,x_s}(c')) -$$

$$- P^{n-s}_A(u_{x_1,\ldots,x_s}(c'')).$$

După formula (8), al doilea termen al sumei precedente este în valoare absolută mai mic sau egal cu $\sum_{j\geqslant s}\varepsilon_j$, întrucît $s \geqslant T$.

Să punem

$$A_{(x_1,\ldots,x_s)}(c', c'') = P^1_{(x_1,\ldots,x_s)}(c') - P^1_{(x_1,\ldots x_s)}(c'')$$

și să notăm cu P mulțimea șirurilor $(x_1, \ldots, x_s) \in S^{[1,l]}$ pentru care $A_{(x_1,\ldots,x_s)}(c', c'') \geqslant 0$ și prin Q mulțimea șirurilor $(x_1, \ldots, x_s) \in S^{[1,l]}$ pentru care $A_{(x_1,\ldots,x_s)}(c', c'') < 0$.

Se obține imediat egalitatea

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in P} A_{(x_1,\ldots,x_s)}(c', c'') = \sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in Q} |A_{(x_1,\ldots,x_s)}(c', c'')|;$$

să notăm valoarea comună cu B. Avem

$$0 \leqslant B = \sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in P} A_{(x_1,\ldots,x_s)}(c', c'') \leqslant 1 - \sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in P} P^1_{(x_1,\ldots,x_s)}(c'') \tag{16}$$

și

$$0 \leqslant B = \sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in Q} A_{(x_1,\ldots,x_s)}(c', c'') \leqslant 1 - \sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in Q} P^1_{(x_1,\ldots,x_s)}(c'). \tag{17}$$

Din inegalitatea (13), consecință a condiției (K), deducem imediat sau

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in P} P^1_{(x_1,\ldots,x_s)}(c'') \geqslant \frac{h}{2}$$

sau

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in Q} P^1_{(x_1,\ldots,x_s)}(c') \geqslant \frac{h}{2}$$

întrucît cel puțin una din sumele

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in P} P^1_{(x_1,\ldots,x_s)}(c)$$

și

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in Q} P^1_{(x_1,\ldots,x_s)}(c)$$

este mai mare sau egală cu $\frac{1}{2}$, oricare ar fi $c \in W$. Din (16) și (17) deducem în orice caz

$$B \leqslant 1 - \frac{h}{2}.$$

Dacă $B = 0$ avem evident

$$|P^n_A(c') - P^n_A(c'')| \leqslant \sum_{j \geqslant s} \varepsilon_j.$$

Dacă $B > 0$

$$\sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in P\cup Q} A_{(x_1,\ldots,x_s)}(c',c'')\,P_A^{n-s}(u_{(x_1,\ldots,x_s)}(c'')) =$$

$$= B\left\{\frac{\sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in P} A\,P_A^{n-s}}{B} - \frac{\sum_{(x_1,\ldots,x_s)\in Q} |A|\,P_A^{n-s}}{B}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(1-\frac{h}{2}\right)(\overline{P}_A^{n-s} - \underline{P}_A^{n-s}).$$

Deci în orice caz avem inegalitatea

$$|P^n(c') - P_A^n(c'')| \leqslant \sum_{j\geqslant s}\varepsilon_j + \left(1-\frac{h}{2}\right)|\overline{P}_A^{n-s} - \underline{P}_A^{n-s}|; \qquad (18)$$

din (18) obținem imediat

$$|\overline{P}_A^n - \underline{P}_A^n| \leqslant \sum_{j\geqslant s}\varepsilon_j + \left(1-\frac{h}{2}\right)|\overline{P}_A^{n-s} - \underline{P}_A^{n-s}|$$

și deci

$$|\overline{P}_A^n - \underline{P}_A^n| \leqslant \frac{2}{h}\sum_{j\geqslant s}\varepsilon_j + \left(1-\frac{h}{2}\right)^p$$

pentru orice întreg $p \geqslant 1$, care verifică inegalitatea $ps < n$.
În particular putem lua $p = \left[\frac{n}{s}\right] - 1$*). Dacă $\varepsilon > 0$ este dat putem alege pe s suficient de mare astfel încît

$$\frac{2}{h}\sum_{j\geqslant s}\varepsilon_j \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pentru n suficient de mare putem alege numărul p astfel încît

$$\left(1-\frac{h}{2}\right)^p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Obținem în definitiv

$$|\overline{P}_A^n - \underline{P}_A^n| \leqslant \varepsilon$$

ceea ce demonstrează existența limitei P_A^∞ și a șirului $(\eta(n))_{1\leqslant n<\infty}$ cu proprietățile menționate în enunț.
Deci teorema este demonstrată.

*) Dacă q este un număr real, $[q]$ este cel mai mare întreg $\leqslant q$.

Observația 1. Dacă presupunem că pentru s suficient de mare $\varepsilon_s = a^s$, unde $0 < a < 1$, atunci

$$\sum_{j \geqslant s} \varepsilon_j = \frac{a^s}{1-a}$$

și prin urmare pentru s și $n > s$ suficient de mari

$$\left| P_A^n(c) - P_A^\infty \right| \leqslant L_1 \left(a^s + \left(1 - \frac{h}{2}\right)^{\left[\frac{n}{s}\right]-1} \right)$$

cu L_1 constantă convenabil aleasă. Dacă punem $C = \sup\left(a, \frac{1-h}{2}\right)$ obținem cu o constantă L_2 convenabil aleasă

$$\left| P_A^n(c) - P_A^\infty \right| \leqslant L_2 (C^s + C^{\frac{n}{s}}).$$

Dacă s și $n > s$ sînt suficienți de mari, astfel încît să putem lua $s = \sqrt{n}$ deducem imediat

$$\left| P_A^n(c) - P_A^\infty \right| \leqslant \frac{L_2}{C} C^{\sqrt{n}}$$

și deci pentru orice $n \in N^*$, $c \in W$ și $A \subset S^{[1,l]}$ avem

$$\left| P_A^n(c) - P_A^\infty \right| \leqslant L C^{\sqrt{n}}$$

dacă L este convenabil aleasă. Să remarcăm că putem pune numărul C sub forma $C = e^{-\lambda}$, cu $\lambda > 0$.

În ipotezele precedente se deduce că seria

$$S_A(c) = \sum_{s \in N^*} \left(P_A^s(c) - P_A^\infty \right) \tag{19}$$

este absolut și uniform convergentă în raport cu $c \in W$ și $A \subset S^{[1,l]}$, $(l \in N^*)$.

Observația 2. Întrucît după cum am observat mai sus un lanț multiplu de ordin finit și cu o infinitate numărabilă de stări poate fi considerat ca un lanț de tip (B), teorema 1, demonstrată mai sus, ne dă o condiție suficientă de ergodicitate și pentru lanțurile multiple.

§ 2. Variabile aleatoare legate în lanț cu legături complete

Un lanț cu legături complete, definit de probabilitățile $P_x^1(c)$ satisface condiția (G) dacă există o funcție $P^\infty(A)$ definită pentru orice $A \subset S^{[1,l]}$ $(l \in N^*)$ și două constante L și $\lambda > 0$ care verifică, pentru orice $n \in N^*$, $c \in W$ și $A \subset S^{[1,l]} (l \geqslant 1)$, inegalitatea

$$\left| P_A^n(c) - P^\infty(A) \right| \leqslant L e^{-\lambda\sqrt{n}}. \tag{20}$$

În acest paragraf, după cîteva rezultate preliminarii, se va arăta că teorema limită centrală este valabilă pentru variabile aleatoare legate în lanț cu legături complete care satisface condiția (G). Să remarcăm că s-a demonstrat în § 1 că un lanț cu legături complete de tipul (B) pentru care $\varepsilon_s = a^s$ $(0 < a < 1)$, satisface condiția (G).

1. Definiții și notații generale. Pentru orice $c \in W$, $(S^N, \mathfrak{B}, Q_c)$ este un cîmp probabilizat. Valoarea medie de ordinul întîi a unei variabile aleatoare Q_c — integrabilă definită pe S^N va fi notată $M_c(h)$, iar valoarea medie de ordinul doi, $M_{c,2}(h)$. Dacă $h_1, \ldots, h_p$ sînt funcții definite pe S^{N^*} și h o variabilă aleatoare Q_c — integrabilă vom nota prin $M_{c,h_1,\ldots,h_p}(h)$ valoarea medie a variabilei aleatoare h, condiționată de $h_1, \ldots, h_p$. Cînd nu va fi nici o ambiguitate vom omite indicele $c \in W$.

Fie acum f o funcție mărginită definită pe S. Pentru fiecare $n \in N$ să notăm prin f_n funcția definită pe S^N prin egalitatea

$$f_n(w) = f(\mathrm{pr}_n(w)),$$

iar pentru orice parte finită $I \subset N$, prin g_I funcția definită pe S^N prin egalitatea

$$g_I = \sum_{j \in I} f_j,$$

f_n și g_I ($n \in N^*$ și $I \subset N^*$ parte finită) sînt evident variabile aleatoare (mărginite) pe spațiul probabilizat $(S^{N^*}, \mathfrak{B}, Q_c)$. În loc de $g_{[1,n]}$ vom scrie de obicei g_n.

Dacă

$$D = \sup_{x \in S_c} |f(x)|$$

evident $C(I)\, D \geqslant |g(x)|^*$ pentru orice $x \in S$ și $I \subset N^*$ parte finită.

2. Momentele absolute de ordin $\alpha > 0$ ale variabilelor, $f_j (j \in N^*)$. Fie

$$M_\alpha^\infty = \sum_{x \in S} f(x)^\alpha P_x^\infty \ (\alpha \text{ întreg pozitiv}), \text{ unde } P_x^\infty = P_{\{x\}}^\infty \text{ este valoarea funcției } P_A^\infty$$

introdusă în enunțul condiției (G) pentru $A = \{x\}$. După formula (5), pentru orice $j \in N^*$ avem

$$M_c(f_j) = \sum_{x \in S} f(x)^\alpha \cdot P_x^j \quad (\alpha \text{ întreg pozitiv}) \tag{21}$$

și deci după condiția (G), pentru orice $j \in N^*$,

$$|M_c(f_j^\alpha) - M_\alpha| \leqslant 2L\, B^\alpha\, e^{-\lambda\sqrt{j}}. \tag{22}$$

*) Prin $C(I)$ notăm numărul cardinal al mulțimii I.

Din (22) deducem pentru orice parte finită $I \subset N^*$

$$\left| \frac{1}{C(I)} \sum_{j \in I} M_c(f_j^\alpha) - M_\alpha^\infty \right| \leqslant \frac{2LB^\alpha}{C(I)} \sum_{j \in I} e^{-\lambda\sqrt{j}} \tag{23}$$

de unde rezultă

$$\lim_{I \in \mathcal{F}(N^*)} \frac{1}{C(I)} \sum_{j \in I} M_c(f_j^\alpha) = M_\alpha^\infty,$$

unde $\mathcal{F}(N^*)$ este mulțimea părților finite ale lui N^*, ordonată prin relația: $X < Y$, dacă $X \subset Y$.

În mod asemănător se arată că avem

$$\lim_{I \in \mathcal{F}(N^*)} \frac{1}{C(I)} M_c(g_I) = M_1^\infty. \tag{24}$$

3. Momentul de ordinul doi al variabilelor $g_n - M_c(g_n)$, $(n \in N^*)$. Să presupunem că f fiind dat avem

$$M_1^\infty = 0. \tag{25}$$

Propoziția 1. *Pentru orice* $t > j \geqslant 1$ *și* $c \in W$

$$|M_c(f_j f_t)| \leqslant 2B^2 Le^{\sqrt{t-j}}. \tag{26}$$

Avem $(t > j \geqslant 1)$

$$|M_c(f_j f_t)| = |M_c(f_j M_{f_j}(f_t))| = |M_c(f_j M_{f_j}(f_t) - M)| \leqslant$$

$$\leqslant B|M_{f_j}(f_t) - M| = B|M_{f_j}(M_{(f_1,\ldots,f_j)}(f_t - M)|.$$

Dar (vezi formula (3)).

$$M_{(f_1,\ldots,f_j)}(f_t - M) = \sum_{x \in S} f(x) P^{t-j}(u_{x_1,\ldots,x_j}(c)) - \sum_{x \in S} f(x) P_x^\infty$$

și prin urmare în baza condiției (G)

$$|M_{f_1,\ldots,f_j}(f_t - M)| \leqslant 2BLe^{-\lambda\sqrt{t-j}};$$

deducem imediat inegalitatea (26).

Să punem pentru orice $h > 2$

$$M_1^\infty(f_1, f_h) = \sum_{(a_1,\ldots,a_h) \in S^{[1,h]}} f(a_1) f(a_h) P^\infty_{\{(a_1,a_2,\ldots,a_h)\}}. \tag{27}$$

Propoziția 2. *Pentru orice* $t \geqslant j \geqslant 1$ *și* $c \in W$

$$|M_c(f_j, f_t) - M_1^\infty(f_1, f_{t-j+1})| \leqslant 2B^2 Le^{-\lambda\sqrt{j}}. \tag{28}$$

Avem (vezi formula (5))

$$M_c(f_j, f_t) = \sum_{(a_1,\ldots,a_{t-j+1}) \in S^{[1,\,t-j+1]}} f(a_1) f(a_{t-j+1}) P^j_{(a_1,\ldots,a_{t-j+1})}(c)$$

și deci dacă ținem seama de formula (27) și de condiția (G) obținem (28).

Corolar. *Seria*

$$\sum_{h=1}^{\infty} M_1^{\infty}(f_1 \cdot f_{h+1})$$

este absolut convergentă.

Este suficient să observăm că din propozițiile 1 și 2 de mai sus obținem

$$|M_1^{\infty}(f_1 \cdot f_{h+1})| \leqslant 2B^2 L e^{-\lambda\sqrt{h}} \text{ *)} \tag{29}$$

pentru orice $h \in N^*$.

Să notăm cu σ_1^2 suma

$$M_2^{\infty} + \sum_{h=1}^{\infty} M_1^{\infty}(f_1, f_{h+1}). \tag{29'}$$

Teorema 1. *Există o constantă R convenabil aleasă care verifică inegalitatea*

$$\left|\frac{1}{n} M_c(g_n^2) - \sigma_1^2\right| \leqslant R\left(\frac{1}{n} + \inf_{1<q<\infty}\left(\frac{q+1}{n} + e^{-\lambda\sqrt{q+1}}\right)\right) \tag{30}$$

oricare ar fi $c \in W$ și $n \in N^*$.

Avem, pentru orice $n \in N^*$ și $c \in W$,

$$M_c(g_n^2) = \sum_{j=1}^{n} M_c(f_j^2) + 2\sum_{j=1}^{n-1} M_c(f_j \sum_{t=j+1}^{n} f_t). \tag{31}$$

Din inegalitatea (22), demonstrată mai sus, deducem imediat

$$\left|\sum_{j=1}^{n} M_c(f_j^2) - nM_2\right| \leqslant 2B^2 L e^{-\lambda\sqrt{j}} \leqslant 2B^2 L Q_0. \tag{32}$$

Să punem acum ($c \in W$ și $n \geqslant 1$)

$$D(1) = \sum_{j=1}^{n-1} M_c(f_j \sum_{t=j+1}^{\infty} f_t) - \sum_{j=1}^{n-1} M_c(f_j \sum_{t=j+1}^{n} f_t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} M_c(f_j \sum_{t=n+1}^{\infty} f_t) = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{t=n+1}^{\infty} M_c(f_j, f_t).$$

După inegalitatea (26) avem

$$|D(1)| \leqslant 2B^2 L \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{t=n+1}^{\infty} e^{-\lambda\sqrt{t-j}} = 2B^2 L \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=n+1-j}^{\infty} e^{-\lambda\sqrt{i}} \leqslant$$

$$\leqslant 2B^2 L \sum_{j=1}^{n-1} e^{-\lambda\sqrt{n+1-j}} \leqslant 2B^2 L\, Q_0^2.$$

*) Pentru orice $n \in N^*$ avem

$$\sum_{p=n}^{\infty} e^{-\lambda\sqrt{p}} \leqslant Q_0\, e^{-\lambda\sqrt{n}},$$

unde Q_0 este o constantă convenabil aleasă (pe care o presupunem $\geqslant 1$)

Să majorăm acum diferența

$$D(2) = \sum_{t=j+1}^{\infty} M_c(f_j, f_t) - \sum_{h=1}^{\infty} M_1^{\infty}(f_1 f_{h+1}).$$

Pentru $q > 1$ oarecare (întreg) și $c \in W$ avem

$$D(2) = \sum_{t=j+1}^{j+q} M_c(f_j, f_t) - \sum_{h=1}^{q} M_1^{\infty}(f_1, f_{h+1}) +$$

$$+ \sum_{t=j+q+1}^{\infty} M_c(f_j, f_t) - \sum_{h=q+1}^{\infty} M_1^{\infty}(f_1, f_{h+1}) =$$

$$= \sum_{t+j+1}^{j+q} M_c(f_j, f_t) - \sum_{t=j+1}^{j+q} M_1^{\infty}(f_1, f_{t-j+1}) +$$

$$+ \sum_{t=j+q+1}^{\infty} M_c(f_j, f_t) - \sum_{h=q+1}^{\infty} M_1^{\infty}(f_1, f_{h+1})$$

și deci după inegalitățile (26) și (28) demonstrate mai sus

$$|D(2)| \leqslant 2B^2 Lqe^{-\lambda\sqrt{j}} + 4B^2 L \sum_{i=q+1}^{\infty} e^{-\lambda\sqrt{i}} \leqslant$$

$$\leqslant 4B^2 LQ_0 (q\, e^{-\lambda\sqrt{j}} + e^{-\lambda\sqrt{q+1}}).$$

Pentru n întreg $\geqslant 1$ și $c \in W$

$$D(3) = \sum_{j=1}^{n-1} M_c(f_j, \sum_{t=j+1}^{n} f_t) - n \sum_{h=1}^{\infty} M_1^{\infty}(f_1 f_{h+1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} M_c(f_j, \sum_{t=j+1}^{n} f_t) - \sum_{j=1}^{n-1} M_c(f_j, \sum_{j=t+1}^{\infty} f_t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} M_c(f_j, \sum_{t=j+1}^{\infty} f_t) - (n-1) \sum_{h=1}^{\infty} M_1^{\infty}(f_1, f_{h+1}) -$$

$$- \sum_{h=1}^{\infty} M_1^{\infty}(f_1, f_{h+1}) = \sum_{j=1}^{n-1} M_c(f_j, \sum_{t=n+1}^{\infty} f_t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (M_c(f_j, \sum_{t=j+1}^{\infty} f_t) - \sum_{h=1}^{\infty} M_1^{\infty}(f_1, f_{h+1})) =$$

$$- \sum_{h=1}^{\infty} M_1^{\infty}(f_1, f_{h+1})$$

și deci

$$|D(3)| \leqslant |D(1)| + 4B^2LQ_0\left(q\sum_{j=1}^{n-1} e^{-\lambda\sqrt{j}} + (n-1)e^{-\lambda\sqrt{q+1}}\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} |M_1^{\infty}(f_1 f_{h+1})| \leqslant 2B^2LQ_0^2 + 4B^2LQ_0^2(q + (n-1)\, e^{-\lambda\sqrt{q+1}}) +$$

$$+\sum_{h=1}^{\infty} |M_1^{\infty}(f_1 f_{h+1})| \leqslant 4B^2LQ_0^2(q+1+(n-1)\, e^{-\lambda\sqrt{q+1}}) +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} M_1^{\infty}(f_1 f_{h+1}).$$

Acum putem demonstra inegalitatea (32). Într-adevăr, avem pentru $n \geqslant 1$ și $c \in W$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} M_c(f_j^2) + 2\sum_{j=1}^{n} M_c(f_j \sum_{t=j+1}^{n} f_t) - n\,\sigma_1^2\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2B^2LQ_0 + 8B^2LQ_0^2(q+1+(n-1)\, e^{-\lambda\sqrt{q+1}}) +$$

$$+\sum_{h=1}^{\infty} |M_1^{\infty}(f_1 f_{h+1})| \leqslant R\,(1+q+1+(n-1)\, e^{-\lambda\sqrt{q+1}})$$

dacă luăm

$$R = 2B^2LQ_0 + 8B^2LQ_0^2 + \sum_{h=1}^{\infty} |M_1^{\infty}(f_1 f_{h+1})|$$

deci

$$\left|\frac{1}{n} M_c(g_n^2) - \sigma_1^2\right| \leqslant R\left(\frac{1}{n} + \left(\frac{q+1}{n} + e^{-\lambda\sqrt{q+1}}\right)\right)$$

oricare ar fi $n \geqslant 1$, $1 < q < \infty$ și deci teorema 1 este demonstrată.

Să punem acum

$$\sigma^2 = M_2^{\infty} + \sum_{h=1}^{\infty} M_1^{\infty}(f_1 f_{h+1}) + (M_1^{\infty})^2. \tag{33}$$

Din teorema precedentă și din inegalitatea (21) se deduce fără dificultate

Teorema 2. *Există o constantă H (convenabil aleasă), care verifică inegalitatea*

$$\left|\frac{1}{n} M_c\left((g_n - M_c(g_n))^2\right) - \sigma^2\right| \leqslant H\left[\frac{1}{n} + \inf_{1<q<\infty}\left(\frac{q+1}{n} + e^{-\lambda\sqrt{q+1}}\right)\right] \tag{34}$$

oricare ar fi $n \in N^*$ și $c \in W$.

Într-adevăr avem

$$M_c\left((g_n - M_c(g_n))^2\right) = M_c(g_n) - (M_c(g(n))^2)$$

întrucît $\frac{1}{n} M_c(g_n)$ converge după egalitatea (4) către M_1^{∞}.

Observația 1. Inegalitățile obținute în teoremele 1 și 2 din acest paragraf *rămîn evident valabile cu aceleași constante* R și H respectiv și dacă în locul variabilelor aleatoare g_n $(n \in N^*)$ considerăm variabila aleatoare de forma $g_{[p+1,\, p+r]}$ $(p,\ n \in N^*)$.

Observația 2. Ipoteza

$$M_1^\infty = 0$$

a fost făcută pentru simplificarea scrisului.

Observația 3. Teoremele 1 și 2 justifică aposteriori notațiile σ_1^2 și σ^2 introduse prin formulele (29′) și (33).

4. O teoremă a lui S. Bernștein. Aici vom reaminti un rezultat al lui S. Bernștein [11] care va fi utilizat esențial pentru demonstrarea, în punctul următor, a teoremei limită centrală, pentru variabile aleatoare legate în lanț cu legături complete, care satisface condiția (G). Pentru a putea formula rezultatul lui S. Bernstein, menționat, vom introduce mai întîi cîteva notații.

Fie $\{E, T, P\}$ un *spațiu probabilizat* oarecare și $h_1, h_2, \ldots h_{r(n)}$ variabile aleatoare definite pe $\{E, T, P\}$ cu valori reale pentru care momentul absolut de ordinul trei există. Să punem

$$S(n) = h_1 + h_2 + \ldots + h_{r(n)},$$

$$\alpha_i = P - \max |\, M_{(h_1, \ldots, h_{i-1})}(h_i) - M(h_i) \,|,^*) \quad (i = 1,2, \ldots, r(n)),$$

$$\beta_i = P - \max |\, M_{(h_1, \ldots, h_{i-1})}(h_i^2) - M(h_i^2) \,|, \quad (i = 1,2, \ldots, r(n)),$$

$$\tau_i = M(|\, h_i \,|^3), \quad (i = 1,2, \ldots, r(n)).$$

Teorema lui S. Bernstein. Dacă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}{\sqrt{M[S(n)^2]}} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i}{M[S(n)^2]} = 0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \tau_i}{M[S(n)^2]^{\frac{3}{2}}} = 0 \tag{35}$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} P\{S(n) < a\sqrt{M(S(n)^2)}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Observație. Variabilele aleatoare

$$h_1, h_2, \ldots, h_{r(n)}$$

pot varia cu $n \in N^*$.

5. Teorema limită centrală. Să presupunem

$$\sigma^2 \neq 0 \tag{36}$$

și

$$M_1^\infty = 0. \tag{37}$$

---

*) Pentru o variabilă aleatoare f definită pe spațiul probabilizat $\{E, T, P\}$

$$P - \max |f| = \inf \{\alpha \mid P(|f| > \alpha) = 0\}.$$

Să remarcăm înainte de a formula teorema fundamentală că în timp ce ipoteza (36) este esențială pentru validitatea rezultatelor din acest punct, condiția (37) este făcută numai pentru a simplifica notațiile. Variabilele aleatoare considerate sînt introduse în punctul 2 al acestui paragraf.

Teorema 3. *Pentru orice* $c \in W$

$$\lim_{n\to\infty} Q_c\left(\frac{f_1 + \ldots + f_n}{\sqrt{n}} < a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{38}$$

Demonstrație. Să punem pentru fiecare $n \in N^*$

$$\begin{aligned}
A_1 &= f_1 + \ldots + f_{n_1} \\
A_2 &= f_{n_1+n_2+1} + \ldots + f_{2n_1+n_2} \\
A_3 &= f_{2n_1+2n_2+1} + \ldots + f_{3n_1+2n_2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{r(n)} &= f_{(r(n)-1)\,(n_1+n_2)} + \ldots + f_{r(n)n_1+(r(n)-1)n_2}
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= f_{n_1+1} + \ldots + f_{n_1+n_2} \\
B_2 &= f_{2n_1+n_2+1} + \ldots + f_{2n_1+2n_2} \\
B_3 &= f_{3n_1+2n_2+1} + \ldots + f_{3n_1+3n_2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_{r(n)} &= f_{r(n)n_1+(r(n)-1)n_2+1} + \ldots + f_{r(n)\,(n_1+n_2)}
\end{aligned} \tag{40}$$

și

$$A(n) = A_1 + \ldots + A_{r(n)}\ ;\ B(n) = B_1 + \ldots + B_{r(n)}.\ ^*)$$

Să luăm $n_1 = [n^{\frac{1}{3}}]$ și $n_2 = [n^{\frac{1}{18}}]$; atunci pentru orice $n \in N^*$ avem

$$[1 - p(n)]\, n^{\frac{2}{3}} \leqslant r(n) \leqslant n^{\frac{2}{3}}\, q(n),$$

unde $\lim_{n\to\infty} p(n) = \lim_{n\to\infty} q(n) = 0$. Prin urmare,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(n)}{n^{\frac{2}{3}}} = 1. \tag{41}$$

Dacă pentru $i = 1, 2, \ldots, r(n)$ punem

$$\alpha_i = |\, M_{(A_1, \ldots, A_{i-1})}(A_i) - M_c(A_i)\,|$$

și

$$\beta_i = |\, M_{(A_1, \ldots, A_{i-1})}(A_i^2) - M_c(A_i)\,|$$

se demonstrează fără dificultate inegalitățile

$$\alpha_i \leqslant 2BL\, e^{-\lambda\sqrt{n_2}} \text{ și } \beta_i \leqslant 2BLn_1\, e^{-\lambda\sqrt{n_2}}. \tag{42}$$

---

*) Pentru a simplifica scrisul vom scrie uneori numai r în loc de $r(n)$.

De asemenea se obține imediat inegalitatea

$$\tau_i = M_c(\,|\,A_i\,|^3) \leqslant Bn_1 M_c(A_i^2) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r(n)\,) \tag{43}$$

întrucît pentru orice $i = 1, 2, \ldots, r(n)$, $|\,A_i^3\,| \leqslant Bn_1\,A_i^2$.

Pentru orice $n \in N^*$

$$M_c(A(n)^2) = \sum_{i=1}^{r} M_c(A_i^2) + \sum_{i=1}^{r-1} M_c(A_i \sum_{j=i+1}^{r} A_j).$$

Să remarcăm că pentru $j > i$ (vezi raționamentul făcut în proporția 1 pentru a majora momentul $M_c(f_i f_j)$ și a obține inegalitatea (26))

$$|\,M_c(A_iA_j)\,| \leqslant 2B^2n_1^2\,Le^{-\lambda\sqrt{n_2}}$$

întrucît $|\,A_i\,|$, $|A_j\,| \leqslant Bn_1$ și deci

$$\left|\sum_{i=1}^{r-1} M_c(A_i \sum_{j=i+1}^{r} A_j)\right| \leqslant 2B^2n_1^2 r(n) e^{-\lambda\sqrt{n_2}}\,.$$

Să mai observăm că

$$\lim_{n\to\infty} 2B^2n_1^2 \cdot r(n)\, e^{-\lambda\sqrt{n}} = 0. \tag{44}$$

După teorema 2

$$\left|\frac{1}{n_1} M_c(A_i^2) - \sigma^2\,|\leqslant H\left(\frac{1}{n_1} + \eta(n_1)\right),\right.$$

unde

$$\eta(n_1) = \inf_{0<q<\infty}\left(\frac{q+1}{n_1} + e^{-\lambda\sqrt{q+1}}\right),$$

și deci oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, r(n)$,

$$M_c(A_i^2) = n_1\sigma^2 + \theta_i\,(H + n_1\,\eta(n_1))$$

θ_i fiind număr mai mic sau egal cu 1 în modul. Prin urmare

$$M_c(A(n)^2) = r(n)n_1\sigma^2 + \sum_{i=1}^{r} \theta_i\,(H + n_1\,\eta(n_1)) + R(n),$$

unde, în baza egalității (44),

$$\lim_{n\to\infty} R(n) = 0.$$

Să arătăm acum că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} M_c(A(n)^2) = \sigma^2.$$

Pentru aceasta va fi suficient să demonstrăm egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=n}^{r} n_1\,\eta(n_1) = 0$$

care rezultă din inegalitățile (luăm $q = [n^{\frac{1}{3}}]$)

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i\eta(n_i)\right| \leqslant \frac{1}{n} r(n)n_1\eta(n_1) \leqslant \frac{1}{n} r(n)n^{\frac{1}{3}}\left(\frac{n^{\frac{1}{6}}+1}{\left[n^{\frac{1}{3}}\right]} + e^{-\lambda\sqrt{n^{\frac{1}{6}}}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r(n)}{n^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{n^{\frac{1}{6}}+1}{\left[n^{\frac{1}{3}}\right]} + e^{-\lambda\sqrt{n^{\frac{1}{6}}}}\right).$$

O dată aceste calcule făcute să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty} Q_c\left(\frac{A(n)}{\sigma\sqrt{n}} < a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du. \tag{45}$$

Este, evident, suficient să demonstrăm egalitatea (45) pentru $\frac{A(n)}{M(A(n)^2)}$ în locul variabilei aleatoare $\frac{A(n)}{\sigma\sqrt{n}}$ întrucît $\frac{\sqrt{M_c(A(n)^2)}}{\sigma\sqrt{n}}$ tinde către 1 cînd $n \to \infty$ *).

Pentru aceasta să arătăm că relațiile (35) din teorema lui S. Bernstein sînt îndeplinite. Din inegalitățile (42) se obține

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \leqslant 2BLr(n)e^{-\lambda\sqrt{n_2}}$$

și

$$\sum_{i=1}^{r} \beta_i \leqslant 2BLn_1r(n)\,e^{-\lambda\sqrt{n_2}}$$

ceea ce arată că primele două relații (35) din teorema lui Bernstein sînt verificate. Rămîne să arătăm că și a treia condiție este satisfăcută. Într-adevăr, avem

$$\frac{\sum_{i=1}^{r(n)}\tau_i}{M_c(A(n)^2)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{Bn_1\sum_{i=1}^{r(n)} M_c(A_i^2)}{M_c(A(n)^2)^{\frac{3}{2}}} \leqslant B\frac{\sum_{i=1}^{r(n)} M_c(A_i^2)}{M_c(A(n)^2)} \cdot \frac{\sqrt{n}\,\sigma}{\sqrt{M_c(A(n)^2)}} \cdot \frac{n_1}{\sigma\sqrt{n}}$$

după cum se vede, aplicînd inegalitatea (44) și făcînd cîteva simplificări elementare. Cum primele două din produsul de mai sus tind către 1 (pentru a demonstra că primul raport tinde către 1 utilizăm egalitatea

*) Dacă $(h_n)_{1\leqslant n<\infty}$ este un șir de variabile aleatoare și F o funcție de repartiție continuă pentru care avem

$$\lim_{n\to\infty} P(h_n < a) = F(a),$$

atunci pentru orice șir $(\alpha_n)_{1\leqslant n<\infty}$ care converge către 1 avem

$$\lim_{n\to\infty} P(\alpha_n h_n < a) = F(a).$$

(44). Deci condițiile (35) din teorema lui Bernstein sînt toate verificate și deci egalitatea (45) este verificată. Cum

$$\frac{f_1 + \ldots + f_n}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{A(n)}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{B(n)}{\sigma\sqrt{n}}$$

oricare ar fi $n \in N^*$, pentru a demonstra complet teorema 3 este suficient să arătăm că șirul $\frac{B(n)}{\sigma\sqrt{n}}$ tinde către zero în probabilitate*). Pentru aceasta să calculăm momentul de ordinul doi, $M_c(B(n)^2)$, pentru $n \in N^*$. Avem

$$| M_c(B(n)^2) | = \left| \sum_{i=1}^{r} M_c(B_i^2) + \sum_{i=1}^{r-1} M_c(B_i \sum_{j=i+1}^{r} B_j) \right| \leqslant$$

$$\leqslant r(n)\, n_2^2\, B^2 + 2B^2 n_2^2\, r(n) e^{-\lambda\sqrt{n_1}}$$

însă deoarece ultimul membru al inegalității împărțit prin n tinde către ∞ cînd $n \to \infty$, urmează că $\frac{M_c(B(n)^2)}{n}$ tinde în probabilitate către zero. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Putem da o formă puțin deosebită teoremei 3, fără a face ipoteza (37).

Teorema 4. *Pentru orice* $c \in W$

$$\lim_{n\to\infty} Q_c\left(\frac{f_1 + \ldots + f_n - n M_1^\infty}{\sqrt{n}} < a\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\, du.$$

Capitolul II

LANȚURI CU LEGĂTURI COMPLETE CU DENSITĂȚI

§ 1. Teoreme ergodice uniforme

Scopul acestui paragraf este obținerea prin metode operaționale a unei serii de teoreme ergodice, privind lanțurile cu legături complete cu densități. Pentru acest motiv, înainte de a începe studiul propriu-zis al lanțurilor, va fi studiat un operator de tip special.

---

*) Dacă $(h_n)_{1\leqslant n<\infty}$ este un șir de variabile aleatoare și F o funcție de repartiție continuă pentru care avem

$$\lim_{n\to\infty} P(h_n < a) = F(a) \text{ pentru orice } a,$$

atunci pentru orice șir $(w_n)_{1\leqslant n<\infty}$ de variabile aleatoare care tind în probabilitate către zero avem

$$\lim_{n\to\infty} P(h_n + w_n < a) = F(a).$$

1. O teoremă ergodică. Vom reaminti acum o teoremă demonstrată în [12]. Fie E un spațiu vectorial complex și B un subspațiu al lui E. Să presupunem că E este un spațiu Banach în raport cu o normă $x \to |x|$ și B un spațiu Banach în raport cu o normă $x \to \|x\|$ definită pe B. Presupunem încă verificată condiția

$$x_n \in B, \|x\| \leqslant \text{o constantă } N, (n = 1,2,\ldots) \text{ și} \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0 \text{ implică } x \in B \text{ și } \|x\| \leqslant N.$$

Fie $C(B,E)$ mulțimea operatorilor T ai spațiului Banach B care satisfac condițiile :

(i) există o constantă pozitivă H, astfel încît pentru $n = 1, 2, \ldots$ avem

$$|T^n|_B \leqslant H;$$

(ii) există două constante R, $r(0 < r < 1)$ astfel încît

$$\|Tx\| \leqslant r\|x\| + R|x|$$

oricare ar fi $x \in B$;

(iii) pentru orice parte $P \subset B$, mărginită în B, $T(B)$ este relativ compactă în E.

Aceste condiții și notații fiind introduse să enunțăm următoarea teoremă demonstrată în [12].

(T) *Fie T un operator aparținînd mulțimii $C(B,E)$. Atunci :*

normele $\|T^n\|$, $(n = 1,2,\ldots)$ *sînt uniform mărginite*; (2)

nu există decît un număr finit de valori proprii de modul 1, *ale operatorului* T, $c_1, c_2, \ldots, c_p$; (3)

$$T^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i^n} T_i + S_n \quad , \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

unde T_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ *sînt operatori avînd ca domeniu spațiul B și ca contradomeniu o parte liniară a lui B, de dimensiune finită, liniară și mărginită și S_n un operator avînd ca domeniu spațiul B, și contradomeniul conținut în B, liniar și mărginit*;

$$T_i^2 = T_i, \; T_iT_j = 0, (i \neq j), \; T_iS = ST_i = 0; \tag{5}$$

$$\|S^n\| \leqslant \frac{M}{(1+h)^n}, \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{6}$$

M și h fiind două constante pozitive.

2. Un exemplu de operator aparținînd unei mulțimi $C(B,E)$. Să notăm cu $\{S,T,P\}$ un spațiu probabilizat (unde S este un spațiu compact, iar T mulțimea părților boreliene ale lui S) cu P o măsură Radon definită pe T și cu W un spațiu metric compact. Distanța între două elemente

$t_1 \in W$ şi $t_2 \in W$ o vom nota prin $d(t_1,t_2)$. Vom nota cu $C(W)$ spaţiul Banach al funcţiilor continue definite pe W, cu valori complexe, normat prin

$$| f | = \sup_{t \in W} | f(t) |$$

şi cu $CL(W)$ spaţiul Banach al funcţiilor $f(t)$ cu valori definite pe W, pentru care

$$\sup \left| \frac{f(t_1) - f(t_2)}{d(t_1, t_2)^{\alpha}} \right| = m(f,d) < \infty, \ (0 \leqslant \alpha \leqslant 1) \ ^{*}),$$

(marginea superioară fiind luată pentru $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in W$) normat prin

$$\| f \| = m(f,d) + | f | \ ^{**}).$$

Fie $\varphi(t,x) \geqslant 0$ o funcţie definită pe $S \times W$ care are următoarele proprietăţi :

pentru fiecare $x \in S$, $\varphi(t,x) \in CL(W)$

$$| \varphi(t_1,x) - \varphi(t_2,x) | \leqslant k d(t_1,t_2) ; \tag{7}$$

$\varphi(t,x)$ este măsurabilă ca funcţie de x ; (8)

pentru fiecare t

$$\int_S \varphi(t,x) \, dP(x) = 1. \tag{9}$$

Pentru fiecare $x \in S$ să considerăm o transformare $u(t \,|x)$ a lui W în W. Pentru fiecare $t \in W$ şi $(x_1, \ldots, x_r) \in S^r$ să notăm $^{***})$

$$u(t \,|x_1, \ldots, x_r) = u(u(t \,|x_1, \ldots, x_{r-1}) \,|\, x_r).$$

Vom presupune că următoarele condiţii sînt satisfăcute :

(i) $d(u(t_1 \,|x), \ u(t_2 \,|x)) \leqslant r d(t_1, t_2)$, unde r este o constantă cuprinsă între 0 şi 1, $(0 < r < 1)$, independentă de cuplul t_1, t_2 ;

(ii) $u(t \,|x_1, \ldots, x_r)$ este continuă pe spaţiul S^r oricare ar fi $t \in W$.

Condiţiile precedente implică, pentru orice t şi $f \in C(W)$, măsurabilitatea funcţiei de x, $f(u(t \,|x))$ şi prin urmare putem defini operatorul

$$Tf(t) = \int_S \varphi(t,x) \, f(u(t \,|x)) \, dP(x). \tag{10}$$

---

*) Este suficient să considerăm întotdeauna cazul $\alpha = 1$, întrucît cazul $0 < \alpha \leqslant 1$ se reduce la cazul $\alpha = 1$, schimbînd convenabil distanţa.

**) O normă echivalentă se obţine punînd

$$||| f ||| = m(f,d) + f(a),$$

unde a este un punct din W fixat.

***) S^r este spaţiul topologic produs $\underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{r \text{ ori}}$

După cum se vede prin această integrală putem face să corespundă fiecărei funcții $f \in C(W)$ o funcție $f^* = Tf$ aparținînd spațiului $C(W)$. Se constată de asemenea fără dificultate că T este o operație liniară.

Teorema 1. 1) $|T^n| \leqslant 1$ *pentru orice* $n = 1, 2, \ldots$; 2) *restricția operatorului* T *la* $CL(W)$ *aparține mulțimii* C(B,E) *unde* $B = CL(W)$ *și* $E = C(W)$ *).

Demonstrație. Demonstrația punctului 1) este imediată. Să trecem la punctul 2). Să începem prin a demonstra că $Tf \in CL(W)$ dacă $f \in C(W)$. Pentru aceasta este suficient să observăm că

$$|f^*(t_1) - f^*(t_2)| \leqslant \left| \int_S \varphi(t_1,x) \{ f(u(t_1|x)) - f(u(t_2|x)) \} dP(x) \right| +$$

$$+ \left| \int_S \{ \varphi(t_1,x) - \varphi(t_2,x) \} f(u(t_2,x)) dP(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant kd(t_1,t_2)|f| + rm(f)d(t_1,t_2) = d(t_1,t_2)(k|f| + rm(f)). \tag{11}$$

Dacă ținem seama de punctul 1) urmează că ipoteza (*i*), din definiția mulțimilor $C(B, E)$, este verificată. Din (11) rezultă că

$$|m(f^*)| \leqslant k|f| + rm(f).$$

Însă

$$|f^*| + m(f^*) \leqslant k|f| + |f| + rm(f) = rm(f) + (k+1)|f| \leqq$$
$$\leqslant r\|f\| + (k+1)|f|$$

deoarece

$$|f^*(t)| \leqslant \int_S \varphi(t, x)\, |f(u(t|x))|\, d\,P(x) \leqslant |f|$$

deci

$$\|Tf\| \leqslant r\|f\| + R|f| \tag{12}$$

dacă notăm $R = k + 1$. Inegalitatea (12) ne arată că și ipoteza (*ii*) este verificată. Pentru a demonstra că $T \in C(B, E)$ rămîne să arătăm că dacă P este o parte a lui B, pentru care avem $\|f\| \leqslant M$, oricare ar fi $f \in P$, atunci mulțimea $T(P)$ este relativ compactă în E. Dar din $\|f\| \leqslant M$, pentru $f \in P$ se deduce

$$|Tf| + m(Tf) = \|Tf\| \leqslant r\|f\| + R|f| \leqslant (r + R)M$$

ceea ce arată că $T(P)$ este uniform mărginită și uniform egal continuă, deci relativ compactă în E. Deci teorema este demonstrată.

Observație. Prin urmare, teorema (T) este valabilă pentru operatorul T. După cum se știe valabilitatea teoremei (T) pentru un operator T,

*) Vom nota restricția operatorului T la B tot prin B.

este echivalentă cu cvasi-compactitatea operatorului T și mărginirea uniformă a normelor T^m $(m = 1,2...)$.

3. O proprietate ergodică (uniformă) a operatorului T.

Teorema 2. a) *Dacă* $c_1 = 1$, $c_2, ..., c_p$ *sînt valorile proprii de modul* 1 *ale operatorului* T, există $p + 1$ *funcții* $\varphi_1(t, x),..., \varphi_p(t, x), r(t, x)$ *care au proprietățile* (7), (8) *și* (9) *și care verifică, pentru orice* $t \in W$, $x \in S$ *și* $n \geqslant 1$, *relațiile*

$$\varphi^n(t,x) = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{c_j^n} \varphi_j(t,x) + r^n(t,x) \tag{13}$$

și

$$\| r^n(t,x) \| \leqslant \frac{M}{(1+h)^n},$$

unde M *și* h *sînt două constante pozitive. Dacă ordinul de multiplicitate al valorii proprii* $c_1 = 1$ *este* 1,

$$\varphi_1(t,x) \equiv \varphi_1(x);$$

b) *Pentru orice* $n \geqslant 1$ *și* $i = 1,2, ..., p$

$$\sup_{x \in S} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} c_i^n \varphi^n(t,x) - \varphi_i(t,x) \right\| \leqslant \frac{M_1}{n}, \tag{14}$$

unde M_1 *este o constantă pozitivă, convenabil aleasă*;

c) *Dacă* 1 *este singura valoare proprie de modul* 1 *a operatorului* T, *pentru orice* $n \geqslant 1$

$$\sup_{x \in S} \| \varphi^n(t,x) - \varphi_1(t,x) \| \leqslant \frac{M}{(1+h)^n}; \tag{15}$$

d) *Dacă există o constantă* $\lambda > 0$, *pentru care avem*

$$\varphi(t', x) \geqslant \lambda \varphi(t'', x)$$

oricare ar fi t', $t'' \in W$ *și* $x \in S$, $c_1 = 1$ *este singura valoare proprie de modul* 1 *a operatorului* T *și ordinul său de multiplicitate este* 1.

Demonstrație. a) Pentru a obține relația (13) este suficient să utilizăm teorema (T) și să punem pentru $j = 1, 2,..., p$ și $x \in S$.

$$\varphi_j(t, x) = T_j \varphi(t, x) \text{ și } r^n(t, x) = S^n \varphi(t, x).$$

Să presupunem acum că $c_1 = 1$ este valoarea proprie a operatorului T de multiplicitate 1. Atunci spațiul vectorial

$$B(1) = \{h \mid f - Tf\} = 0$$

este de dimensiune 1; deci orice $f \in B(1)$ este de forma $r_f f_1$, unde $\lambda_f f_1$ este o constantă care depinde de f iar f_1 un element din $B(1)$. După teorema (T) contradomeniul operatorului T_1 este $B(1)$; deci $\varphi_1(t, x) \in B(1)$ pentru orice x și deci

$$\varphi_1(t, x) = \lambda(x) f_1(t),$$

unde $\lambda(x)$ este o constantă ca funcție de t. Dar

$$1 = \int_S \varphi_1(t, x)\, dP(x) = f_1(t) \int_S \varphi(x)\, dP(x),$$

ceea ce arată că $f_1(t)$ este o constantă ca funcție de t și demonstrează complet punctul a).

b) Din (13) deducem, pentru orice i $(1 \leqslant i \leqslant p)$,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} c_i^n\, \varphi^n(t, x) =$$

$$= \varphi_1(t, x) + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{p} c_j^n\, \varphi_j(t, x)\, \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c_i}{c_j}\right)^n + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} r^n(t, x).$$

Dar șirul

$$\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c_i}{c_j}\right)^n\right)_{1\leqslant n<\infty}$$

este mărginit de o constantă L_2 dacă $i \neq j$ întrucît pentru orice $N > 1$

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c_i}{c_j}\right)^n = \frac{c_i\,(c_j - c_i/c_j)^N}{1 - (c_i/c_j)}.$$

Pe de altă parte, pentru orice $N \geqslant 1$

$$\sup_{s\in S}\left\| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} r^n(t, x)\right\| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{M}{(1+h)^n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{(1+h)^n} = \frac{L_3}{N}.$$

Dacă punem

$$L_3 = \sup\{\| \varphi_j(t, x)\| \mid 1 \leqslant j \leqslant p, t \in W, x \in S\}$$

și

$$M_1 = nL_1 + L_2 + L_3$$

obținem inegalitatea (2).

c) Demonstrarea punctului (c) este imediată întrucît în ipotezele făcute pentru orice $t \in W$, $x \in S$ și $n \geqslant 1$

$$\varphi^n(t, x) = \varphi_1(t, x) + r^n(t, x).$$

d) Punctul d) se deduce din rezultatul corespunzător demonstrat în [12]

3. Observație. Fie S un spațiu metric compact cu distanța notată prin d și $0 < \varepsilon < 1$. Fie $W = \prod_{j \in -N} S^{(j)}$, unde $S^{(j)} = S$ pentru fiecare $j \in N$ și pentru $c = (x_{-j})_{j \in N}$, $c' = (x'_{-j})_{j \in N}$ să punem

$$d(c, c') = \sum_{j \in N} \varepsilon^n d(x_{-j}, x'_{-j}).$$

Pentru distanța d spațiul W este un spațiu metric compact. Dacă u_x este aplicația lui W în W definită prin egalitatea

$$u_x(c) = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x),$$

unde $c = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0)$ și $u_{x_1}, \ldots, x_r$ este definită pentru orice $(x_1, \ldots, x_r) \in S^{[1, r]}$ prin egalitatea

$$u_{x_1, \ldots, x_r}(c) = u_{x_r}(u_{x_1, \ldots, x_{r-1}}(c)), \quad (c \in W)$$

atunci condițiile (i) și (ii) (p. 32) sînt evident verificate. Funcțiile $\varphi^n(c, x)$ cu proprietățile (7), (8) și (9) pot fi interpretate în acest caz ca densitățile probabilităților de trecere corespunzătoare unui lanț cu legături complete, pentru care mulțimea compactă S reprezintă mulțimea stărilor posibile.

§ 2. Lanțuri cu legături complete cu densități

În acest paragraf vom demonstra o teoremă ergodică privind densitățile probabilităților de trecere ale unui lanț cu legături complete de tipul (B). Teorema corespunde teoremei 1 din § 1, dar nu o conține.

1. Considerații generale. Fie $\{S, T, P\}$ un spațiu probabilizat, unde corpul borelian $\mathcal{T}$ conține toate părțile lui S de forma $\{x\}$, $x \in S$. Vom nota ca și în paragraful 1:

i) $W = \prod_{j \in -N} S^{(j)}$, unde $S^{(j)} = S$ pentru orice j;

(ii) pentru orice parte $I \subset N^*$, finită sau nefinită, $S^I = \prod_{j \in I} S^{(j)}$, unde $S^{(j)} = S$ pentru $j \in I$. Vom nota prin $\mathfrak{B}$ cel mai mic corp borelian de părți al produsului W care conține mulțimile $\prod_{j \in -N} A_j$, unde pentru fiecare $j \in -N$, $A_j \in T$ și pentru orice parte $I \subset N^*$, prin $\mathfrak{B}^I$ cel mai mic corp borelian de părți al produsului S^I care conține mulțimile de forma $\prod_{j \in I} A_j$, unde $A_j \in T$ pentru $j \in I$.

Pentru orice șir $(x_1, \ldots, x_n) \in S^{[1, n]}$ vom însemna prin $u_{x_1, \ldots, x_n}$ aplicația mulțimii W în W definită prin egalitatea

$$u_{x_1, \ldots, x_n}(c) = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n) \tag{16}$$

dacă $c = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0)$. Se verifică fără dificultate că pentru orice $A \in \mathfrak{B}$, $n \geqslant 1$ și $c \in W$

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid u_{x_1, \ldots, x_n}(c) \in A\} \in \mathfrak{B}^{[1,n]};$$

să remarcăm că pentru ca $u_{x_1, \ldots, x_n}$ să aibă această proprietate s-a impus corpului borelian $\mathfrak{T}$ să conțină toate părțile lui S de forma $\{x\}$ cu $x \in S$.

Fie acum $\varphi^1(c,x)$ o funcție numerică reală pozitivă și mărginită, definită pe $W \times S$ care are proprietățile:

(*I*) $\varphi^1(c,x)$ este $\mathfrak{B} \times T^*$) măsurabilă;

(*II*) Pentru orice $c \in W$

$$\int_S \varphi^1(c,x)\, dP(x) = 1;$$

(III) Pentru orice $n > 1$ să punem

$$\varphi^n(c,x) = \int_S \varphi^1(c,z)\, \varphi^{n-1}(u_z(c), x)\, dP(z).$$

Funcția $\varphi^n(c,x)$ poate fi definită prin integrala precedentă întrucît după cum se arată imediat prin recurența asupra lui n, pe baza proprietății (I), $\varphi(u_z(c), x)$ este T — măsurabilă și că pentru orice $n \geqslant 1$, $x \in S$ și $c \in W$ funcția de n variabile $\varphi^n(u_{x_1, \ldots, x_n}(c), x)$ este $\mathfrak{B}^{[1,n]}$ — măsurabilă.

Funcțiile

$$P^n(c, A) = \int_A \varphi^n(c,x)\, dP(x) \quad (A \in T,\ c \in W)$$

pot fi considerate ca probabilitățile de trecere corespunzătoare unui lanț cu legături complete; S reprezintă mulțimea stărilor posibile. Funcțiile $\varphi^n(c,x)$ sînt densitățile acestor probabilități. Le vom numi uneori densități de trecere.

La punctul următor vom folosi notația

$$\varphi^1(c \mid a_1, \ldots, a_l) = \varphi^1(c,a_1)\, \varphi^1(u_{a_1}(c), a_2) \ldots \varphi^1(u_{a_1, \ldots, a_{l-1}}(c), a_l)$$

pentru orice $(a_1, \ldots a_l) \in S^{[1,l]}$ și $c = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0) \in W$.

De asemenea vom utiliza în mod esențial formula

$$\varphi^{n+p}(c,x) = \int_{S^{[1,p]}} \varphi^1(c/x_1, \ldots, x_p)\, \varphi^n(u_{x_1, \ldots, x_p}(c), x)\, dP(x_1) \ldots dP(x_p) \quad (17)$$

valabilă pentru orice $n \geqslant 1$, $b \geqslant 1$, $c \in W$ și $x \in S$, extensiune a formulei de definiție a densităților $\varphi^n(c,x)$.

---

*) $\mathfrak{B} \times T$ este corp borelian de părți ale produsului $W \times S$ generat de mulțimile forma $A \times B$, unde $A \in \mathfrak{B}$ și $B \in T$.

Vom spune că un lanț cu legături complete cu densitățile de trecere $\varphi^1(c,x)$ este un lanț de tip (B) dacă oricare ar fi $c,c' \in W$, $x \in S$ și $(x_1, \ldots, x_s) \in S^{[1,s]}$ avem

$$\varphi^1(u_{x_1,\ldots,x_s}(c),\ x) = \varphi^1(u_{x_1,\ldots,x_s}(c'),\ x)(1 + \theta\,\varepsilon_s), \tag{18}$$

unde $|\theta| = |\theta(c,c',x,s)| \leqslant 1$ și

$$\varepsilon_s > 0,\quad \sum_{s \in N^*} \varepsilon < \infty, \tag{19}$$

Definiția dată mai sus corespunde definiției dată în § 1 pentru lanțuri cu legături complete de tipul (B) cu o infinitate numărabilă de stări. Lanțurile cu densități cu legături complete de tipul (B) conțin ca un caz particular lanțurile Markov, de ordin finit oarecare.

În cele ce urmează vom utiliza în mod esențial următoarea proprietate a densităților $\varphi^n(c,x)$ pe care ne mărginim să o enunțăm : *oricare ar fi* $n \geqslant 1$, $(x, \ldots, x_s) \in S^{[1,s]}$ cu $s \geqslant T$, $c,c' \in W$ și $x \in S$ avem

$$|\varphi^n(u_{x_1,\ldots x_s}(c),\ x) - \varphi^n(u_{x_1,\ldots x_s}(c'),\ x)| \leqslant \sum_{\mu \geqslant s} \varepsilon_\mu \tag{20}$$

2. Proprietăți ergodice ale densităților $\varphi^n(c,x)$. Un lanț cu legături complete definit prin densitățile $\varphi^1(c,x)$ satisface condiția (K), dacă există un $\lambda > 0$ care verifică inegalitatea

$$\varphi^1(c,x) \geqslant \lambda\,\varphi^1(c',x)$$

oricare ar fi $c,c' \in W$ și $x \in S$.

Să presupunem acum că avem un lanț cu legături complete de tipul (B) care satisface condiția (K) și luăm numărul T convenabil astfel încît să avem

$$\prod_{j \geqslant T}(1 - \varepsilon_j) \geqslant \frac{1}{2}\ ;$$

să punem $h = \dfrac{\lambda^T}{2}$. Atunci pentru un șir oarecare

$$(a\ ,\ \ldots,\ a_l) \in S^{[1,l]} \text{ și } c \in W \text{ avem}$$

$$\varphi^1(c \mid a_1,\ \ldots\ a_l) \geqslant h\ \varphi^1(c' \mid a_1,\ \ldots\ a_l). \tag{21}$$

Într-adevăr, dacă $l \leqslant T$ inegalitatea precedentă este evidentă întrucît $\lambda^l \geqslant \dfrac{\lambda^T}{2} = h$. Rămîne să studiem cazul $l > T$. Dar atunci

$$\varphi^1(c \mid a_1, \ldots, a_l) = \varphi^1(c \mid a_1, \ldots, a_T)\,\varphi^1(u_{a_1 \ldots a_T}(c)\ a_{T+1}, \ldots, a_l) \geqslant$$

$$\geqslant \lambda^T\,\varphi(a_1) \ldots \varphi(a_T)\,\varphi^1(u_{a_1,\ldots,a_T}(c)\ a_{T+1}\ \ldots, a_l).$$

Cum după egalitatea (18)

$$\varphi^1(u_{a_1,\ldots,a_T}(c)\ a_{T+1}, \ldots, a_l) \geqslant \prod_{\mu \geqslant T}(1 - \varepsilon_\mu)\,\varphi^1(u_{a_1 \ldots, a_T}(c') \mid a_{T-1}, \ldots, a_l)$$

deducem imediat inegalitatea căutată (21). Această inegalitate este valabilă. pentru orice $l \geqslant 1$.

Teorema 3. *Dacă un lanț cu legături complete de tipul* (B) *definit prin densitățile de trecere* $\varphi^1(c,x)$ *satisface condiția* (K), *atunci există un șir de numere* $(\eta(n))_{1 \leqslant n < \infty}$ *tinzînd către* 0 *și o funcție numerică reală* $\varphi^\infty(x)$ *definită pe* S, *care verifică inegalitățile*

$$|\varphi^n(c,x) - \varphi^\infty(x)| \leqslant \eta(n)$$

pentru orice $x \in S$, $c \in W$ și $n \geqslant 1$.

Demonstrație. Să punem pentru $n \geqslant 1$ și $x \in S$

$$\overline{\varphi}^n(x) = \sup_{c \in W} \varphi^n(c,x), \quad \underline{\varphi}^n(x) = \inf_{c \in W} \varphi^n(c,x).$$

Din (III) urmează imediat

$$\overline{\varphi}^{n'}(x) \geqslant \overline{\varphi}^{n''}(x) \geqslant \underline{\varphi}^{n''}(x) \geqslant \underline{\varphi}^{n'}(x), \quad n' \leqslant n''.$$

Acum după egalitatea (17)

$$\varphi^n(c',x) - \varphi^n(c'',x) =$$

$$= \int_{S^r} \varphi^r(c \mid y_1, \ldots, y_r)\, \varphi^{n-r}(u_{y_1 \ldots y_r}(c'), x)\, dP(y_1) \ldots dP(y_r) -$$

$$- \int_{S^r} \varphi^1(c'' \mid y_1, \ldots, y_r)\, \varphi^{n-r}(u_{y_1, \ldots, y_r}(c''), x)\, dP(y_i) \ldots dP(y_r) =$$

$$= \int_{S^r} (\varphi^1(c' \mid y_1, \ldots, y_r) - \varphi^1(c'' \mid y_1, \ldots, y_r))\, \varphi^{n-r}(u_{y_1, \ldots, y_r}(c'), x) dP(y_1) \ldots$$

$$\ldots dP(y_r) +$$

$$+ \int_{S^r} \varphi^1(c'' \mid y_1, \ldots, y_r)\, (\varphi^{n-r}(u_{y_1, \ldots, y_r}(c'), x) -$$

$$- \varphi^{n-r}(u_{y_1, \ldots, y_r}(c'')\, x))\, dP(y_1) \ldots dP(y_r)$$

Dacă $r \geqq T$ al doilea termen al sumei precedente este după inegalitatea (20) în valoarea absolută $\leqslant \sum_{\mu \geqq r} \varepsilon_\mu$.

Să punem

$$A(c',c'' \mid y_1 \ldots, y_r) = \varphi^1(c' \mid y_1, \ldots, y_r) - \varphi^1(c'' \mid y_1, \ldots, y_r)$$

și să notăm cu P mulțimea șirurilor $(y_1, \ldots, y_r) \in S^{[1,r]}$ pentru care $A(c',c'' \mid y_1, \ldots, y_r) \geqslant 0$, și cu Q mulțimea șirurilor $(y_1, \ldots, y_r) \in S$ pentru care $A(c',c'' \mid y_1, \ldots, y_r) < 0$. Este imediată egalitatea

$$\int_P A(c',c'' \mid y_1, \ldots, y_r)\, dP(y_1) \ldots dP(y_r) = \int_Q A(c',c'' \mid y_1, \ldots, y_r)\, dP(y_1) \ldots dP(y_r)$$

și deci valoarea comună o putem nota prin B. Acum

$$O \leqslant B = \int_P A(c',c'' \mid y_1,\ldots,y_r)\, dP(y_1)\ldots dP(y_r) \leqslant 1 -$$

$$-\int_P \varphi^1(c'' \mid y_1,\ldots,y_r)\, dP(y_1)\ldots dP(y_r)$$

și

$$O \leqslant B = \int_Q A\,(c',c'') \mid y_1,,\ldots,\ y_r)\, dP\,(y_1)\ldots dP\,(y_r) \leqslant$$

$$\leqslant 1 - \int_Q \varphi^1\,(c' \mid\ y_1,\ldots,y_r)\, dP(y_1)\ldots dP(y_r).$$

Din inegalitatea (21) deducem imediat că una din inegalitățile următoare este valabilă

$$\int_P \varphi^1\,(c'' \mid y_1,\ldots,y_r)\, dP\,(y_1)\ldots dP\,(y_r) \geqslant \frac{h}{2}\ ,$$

$$\int_Q \varphi^1\,(c' \mid\ y_1,\ldots,y_r)\, dP\,(y_1)\ldots dP\,(y_r) \geqslant \frac{h}{2}\ .$$

În amîndouă cazurile avem

$$B \leqslant \left(1 - \frac{h}{2}\right).$$

Acum dacă $B = 0$

$$\mid \varphi^n\,(c'x) - \varphi\,(c'',x) \mid \leqslant \sum_{\mu \geqslant h} \varepsilon_\mu.$$

Dacă $B > 0$ pentru orice $c',c'' \in W$ și $x \in S$ avem

$$\int_{P\cup Q} A\,(c',c'' \mid y_1,\ldots,y_r)\ \varphi^{n-r}\,(u_{y_1},\ldots,_{y_r}(c''),x)\, dP(y_1)\ldots dP(y_r) =$$

$$= B\left\{\frac{\int_P A\ \varphi^{n-r}}{B} - \frac{\int_Q \mid A \mid \varphi^{n-r}}{B}\right\} \leqslant (1 - \frac{h}{2} \mid \bar{\varphi}^{n-r}\,(x) - \underline{\varphi}^{u-r}\,(x) \mid .$$

Deci în orice caz

$$\mid \varphi^n\,(c',x) - \varphi^n\,(c'',x) \mid \leqslant \sum_{\mu \geqslant h} \varepsilon_\mu + \left(1 - \frac{h}{2}\right) \mid \bar{\varphi}^{n-r}\,(x) - \underline{\varphi}^{n-r}\,(x) \mid$$

de unde obținem

$$\mid \bar{\varphi}^n\ (x) - \underline{\varphi}\ n_{(x)} \mid \leqslant \sum_{\mu \geqslant h} \varepsilon_\mu + \left(1 - \frac{h}{2}\right) \mid \bar{\varphi}^{n-r}\,(x) - \underline{\varphi}^{n-r}\,(x) \mid$$

și deci

$$\bar{\varphi}^n(x) - \underline{\varphi}^n(x) \leqslant \frac{2}{h} \sum_{\mu \geqslant r} \varepsilon_\mu + \left(1 - \frac{h}{2}\right)^q .$$

pentru orice r suficient de mare și $< n$ și orice întreg $q > 1$ care verifică inegalitatea $qr < n$. În particular putem alege $q = \left[\frac{n}{r}\right] - 1$. Dacă $\varepsilon > 0$ este dat putem lua r_1 destul de mare astfel încît

$$\frac{2}{h} \sum_{\mu \geqslant r} \varepsilon_\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

Dacă

$$\left(1 - \frac{h}{2}\right)^{r_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

obținem

$$|\bar{\varphi}^n(x) - \underline{\varphi}^n(x)| \leqslant \varepsilon$$

pentru $n > q_1 r_1 + 1$, ceea ce demonstrează teorema noastră.

Observația 1. Teorema demonstrată mai sus conține ca un caz particular teoremele demonstrate de Hostinsky [13] și Gh. Mihoc [14]. Rezultatele pot fi de asemenea comparate cu rezultatele obținute de R. Fortet [2] în teza sa pentru densitățile de trecere ale unui lanț Markov.

Observația 2. Se pot face evaluări pentru termenii șirului $\eta\ (n)_{1 \leqslant n < \infty}$ asemănătoare cu cele din observația 1, care urmează teoremei 1 din § 1.

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ЦЕПЕЙ С ПОЛНЫМИ СВЯЗЯМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Целью работы является доказательство ряда свойств цепей с полными связями.

В первой главе исследуется некоторая категория цепей с полными связями, со счетной бесконечностью возможных состояний, которые автор называет цепями типа (B).

Сначала доказывается при естественных условиях, что вероятности перехода $P_A^n(c)$, соответствующие цепи и рассматриваемой категории, стремятся при $n \to \infty$ к пределу, независимому от начального пути c. Получаются также точные оценки разности $P_A^n(c) - P_A$, примененные во второй части первой главы.

Далее доказывается для последовательности случайных переменных $(f_n)_1 \leqslant n < \infty$, образующих цепь с полными связями (теорема Гаусса-Лапласа)

$$P\left(\frac{f_1 + \ldots + f_n}{\sigma\sqrt{n}} < a\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{\frac{u^2}{2}}\, du \qquad (*)$$

Во второй главе исследуются цепи с полными связями, для которых множества возможных состоянии представляют собой компактные метрические пространства и для которых вероятности перехода $P^n(c, A)$ могут быть выражены плотностями $\varphi^n(c, x)$.

Пользуясь различными эргодическими теоремами, действительными для компактных операторов, автор получает спектральное представление плотностей $\varphi^n(c, x)$, что дает возможность немедленно получать эргодические свойства этих плотностей, а следовательно, и вероятностей $P^n(c, A)$.

В заключение вводится новая категория цепей с полными связями с плотностями и доказывается для этих цепей эргодическая теорема, соответствующая теореме, доказанной в первой главе для цепей со счетной бесконечностью состояний,

PROPRIÉTÉS ERGODIQUES DE CERTAINES CHAÎNES AUX LIAISONS COMPLÈTES

(RÉSUMÉ)

Le travail a pour objet la démonstration d'un certain nombre de propriétés concernant les chaînes aux liaisons complètes.

Dans le premier chapitre on étudie une catégorie de chaînes aux liaisons complètes ayant une infinité dénombrable d'états possibles, que l'auteur dénomme chaînes du type (B).

On démontre en premier lieu, dans des conditions naturelles, que les probabilités de passage $P_A^n(c)$ correspondant à une chaîne de la catégorie considérée, tendent pour $n \to \infty$ vers une limite P_A, indépendante du chemin initial c. On obtient aussi des évaluations précises de la différence $P_A^n(c) - P_A$ qui seront utilisées dans la seconde partie du premier chapitre.

Puis, on démontre le théorème de Gauss-Laplace pour la suite de variables aléatoires $(f_n)_1 \leqslant n < \infty$ qui forment une chaîne aux liaisons complètes

$$P\left(\frac{f_1 + \ldots + f_n}{\sigma\sqrt{n}} < a\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{\frac{u^2}{2}}\, du. \qquad (**)$$

*) При написании этой формулы предполагается, что

$$M(f_i) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots,$$

**) On suppose la sériation de cette formule.

Dans le second chapitre, on étudie les chaînes aux liaisons complètes dont les ensembles d'états possibles sont des espaces métriques compacts et dont les probabilités de passage $P^n(c,A)$ peuvent s'exprimer par des densités $\varphi^n(c,x)$.

Utilisant différents théorèmes ergodiques valables pour les opérateurs compacts, l'auteur obtient la représentation spectrale des densités $\varphi^n(c,x)$ ce qui permet d'obtenir immédiatement des propriétés ergodiques de ces densités et par conséquent aussi des probabilités $P^n(c,A)$.

Dans le dernier paragraphe on introduit une nouvelle catégorie de chaînes aux liaisons complètes avec des densités et l'on démontre pour ces chaînes un théorème ergodique correspondant au théorème démontré dans le premier chapitre pour des chaînes ayant une infinité dénombrable d'états.

BIBLIOGRAFIE

1. O. Onicescu et Gh. Mihoc, *Sur les chaînes de variables statistiques.* Bull. Sci. Math., 1935, t. 59, p. 174.
2. R. Fortet, *Sur l'itération des substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables et leurs applications à la théorie de probabilité en chaîne.* Thèse, Paris, 1938.
3. W. Doeblin et R. Fortet, *Sur les chaînes à liaisons complètes.* Bull. Soc. Math. France, 1937, t. 65.
4. W. Doeblin, *Remarques sur la théorie métrique des fractions continues.* Compositio Math., 1940, vol. 7, p. 353.
5. G. Ciucu, *Lanțuri cu legături complete de tipul (B).* Comunicările Acad. R.P.R., t. I, nr. 6, 1951, p. 455.
6. — *Lanțuri cu legături complete cu densitate.* Comunicările Acad. R.P.R., t. IV. nr. 7—8, 1954, p. 345.
7. J. L. Doob, *Stochastic Processes.* John Wiley § Son, London, Chapman § Hell, 1953.
8. C. T. Ionescu Tulcea, *Mesures dans les espaces produits.* Atti della Acad. Naz. dei Lincei, 1949, vol. VII, fasc. 5.
9. N. Bourbacki, *Topologie générale.* Fasc. 916, p. 122.
10. A. Kolmogoroff, *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Math. Ann., 1930, t. 104, p. 415.
11. S. Bernstein, *Théorème limite du calcul de probabilités.* Math. Ann., 1926, t. 97, p. 3.
12. C. T. Ionescu Tulcea et Gh. Marinescu, *Théorie ergodique pour des classes d'opération non complètement continues.* Ann. of. Math., 1950, t. 52.
13. B. Hostinsky, *Sur les probabilités relatives aux variables aléatoires liées entre elles. Applications diverses.* Ann. Inst. H. Poincaré, 1937, t. VII.
14. Gh. Mihoc., *Asupra proprietăților generale ale variabilelor statistice înlănțuite.* Teză, Universitatea din București, 1934.
15. O. Onicescu, *Les applications de l'idée de chaîne statistique.* XXIII^{-e} Session de l'Institut international de statistique, Athènes, 1936, p. 3.
16. W. Doeblin, *Sur les propriétés asimptotiques des mouvements régis par certains types de chaînes simples.* Thèse, Bull. Math. de la Soc. Roum. des Sci., 1937.
17. O. Onicescu, *Théorie générale des chaînes à liaisons complètes.* Act. Scient. 737, Paris, 1937.
18. O. Onicescu et Gh. Mihoc, *La dépendance statistique.* Act. Scient. 503, Paris, 1937.
19. R. Fortet, *Sur une suite également répartie.* Stud. Math., 1940, t. 9, p. 54.
20. O. Onicescu et Gh. Mihoc. *Comportement asymptotique des chaînes à liaisons complètes.* Disq. Math. et. Phy. 1940, t. I. p. 61.
21. C. T. Ionescu Tulcea et Gh. Marinescu, *Sur certaines chaînes à liaisons complètes.* C. R., Paris, 1948, t. 227, p. 667.
22. C. T. Ionescu Tulcea, *O teoremă ergodică.* Comunicările Acad. R.P.R. t. I, nr. 1, 1951, p. 23.

23. S. Karlin, *Some Random Walksarising in Learning Models.* Pacific I. Math., 1953, t. 3, p. 725.
24. O. Onicescu, *Procese aleatoare în lanț continuu cu legături complete.* Revista Universității „C. I. Parhon," nr. 45, 1954, p. 73.
25. T. E. Harris, *On Chaines of Infinite Order.* Pacific J. of Math., 1955, vol. 5.
26. S. Banach, *Théorie des opérations linéaires.* Varșovia, 1932.
27. A. Blanc-Lappierre et R. Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires.* Messa, Paris, 1953.
28. M. Fréchet, *Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles.* Paris, 1938.
29. P. Halmos, *Teoria Meri.* Moscova, 1953.
30. M. Loève, *Etude asymptotique des sommes de variables aléatoires liées.* Journ. de Math. pures et appl., 1945, t. 24.
31. G. Marinescu, *Operații relativ complet continue.* Studii și cercetări matematice, t. II, nr. 1—2, 1951, p. 107.
32. O. Onicescu, Gh. Mihoc și C. T. Ionescu Tulcea, *Calculul probabilităților și aplicații.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1956.
33. O. Onicescu, *Calculul probabilităților.* Ed. tehnică, București, 1956.
34. K. Yosida a S. Kakutani, *Operator Teoretical Treatement of Markoff Process and Mean Ergodic Theorem.* Ann. of. Math., 1941, t. 42, p. 188.

DETERMINAREA TRANSFORMĂRILOR PUNCTUALE DE SPEȚĂ TREI

DE

G. G. VRĂNCEANU

Într-o lucrare anterioară [1] am determinat conexiunea spațiilor A_2 de speță trei, în cazul cînd curbele caracteristice sînt paralele cu una din axe, precum și în cazul cînd nu sînt paralele cu una din axe dar conexiunea contractată este nulă sau, altfel spus, cînd determinantul funcțional al transformării este constant.

În lucrarea de față determinăm transformările punctuale corespunzătoare deci soluțiile sistemului complet integrabil [2]

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^s_{jk} \frac{\partial u^i}{\partial x^s} = 0, \qquad (i,\ j,\ k = 1,2). \tag{1}$$

1. Dacă curbele caracteristice sînt paralele cu una din axe, am arătat [1] că avem două cazuri. În primul caz, u^1, u^2 sînt soluții independente ale sistemului

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x+\psi} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{\psi'}{x+\psi} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{x+\psi} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + [(x+\psi)\Phi - \psi''] \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\psi'}{x+\psi} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

unde ψ și Φ sînt funcții de y.

În al doilea caz, u^1, u^2 sînt soluții independente ale sistemului

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\psi'}{\psi}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\psi''}{\psi}x + F\right)\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\psi'}{\psi}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Prima din ecuațiile (2) se poate scrie printr-o cuadratură sub forma

$$\log \frac{\partial u}{\partial x} + \log (x + \psi)^2 = \log g\,(y).$$

deci avem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{g(y)}{[x + \psi(y)]^2}$$

ceea ce ne arată că u este de forma

$$u = -\frac{g(y)}{x + \psi(y)} + h(y). \tag{4}$$

Dacă introducem u în a doua ecuație (2) avem

$$h' = 0$$

deci h este o constantă.

Dacă ținem seama de u din formula (4) în ultima ecuație (2) rezultă

$$g'' - g\,\Phi = 0. \tag{5}$$

Pentru a obține două soluții independente, u^1, u^2, trebuie să luăm două soluții independente g_1, g_2 ale ecuației (5).

Transformarea de variabile este deci de forma

$$u^1 = -\frac{g_1}{x + \psi},$$

$$u^2 = -\frac{g_2}{x + \psi}. \tag{6}$$

Într-adevăr, se constată ușor că determinantul funcțional $\frac{D(u^1, u^2)}{D(x, y)}$ este diferit de zero dacă g_1, g_2 sînt două soluții independente ale ecuației (5).

Să trecem acum la integrarea sistemului (3)

Din prima ecuație (3) rezultă

$$u = A(y)\, x + B(y).$$

Dacă introducem în a doua ecuație (3) avem

$$A'(y) + \frac{\psi'}{\psi} A(y) = 0.$$

Dacă ψ nu este constant atunci nici A nu este constant și obținem

$$A = \frac{b}{\psi},$$

unde b este o constantă arbitrară diferită de zero, deci u este dat de formula

$$u = \frac{b}{\psi(y)} x + B(y).$$

Observăm în primul rînd că sistemul (3) admite o soluție particulară independentă de x. Dacă luăm această soluție particulară sub forma

$$u^2 = H(y)$$

atunci ultima ecuație (3) ne spune că trebuie să avem

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{H'}}. \tag{7}$$

Rezultă atunci că putem lua ca soluții ale sistemului (3):

$$\begin{aligned} u^1 &= x\sqrt{H'} + G(y), \\ u^2 &= H(y). \end{aligned} \tag{8}$$

iar F este dat de formula

$$F = \frac{H''G' - H'G''}{(H')^{3/2}} \tag{9}$$

cum se poate verifica imediat.

Dacă H este o funcție liniară de y, atunci ψ este o constantă.

Transformarea de variabile este de forma

$$\begin{aligned} u^1 &= x + G(y) \\ u^2 &= y \end{aligned} \tag{10}$$

caz deja considerat de prof. G. Vrănceanu [3].

Avem deci următoarea teoremă:

Transformările punctuale de speță trei cu liniile caracteristice paralele cu axa x sînt date de formulele (6) *și* (8).

2. Dacă curbele caracteristice nu sînt paralele cu una din axe şi conexiunea contractată e nulă u^1, u^2 sînt două soluţii independente ale sistemului

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{p^2}{q}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial x} - p\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{q^2}{p}\frac{\partial u}{\partial x} - q\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

unde p şi q sînt derivatele lui z definite de formula

$$y = x\,a(z) + b(z). \tag{11'}$$

Din formulele (11) se observă că rezultă următoarele combinaţii:

$$\begin{aligned} p\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} &= q\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ q\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} &= p\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Să notăm atunci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = w. \tag{12'}$$

În acest caz formulele (12) se scriu

$$\begin{aligned} p\frac{\partial v}{\partial y} &= q\frac{\partial v}{\partial x}, \\ p\frac{\partial w}{\partial y} &= q\frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ţinînd seama că p şi q sînt derivatele lui z, formulele (13) devin

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Prima din aceste formule ne spune că determinantul funcţional al lui z şi al lui v este nul, iar a doua că determinantul funcţional al lui z şi w este nul. Rezultă deci că v şi w sînt funcţii de z.

Deci, să notăm ţinînd seama de formulele (12'),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi(z), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \psi(z), \end{aligned} \tag{15}$$

și să le introducem în formulele (11). Obținem

$$\begin{aligned} &\varphi' p + p\varphi - \frac{p^2}{q}\psi = 0 \\ &\psi' p + q\varphi - p\psi = 0 \\ &\psi' q + \frac{q^2}{p}\varphi - q\psi = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

sau

$$\begin{aligned} &\varphi' + \varphi - \frac{p}{q}\psi = 0, \\ &\psi' + \frac{q}{p}\varphi - \psi = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Ținînd seama de formula (11′) avem

$$\begin{aligned} p &= -\frac{a}{a'x + b'} \\ q &= \frac{1}{a'x + b'} \end{aligned} \tag{18}$$

care introduse în ecuațiile (17) ne dau, ținînd seama că a este diferit de zero,

$$\begin{aligned} &\varphi' + \varphi + a\psi = 0, \\ &\psi' - \frac{1}{a}\varphi - \psi = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Condițiile de integrabilitate ale ecuațiilor (15) ne dau

$$\varphi' = -a\psi'. \tag{20}$$

Înlocuind (20) în ecuațiile (19) acestea din urmă se reduc la o singură ecuație :

$$a(\psi - \psi') + \varphi = 0. \tag{21}$$

Dacă derivăm această ecuație și dacă ținem seama de formula (20) avem

$$\psi'' = \frac{a'}{a}(\psi - \psi'), \tag{22}$$

unde variabila independentă este z.

Deci integrarea sistemului (11) depinde de integrarea acestei ecuații de ordinul doi liniară și omogenă.

Să facem substituția

$$\psi = e^{\int \alpha dz}.$$

În acest caz ecuația (22) devine

$$\alpha' = -\alpha^2 + \frac{a'}{a}(1-\alpha)$$

care este de tip Ricatti.

Rezultă următoarea teoremă :

Determinarea transformărilor punctuale de speță trei cînd curbele caracteristice nu sînt paralele cu una din axe, însă determinantul funcțional al transformării este constant, depinde în general de integrarea ecuației (22) *deci de integrarea unei ecuații de tip Ricatti.*

Dacă ψ_1, ψ_2 sînt două soluții independente ale ecuației (22) și φ_1, φ_2 soluțiile corespunzătoare date de ecuația (21), soluțiile corespunzătoare sistemului (15) sînt definite de ecuațiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^1}{\partial x} &= \varphi_1, \quad \frac{\partial u^1}{\partial y} = \psi_1, \\ \frac{\partial u^2}{\partial x} &= \varphi_2, \quad \frac{\partial u^2}{\partial y} = \psi_2. \end{aligned} \tag{23}$$

Transformarea dată de formulele :

$$u^1 = u^1(x,y), \quad u^2 = u^2(x,y) \tag{24}$$

are determinantul funcțional constant și diferit de zero. În adevăr, acest determinant se scrie, ținînd seama de (23),

$$\frac{D(u^1,u^2)}{D(x,y)} = \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$$

sau dacă ținem seama de formula (21) avem

$$\frac{D(u^1,u^2)}{D(x,y)} = a(\psi_1'\psi_2 - \psi_1\psi_2'), \tag{24'}$$

unde membrul al doilea este diferit de zero deoarece a este diferit de zero, iar $\psi_1'\psi_2 - \psi_1\psi_2'$ este wronskianul soluțiilor independente ψ_1, ψ_2 ale ecuației (22). Derivînd formula (24') și ținînd seama de (22) rezultă că determinantul funcțional al transformării (24) este constant.

Rezultă deci următoarea teoremă :

Fiind date două soluții independente ψ_1, ψ_2 *ale ecuației* (22), *determinarea transformării punctuale* (24) *depinde de integrarea sistemului cu diferențiale totale* (23), *unde z este definit de ecuația* (11').

Din formulele (22) se vede că există un caz particular cînd $a = \text{const.}$ care se reduce, printr-o schimbare de variabilă, la cazul (10) considerat de prof. G. Vrănceanu.

3. Să considerăm, de asemenea, cazul particular

$$\frac{a'}{a} = k \text{ și } b(z) = 0 \tag{25}$$

unde k este o constantă nenulă. Rezultă că avem

$$a = e^{kz}. \tag{25'}$$

Deci ecuația (11') devine

$$y = e^{kz} x. \tag{26}$$

Rezolvînd în raport cu z avem

$$z = \frac{1}{k} \log \frac{y}{x}. \tag{27}$$

Ținînd seama de (25) ecuația (22) se scrie

$$\psi'' = k(\psi - \psi'). \tag{28}$$

Avem prin urmare, o ecuație diferențială de ordinul doi cu coeficienți constanți omogenă a cărei ecuație caracteristică este

$$r^2 + kr - k = 0. \tag{29}$$

Vom considera numai cazul cînd ecuația (29) are rădăcini reale. Dacă avem rădăcini reale și distincte, relațiile (23) relative la u^1 se scriu sub forma

$$\frac{\partial u^1}{\partial y} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{r_1}{k}}, \quad \frac{\partial u^1}{\partial x} = (r_1 - 1)\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{r_1+k}{k}}. \tag{30}$$

Integrala acestui sistem este următoarea

$$u^1 = r_1 y^{r_1} x^{-\frac{r_1}{k}}. \tag{31}$$

Evident că avem o formulă analogă pentru u^2

$$u^2 = r_2 y^{r_2} x^{-\frac{r_2}{k}}. \tag{32}$$

Ținînd seama că r_1 și r_2 sînt soluțiile ecuației (29) avem

$$r_1 + r_2 = -k, \; r_1 r_2 = -k. \tag{33}$$

deci putem scrie formulele (31) și (32) sub forma

$$u^1 = r_1 y^{r_1} x^{\frac{1}{r_2}}, \; u^2 = r_2 y^{r_2} x^{\frac{1}{r_1}} \tag{34}$$

și constituie transformări considerate deja de B o r u v k a. Eliminînd k din formulele (33) obținem

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = -1. \tag{35}$$

Rezultă deci următoarea teoremă :

Formulele (34) *pentru care* r_1 *diferit de* r_2 *sînt legate de condiția* (35), *reprezintă o transformare punctuală de speța a treia, cu determinant funcțional constant, depinzînd de o constantă arbitrară, pentru care curbele caracteristice nu sînt paralele cu una din axele coordonate.*

De altfel ecuația curbelor caracteristice se scrie în acest caz sub forma

$$y = C\,x, \tag{36}$$

unde C este o constantă arbitrară nenulă.

Să considerăm acum cazul cînd rădăcinile sînt confundate deci cazul în care avem

$$k\,(k+4) = 0.$$

Cum presupunem $k \neq 0$ rezultă $k = -4$ și ecuația (29) devine

$$r^2 - 4r + 4 = 0. \tag{37}$$

Cele două rădăcini ale ecuației (37) ne dau

$$\psi_1 = e^{2z}, \quad \psi_2 = z\,e^{2z},$$

iar valorile corespunzătoare pentru φ_1, φ_2 din ecuația (21) sînt

$$\varphi_1 = e^{-2z}, \quad \varphi_2 = e^{-2z}\,(1+z).$$

În acest caz sistemul (23) relativ la funcția u^1 devine

$$\frac{\partial u^1}{\partial y} = \sqrt{\frac{x}{y}}, \quad \frac{\partial u^1}{\partial x} = \sqrt{\frac{y}{x}}. \tag{38}$$

Integrînd se obține

$$u^1 = 2\sqrt{xy} + C,$$

unde C este o constantă pe care putem s-o luăm egală cu zero.

Acum să considerăm sistemul (23) în funcția u^2 care ne dă

$$\frac{\partial u^2}{\partial y} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y}}\log\frac{y}{x}, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x} = \sqrt{\frac{y}{x}}\left(1 - \frac{1}{4}\log\frac{y}{x}\right). \tag{39}$$

Pentru a integra acest sistem vom face schimbarea de variabilă

$$x = u, \quad \frac{y}{x} = v^2.$$

Ținînd seama că diferențiala lui u^2 este dată de formula

$$du^2 = \frac{\partial u^2}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u^2}{\partial y}\,dy$$

avem în noile variabile :

$$du^2 = v\,(1 - \log\, v)\,du - u \log\, v\, dv,$$

unde

$$\frac{\partial u^2}{\partial u} = v(1 - \log v), \qquad \frac{\partial u^2}{\partial v} = u \log v.$$

Integrînd acest sistem se obține

$$u^2 = uv\,(1 - \log\, v).$$

Revenind la vechile variabile obținem

$$u^2 = \sqrt{xy}\left(1 - \frac{1}{2}\log\frac{y}{x}\right). \tag{40}$$

Deci transformarea de variabile este dată de formulele

$$u^1 = 2\sqrt{xy},\ u^2 = \sqrt{xy}\left(1 - \frac{1}{2}\log\frac{y}{x}\right). \tag{41}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе автор определяет точечные преобразования локально евклидова пространства с аффинной связностью A_2 третьего рода для случая, когда характеристические кривые являются параллельными одной из осей, а также для случая, когда они не являются параллельными одной из осей, причем полученная связность — нулевая.

В первом случае точечные преобразования даны формулами (6), (8) и (10).

Во втором случае определение точечных преобразований третьего рода зависит от интегрирования уравнения типа Рикатти или уравнения (22).

DÉTERMINATION DES TRANSFORMATIONS PONCTUELLES D'ESPÈCE TROIS

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, l'auteur détermine les transformations ponctuelles d'un espace à connexion affine, localement euclidien, A_2 d'espèce trois lorsque les courbes caractéristiques sont parallèles à l'un des axes, ainsi que dans le cas où elles ne sont pas parallèles à l'un des axes, la connexion contractée étant nulle.

Dans le premier cas, les transformations ponctuelles sont données par des formules (6), (8) et (10).

Dans le deuxième cas, la détermination des transformations ponctuelles, d'espèce trois, dépend de l'intégration d'une équation de type Ricatti ou de l'équation (22).

BIBLIOGRAFIE

1. G.G. Vrănceanu, *Determinarea spațiilor cu conexiune afină local euclidiene de speță trei.* Revista Universității „C.I. Parhon", t. 7, 1957, p. 43—48.
2. G. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială.* Ed. Acad., R.P.R., București, 1951, vol. II, p. 350—351.
3. — *Les transformations crémoniennes entières et les espaces à connexion affine.* C.R., Paris, 1956, t. 243, p. 1957.

CARACTERIZAREA STRUCTURILOR MODULARE PRIN SISTEME CU AXIOME INDEPENDENTE

DE

DRAGOŞ VAIDA

Dacă se definesc anumite structuri particulare, adăugînd la sistemul de axiome pentru structuri

$$x \cap x = x, \tag{1}$$

$$x \cup x = x, \tag{2}$$

$$x \cap y = y \cap x, \tag{3}$$

$$x \cup y = y \cup x, \tag{4}$$

$$x \cap (x \cup y) = x, \tag{5}$$

$$x \cup (x \cap y) = x, \tag{6}$$

$$(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z), \tag{7}$$

$$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z), \tag{8}$$

altele noi, se obţin sisteme de axiome, care pot fi considerabil simplificate în ceea ce priveşte numărul identităţilor şi expresiile lor. Acest fapt a fost recunoscut pentru structurile distributive cu ultim element [1], [2], pentru structurile distributive cele mai generale, caracterizate în [3] prin următorul sistem de axiome

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} x \cap (x \cup y) = x \\ z \cap (y \cup x) = (x \cap z) \cup (y \cap z) \end{cases}$$

şi pentru structurile modulare [4]. În [4] se arată că structurile modulare pot fi definite prin

$$[\, x \cup (\, y \cap y) \,] \cap y = y,$$

$$[(\, v \cap x) \cap y \,] \cup (v \cap z) = [(z \cap x) \cup (y \cap x)] \cap x.$$

Aici se consideră din nou cazul structurilor modulare și se enunță două sisteme cu axiome independente; prin ΣN se va înțelege exemplul în care numai axioma N din șirul de axiome considerat nu se verifică.

Este de observat că în teoremele care se dau structurile modulare sînt definite prin verificarea unei relații (definiția 1):

$$x \lambda z \Longrightarrow x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z. \tag{9}$$

Definiția lui A. G. Curoș sau definiția dată prin condiția ca între cîturile $u \cup v/u$, $v/u \cap v$ conexiunea monotonă să fie perfectă [5] nu intervin. Este probabil ca noi caracterizări să se poată da, folosind una sau alta din aceste definiții.

1. Pentru teorema 1 un rol important îl joacă relația λ introdusă prin

Definiția 1. *Dacă* Σ *este un sistem algebric cu două operații* $\cap$ *și* $\cup$ *se definește*

$$x \lambda y \Longleftrightarrow x \cap y = x.$$

Propoziția 1. *Dacă* Σ *este un sistem algebric cu două operații* $\cap$ *și* $\cup$ *care satisfac axiomele* (1) *și* (3), *atunci relația* λ *este reflexivă și antisimetrică.*

Propoziția 2. *Dacă* Σ *este un sistem algebric cu două operații* $\cap$ *și* $\cup$ *care satisfac axiomele* (3) — (6), *atunci*

$$x \lambda y \Longleftrightarrow x \cup y = y.$$

Propoziția 3. *Dacă* Σ *este un sistem algebric cu două operații* $\cap$ *și* $\cup$ *care satisfac axiomele* (1), (3) — (5) *și* (9), *atunci următoarele afirmații sînt echivalente*:

(i) λ tranzitivă;
(ii) Σ satisface relația (7);
(iii) Σ satisface relația (8).

Se observă că (6) are loc căci

$$x \cup (x \cap y) = (3) = x \cup (y \cap x) = (1), \ (9) = (x \cup y) \cap x =$$
$$= (3) = x \cap (x \cup y) = (5) = x.$$

Din (1) și (6) rezultă (2). Este suficient să se demonstreze că (i)$\Longleftrightarrow$(iii). Cu (4) și (5) se deduce

$$x \lambda x \cup y, \qquad y \lambda x \cup y. \tag{10}$$

Însă

$$x \lambda u, \ y \lambda u \Longrightarrow x \cup y \lambda u. \tag{11}$$

Într-adevăr,

$$(x \cup y) \cap u = (9) = x \cup (y \cap u) = x \cup y.$$

Fie (i) adevărată

$$a = (x \cup y) \cup z, \quad b = x \cup (y \cup z). \tag{12}$$

Din (10) urmează $x \cup y \lambda a$, $z \lambda a$ și $x \lambda x \cup y$, $y \lambda x \cup y$. Deci $x \lambda a$, $y \lambda a$, $z \lambda a$, deci în virtutea lui (11), $b \lambda a$. Analog $a \lambda b$, deci în virtutea propoziției 1 rezultă (8).

Fie (iii) adevărată. Dacă $u \lambda v$ și $v \lambda w$, atunci în virtutea propoziției 2 avem $u \cup v = w$ și $v \cup w = w$ deci

$$w = v \cup w = (u \cup v) \cup w = (iii) = u \cup (v \cup w) = u \cup w$$

deci în virtutea aceleiași propoziții $u \lambda w$, deci (i) este adevărată.

Pentru ca un sistem algebric cu două operații $\cap$ și $\cup$ care satisfac axiomele (1), (3) — (5) și (9) să fie o structură modulară este necesar și suficient ca (8) să aibă loc.

Corolarul 1. *Pentru ca un sistem algebric* Σ *cu două operații* $\cap$ *și* $\cup$ *care satisfac relațiile* (1), (3) — (5) *și* (9) *să nu fie o structură modulară este necesar și suficient să existe* α, β, $\gamma \in \Sigma$ *cu* $\alpha \lambda \beta$, $\beta \lambda \gamma$ *și* $\alpha \bar{\lambda} \gamma$ ($\bar{\lambda} =$ non λ).

2. Definiția 2. *Dacă* Σ *este un sistem algebric cu două operații* $\cap$ *și* $\cup$ *se definește* $x \mu z$, *ca având loc dacă cel puțin una din condițiile*

$$x = z$$
$$x = z' \cap z$$
$$x = z \cap z'$$
$$z = z' \cup x$$

este satisfăcută.

Propoziția 4. *Dacă* Σ *este un sistem algebric cu două operații* $\cap$ *și* $\cup$ *care satisfac axiomele* (1), (3) — (5) *și* (9), *atunci relațiile* λ *și* μ *sînt echivalente.*

Teorema 1. *Dacă* S *este un sistem algebric cu două operații* $\cap$ *și* $\cup$ *care satisfac*

$$(I_1) \qquad x \cap [(x \cup y) \cup z] = x$$

$$(I_2) \qquad x \mu z \Longrightarrow z \cap (y \cup x) = x \cup (y \cap z)$$

atunci S *este o structură modulară. Axiomele sînt independente.*

Se vede că

$$x = (I_1) = x \cap [(x \cup y) \cup x] = (I_2) = x \cup [(x \cup y) \cap x]$$

deci

$$x \cup y = \{x \cup [(x \cup y) \cap x]\} \cup y.$$

În virtutea lui (I_1) rezultă (5).

Apoi

$$x \cup (x \cap x) = (I_2) = x \cap (x \cup x) = (5) = x \tag{13}$$

deci

$$x \cap x = x \cap [x \cup (x \cap x)] = (5) = x$$

deci (1) este satisfăcută. Din (13) și (1) rezultă (2).

Avem

$$x \cup y = (1) = (x \cup y) \cap (x \cup y) = (I_2) = y \cup [x \cap (x \cup y)].$$

În virtutea lui (5) rezultă (4).

Mai departe

$$x \cup (x \cap y) = (4),\ (1) = (x \cap y) \cup (x \cap x) = (I_2) = \\ = x \cap [x \cup (x \cap y)\ ].$$

În virtutea lui (5) rezultă (6).

Atunci

$$x \cap y = (2) = (x \cap y) \cup (x \cap y) = (I_2) = y \cap [x \cup (x \cap y)\ ].$$

Ținînd seama de (6) rezultă (3).

Cu propoziția 4 se deduce $(I_2) \Longleftrightarrow (9)$.

Din (5), (4) și (I_1) se deduce

$$x \cap b = x \quad y \cap b = y \quad z \cap b = z. \tag{14}$$

Atunci

$$a = (14) = [x \cup (y \cap b)] \cup z = (9) = [(x \cup y) \cap b] \cup z = (4) = \\ = z \cup [(x \cup y) \cap b] = (9),\ (4) = a \cap b$$

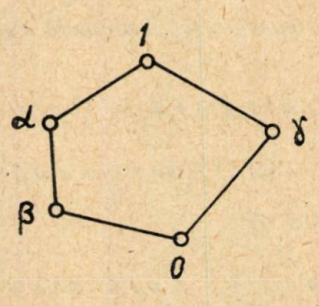
și analog $b = b \cap a$. Din (3) urmează (8). Concluzia se deduce din corolarul 1.

Pentru a demonstra independența axiomelor se pot alege exemple cu un număr minim de elemente. Este suficient să se considere ΣI_1 dat de

$\cap$	α	β
α	α	α
β	α	β

$\cup$	α	β
α	α	α
β	α	β

și ΣI_2 dat de



Exemplul al doilea este cu un număr minim de elemente dacă S este o structură.

Observația 1. Sistemul de axiome propus în [3] este constituit din (I). Asemănarea dintre (I) și (I_1), (I_2) este evidentă.

Se poate pune problema dacă păstrînd axioma (I_2), prima condiție nu poate fi slăbită.

P r o p o z i ț i a 5. *Se poate defini un sistem algebric* Σ *cu două operații* $\cap$ *și* $\cup$ *care satisface axiomele* (1), (3) — (5) *și* (9), *cu un număr minim de elemente și astfel încît* Σ *să nu fie o structură modulară.*

Din corolarul 1 rezultă că $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ deci Σ conține cel puțin trei elemente. Evident $\alpha \cap \beta = \alpha$, $\beta \cap \gamma = \beta$ și $\alpha \cap \gamma \neq \alpha$. Dacă $\alpha \cap \gamma = \beta$ ar rezulta $\beta \cup \alpha = \alpha$ deci $\beta \lambda \alpha$, conform propoziției 2. Conform propoziției 1, $\alpha - \beta$ și deci $\alpha \cap \gamma = \alpha$. Dacă $\alpha \cap \gamma = \gamma$, atunci

$$\alpha = (3),\ (\text{prop. } 2) = \gamma \cup \alpha = \gamma \cup (\alpha \cap \beta) = (3) = \gamma \cup (\beta \cap \alpha) =$$
$$= (3),\ (9) = (\gamma \cup \beta) \cap \alpha = (4) = (\beta \cup \gamma) \cap \alpha =$$
$$= (\text{prop. } 2) = \gamma \cap \alpha = (3) = \alpha \cap \gamma = \gamma.$$

Deci $\alpha = \gamma$, deci $\alpha \cap \gamma = \alpha$, ceea ce nu se poate. Deci

$$\alpha \cap \gamma = 0$$

este distinct de α, β, γ.

Dacă $\alpha \cup \gamma = \alpha$, sau $\alpha \cup \gamma = \gamma$ ar rezulta $\alpha \cap \gamma = \gamma$, sau $\alpha \cap \gamma = \alpha$. Dacă $\alpha \cup \gamma = \beta$ ar rezulta $\gamma \cap \beta = \gamma$ deci $\beta = \gamma$ deci $\alpha \cap \gamma = \alpha$. Dacă $\alpha \cup \gamma = 0$, atunci $\alpha \cap 0 = \alpha$ deci $\alpha \lambda 0$. Însă, $\alpha \cup 0 = \alpha$ deci $0 \lambda \alpha$. Deci

$$\alpha \cup \gamma = 1$$

este distinct de α, β, γ, 0. Rezultă, în particular, că Σ conține cel puțin cinci elemente.

Dacă se ia

$\cap$	α	β	γ	0	1
α	α	α	0	0	α
β	α	β	β	0	β
γ	0	β	γ	0	γ
0	0	0	0	0	0
1	α	β	γ	0	1

$\cup$	α	β	γ	0	1
α	α	β	1	α	1
β	β	β	γ	β	1
γ	1	γ	γ	γ	1
0	α	β	γ	0	1
1	1	1	1	1	1

aceste cinci elemente sînt suficiente.

Axiomele (1), (3) și (4) sînt vizibil verificate. Dacă $x = 0$, sau $x = 1$, sau dacă $y = 0$, sau $y = 1$, (5) se verifică fără calcul. Se observă că (2) are loc deci și (5) are loc pentru $x = y$. În celelalte cazuri se observă calculul următor

$$x = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \end{matrix}$$
$$y = \begin{matrix} \beta & \alpha & \alpha \\ \gamma & \gamma & \beta \end{matrix}$$
$$x \cup y = \begin{matrix} \beta & \beta & 1 \\ 1 & \gamma & \gamma \end{matrix}$$
$$x \cap (x \cup y) = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix}$$

Analog pentru verificarea lui (9) este suficient să se ia $x, y, z \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ și distincte. Atunci

$$\begin{aligned} x &= \alpha \quad \beta \\ z &= \beta \quad \gamma \\ y &= \gamma \quad \alpha \\ y \cap z &= \beta \quad 0 \\ x \cup (y \cap z) &= \beta \quad \beta \\ x \cup y &= 1 \quad \beta \\ (x \cup y) \cap z &= \beta \quad \beta \end{aligned}$$

Σ nu este o structură modulară în virtutea corolarului 1 căci $(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \gamma$ și $\alpha \cup (\beta \cup \gamma) = 1$.

Observația 2. În [4] se pune problema dacă structurile modulare nu pot fi caracterizate prin

$$[x \cup (y \cap y)] \cap y = y,$$

$$(z \cap y) \cup (z \cap x) = [(x \cap z) \cup y] \cap z.$$

Din propoziția 5 rezultă că nu.

C o r o l a r u l 2. Dacă S este un sistem algebric cu două operații $\cap$ și $\cup$ care satisfac (I_1) și (I_2) și dacă:

(I_3) există $0 \in S$ cu $0 \cap x = 0$ atunci S este o structură modulară cu prim element;

(I_4) există $1 \in S$ cu $1 \cap x = x$ atunci S este o structură modulară cu ultim element.

Axiomele (I_1), (I_2), (I_3) și (I_4) sînt independente.

ΣI_1 și ΣI_2 se iau ca în teorema 1. Dacă N este mulțimea numerelor naturale se ia ΣI_3 dat de

$$\alpha \cap \beta = \text{c.m.m.m.c. } (\alpha, \beta)$$

$$\alpha \cup \beta = \text{c.m.m.d.c. } (\alpha, \beta)$$

ΣI_4 este dualul lui ΣI_3.

Analog cu ce s-a făcut pentru algebrele booleene [6], se poate da o caracterizare directă a structurilor modulare complementate.

3. Următoarea caracterizare a structurilor și a structurilor modulare le încadrează în conceptul de *algebră parțial ordonată* dat de

D e f i n i ț i a 3. *O mulțime A este o algebră parțial ordonată dacă*

(i) este o algebră în sensul din [1];

(ii) este o mulțime parțial ordonată;

(iii) $x_i' \subseteq x_i''$, $i = 1, 2, \ldots, n(\alpha) \Rightarrow f_\alpha(x_1', x_2', \ldots, x_{n(\alpha)}') \subseteq f_\alpha(x_1'', x_2'', \ldots, x_{n(\alpha)}'')$.

Propoziția 6. *Dacă S este un sistem algebric cu două operații „$\cdot$" și „$+$" care satisface*

(i) $x \subseteq y \Longrightarrow zx \subseteq zy$, $z + x \subseteq z + y$,

(ii) $xy \subseteq x \subseteq x + y$,

(iii) $x^2 = x$,

(iv) $xz = x \Longrightarrow x + yz \subseteq z(y + x)$,

atunci S este o structură, în care „$\cap$" respectiv „$\cup$" sînt „$\cdot$" și „$+$".

Pentru scurtarea expunerii, prin (1) — (9) se va înțelege identitățile respective scrise cu „$\cdot$" în loc de „$\cap$", cu „$+$" în loc de „$\cup$".

Din (ii), (i), (iii) aplicînd încă o dată (ii) se deduce (5).

Apoi

$$2x = x + x = (iii) = x + x^2 \subseteq (iii),\ (iv) \subseteq x(x + x) = (5) = x.$$

Ținînd seama de (ii) se deduce (2).

Din (ii), (i) și (2) se deduce (6).

Evident

$$x(y + x) \supseteq (iii),\ (iv) \supseteq x + yx \supseteq (ii) \supseteq x.$$

Cum inegalitatea conversă este evidentă în virtutea lui (ii) rezultă

$$x(y + x) = x. \tag{15}$$

Atunci

$$x + y = (5) = x + y(y + x) \subseteq (15),\ (iv) \subseteq (y + x)^2 = (iii) = y + x$$

deci (4).

Se observă că

$$xy + y = (4) = y + xy \subseteq (iii),\ (iv) \subseteq y(x + y) = (4) =$$
$$= y(y + x) = (5) = y \tag{16}$$

deci

$$xy + y = y. \tag{17}$$

Atunci

$$xz = x \Longleftrightarrow x + z = z \tag{18}$$

în virtutea lui (17) și (5).

Mai departe

$$xy = (6) = x(y + yx) \supseteq (18),\ (17),\ (iv) \supseteq 2yx = (2) = yx$$

deci (3).

Fie a, b cu semnificația din teorema 1, în care „$\cup$" este înlocuit cu „$+$". Din (4) și (ii) aplicat de trei ori se deduce

$$yb = y.$$

De aici se repetă demonstrația din teorema 1, după (14).

Din (ii) și (3) urmează $xy \subseteq x, y$. Dacă $z \subseteq x, y$ atunci $zy \subseteq xy$. Însă $z \subseteq zy$ deci $z \subseteq xy$, $xy = x \cap y$. Analog pentru „$\cup$”.

Teorema 2. *Dacă S este un sistem algebric cu două operații care satisfac*

(Π_1) $x \subseteq y \Longrightarrow zx \subseteq zy,\ z + x \subseteq z + y,$

(Π_2) $xy \subseteq x \subseteq x + y,$

(Π_3) $x^2 = x,$

(Π_4) $xz = x \Longrightarrow x + yz = z(y + x),$

atunci S este o structură modulară. Axiomele sînt independente.

Modularitatea lui S este un corolar al propoziției 6.

Pentru demonstrarea independenței axiomelor se poate lua $\Sigma\Pi_1$ dat de

$\cdot$	1	α	β	0
1	1	α	β	0
α	α	α	0	0
β	β	0	β	0
0	0	0	0	0

$+$	1	α	β	0
1	1	1	1	1
α	1	α	1	α
β	1	1	β	β
0	1	α	β	0

unde $1 \supseteq \alpha \supseteq \beta \supseteq 0$. Se observă că $\beta \subseteq \alpha$, $\alpha + \beta \not\subseteq \alpha + \alpha$.

$\Sigma\Pi_2$ se ia

$\cdot$	α	β
α	α	β
β	α	β

$+$	α	β
α	α	β
β	α	β

$\Sigma\Pi_3$ se ia

$\cdot$	α	β
α	β	β
β	β	β

$+$	α	β
α	α	α
β	α	β

cu $\beta \subseteq \alpha$ și $\alpha \not\subseteq \beta$ relația fiind reflexivă.

$\Sigma\Pi_4$ se ia ca ΣI_2 din teorema 1.

ХАРАКТЕРИСТИКА МОДУЛЯРНЫХ СТРУКТУР ПОСРЕДСТВОМ СИСТЕМ НЕЗАВИСИМЫХ АКСИОМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В данной работе исходной точкой служит замечание, что, если определять модулярные структуры, добавив к аксиомам (1) — (8) структур аксиому (9) для $x \leqq z$, получается система постулатов, которая может быть значительно упрощена.

Доказываются следующие теоремы :

Теорема 1. Если $\mathcal{S}$ представляет алгебраическую систему с двумя операциями $\cap$ и $\cup$, которые удовлетворяют

$I_1.\ x \cap [(x \cup y) \cup z] = x$

$I_2.\ x \mu z \Rightarrow z \cap (y \cup x) = x \cup (y \cap z)$,

то $\mathcal{S}$ представляет собой модулярную структуру. Аксиомы являются независимыми.

Теорема 2. Если $\mathcal{S}$ представляет алгебраическую систему с двумя операциями и $+$, которые удовлетворяют

$II_1.\ x \subseteq y \Rightarrow z\, x \subseteq z\, y,\ z + x \subseteq z + y$

$II_2.\ x\, y \subseteq x \subseteq x + y$

$II_3.\ x^2 = x$

$II_4.\ x\, z = x \Rightarrow x + y\, z = z\,(y + x)$,

то $\mathcal{S}$ представляет собой модулярную структуру. Аксиомы являются независимыми.

Ясно, что $\subseteq$ является соотношением частичного порядка.

DÉTERMINATION DES STRUCTURES MODULAIRES PAR DES SYSTÈMES À AXIOMES INDÉPENDANTS

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail on part de l'observation qu'en définissant les structures modulaires par l'addition aux axiomes des structures (1) — (8) l'axiome (9) pour $x \leqq z$, on obtient un système de postulats pouvant être considérablement simplifié.

On démontre les théorèmes suivants :

Théorème 1. Si *S est un système algébrique à deux opérations $\cap$ et $\cup$ qui satisfont à*

$I_1\ x \cap [(x \cup y) \cup z] = x$

$I_2.\ x \mu z \Longrightarrow z \cap (y \cup x) = x \cup (y \cap z)$

alors S est une structure modulaire. Les axiomes sont indépendants.

Théorème 2. — *Si S est un système algébrique à deux opérations et $+$ qui satisfont à*

$II_1.\ x \subseteq y \Longrightarrow z\, x \subseteq z\, y,\ z + x \subseteq z + y$

$II_2.\ xy \subseteq x \subseteq x + y$

$II_3.\ x^2 = x$

$II_4.\ xz = x \Longrightarrow x + yz = z\,(y + x)$

alors S est une structure modulaire. Les axiomes sont indépendants.

Bien entendu $\subseteq$ est une relation d'ordre partiel.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Birkhoff, *Lattice Theory*. New York, 1948.
2. R. Croisot, *Axiomatique des lattices distributives*. Canad. Journ. of Math., 1951, t.3.
3. M. Sholander, *Postulates for distributivet Lattices*, Canad. Journ. of Math., 1951, t.3.
4. M. Kolibiar, *K axiomatike moduliarnîih struktur*. Cehosl. mat. jur., 1956, t.6 (81) nr. 3.
5. M. Benado, *Noțiunea de normalitate și teoremele de descompunere ale Algebrei*. Studii și cercetări matematice, 1950, t. I, nr. 2.
6. M. H. Stone, *Postulates for Boolean algebras* ..., Americ, Journ. of Math., 1935, t.57.

ASUPRA CORECȚIILOR DE COMPRESIBILITATE LA MIȘCĂRI CONTINUE SUBSONICE. CAZUL OBSTACOLULUI ELIPTIC *)

DE

IOAN FILIMON

INTRODUCERE

Sînt cunoscute multiplele avantaje pe care le oferă metoda de aproximație a lui Ciaplîghin [1], la studiul multor probleme de aerodinamică.

În afară de faptul că teoria funcțiilor de variabilă complexă aplicîndu-se și în acest caz, unele metode de studiu folosite în hidrodinamică se pot extinde și la dinamica gazelor, adoptarea relației densitate-viteză a lui Ciaplîghin conduce la rezultate în concordanță cu experiența, mai ales cînd este vorba de mișcări pentru care numărul lui Mach nu depășește 0,6.

În ultimii douăzeci de ani, metoda de aproximație a lui Ciaplîghin a făcut obiectul unui foarte mare număr de cercetări; completări și simplificări importante i s-au adus de către D. Riabouchinsky [2], B. Demtchenko [3], C. Jacob [4], H. S. Tsien [5], Th. von Kármán [6], Jean Leray [7] etc.

Amintim că în 1940, Th. von Kármán [6] reia observația lui Ciaplîghin, și arată că din punct de vedere fizic adoptarea relației densitate-viteză propusă de Ciaplîghin revine în fond la înlocuirea curbei adiabate din planul presiune-volum, cu o dreaptă.

Cu un an înainte (1939), C. Jacob [4] și H. S. Tsien [5] stabilesc simultan o formulă prin intermediul căreia se realizează o corespondență între mișcarea gazului fictiv supus relației lui Ciaplîghin și o mișcare lichidă de comparare. Această corespondență se bucură de proprietăți remarcabile.

---

*) Disertație susținută la 15 februarie 1957 pentru obținerea titlului de candidat în științele fizico-matematice.

O parte din rezultatele cuprinse în această lucrare au fost publicate în [28], [29], [30].

Practic, se pleacă de la mişcarea lichidă din planul de bază şi, cu ajutorul formulei considerate, se construieşte mişcarea gazului fictiv care înlocuieşte gazul real. Obstacolul în jurul căruia are loc mişcarea gazului fictiv se construieşte *a posteriori* prin intermediul aceleiaşi formule şi are o formă asemănătoare formei obstacolului din planul mişcării lichide asociative.

Folosind această metodă, H. S. Tsien [5] şi C. Jacob [4] studiază mişcarea gazoasă dedusă din mişcarea lichidă în jurul unui obstacol eliptic în planul de bază. Procedînd în mod analog pentru mişcarea în jurul unui obstacol circular, Ko Tamada [8] şi I. Imai [9] determină pentru numărul Mach critic, care caracterizează această mişcare, valoarea 0,400.

Renunţînd la unele dintre restricţiile corespondenţei Ciaplîghin, Jean Leray [7] extinde metoda şi la mişcări cu circulaţie. Cercetări în această direcţie au întreprins printre alţii S. A. Hristianovici [10], C. C. Lin [11] şi A. Gelbart [12].

Este mult mai complicată din punct de vedere matematic problema determinării mişcării gazoase în jurul unui obstacol dat dinainte. Alegerea obstacolului din planul mişcării lichide în aşa fel încît să corespundă prin intermediul formulei lui C. Jacob - H. S. Tsien obstacolului din planul mişcării gazoase, conduce la rezolvarea unor ecuaţii funcţionale de formă complicată.

Cazul obstacolului riguros circular fusese tratat încă din 1935 de către N. A. Slioskin [13], care stabileşte ecuaţia funcţională a problemei. Metoda folosită de N. A. Slioskin necesitînd unele precizări, problema a fost reluată în 1941 de C. Jacob [14], care demonstrează existenţa şi unicitatea mişcării continue în jurul obstacolului riguros circular, a cărui număr Mach la infinit nu depăşeşte 0,71.

Mai recent Lipman Bers [15], [16], [17] studiază problema mişcării continue subsonice în jurul unui obstacol convex de formă oarecare şi stabileşte existenţa unei atari mişcări, prin aplicarea metodelor topologice ale lui Leray-Schauder [18], [19] în ipoteza că viteza maximă este dată dinainte. Nu s-a dat pînă în prezent o demonstraţie a unicităţii soluţiei pentru cazul amintit, deşi după cum observă Lipman Bers [15] unicitatea pare probabilă.

În această lucrare considerăm mişcarea subsonică continuă a unui gaz în jurul unui obstacol convex oarecare. Primul capitol este consacrat ecuaţiei funcţionale a problemei. După ce se fac cîteva observaţii asupra metodei de aproximaţie a lui Ciaplîghin şi se menţionează unele proprietăţi ale corespondenţei dintre mişcarea gazoasă şi mişcarea lichidă asociată, se trece la determinarea condiţiei la limită a problemei. Stabilirea cîtorva proprietăţi ale soluţiei, permit să se dea o limitare superioară pentru M_∞ (numărul Mach la infinit), în aşa fel încît condiţia de validitate a vitezelor să fie satisfăcută.

În capitolul al doilea se dezvoltă o metodă de aproximaţii succesive şi se enunţă noile probleme la limită rezultate din aplicarea metodei. Prima problemă la limită se rezolvă observîndu-se că ea reprezintă ecuaţia funcţională corespunzătoare aceleiaşi probleme în mişcare lichidă. Pro-

blema a doua este o problemă la limită liniară. Sub rezerva îndeplinirii anumitor condiții, se indică în continuare o metodă care reduce rezolvarea acestei probleme la cuadraturi.

Rezultatele obținute în primele două capitole sînt aplicate în capitolul al treilea, la studiul mișcării gazoase subsonice în jurul unui obstacol eliptic. Problemei la limită corespunzătoare i se aplică metoda aproximațiilor succesive amintită și se determină efectiv soluțiile primelor două probleme la limită rezultate.

Ultimul capitol este destinat aplicațiilor numerice la mișcarea gazoasă în jurul obstacolului eliptic. Toate calculele sînt efectuate cu aproximația termenilor în M_∞^2 ai soluției exacte. În § 2 al acestui capitol se calculează distribuția vitezelor pe obstacolul eliptic și se stabilește expresia vitezei maxime pe obstacol. χ fiind raportul semi-axelor elipsei, se dă în continuare un tablou al vitezelor maxime pentru diferite valori date lui χ și M_∞. Se dă, de asemenea, un tablou al numerelor Mach critice M_∞^* pentru diferite valori ale lui χ, precum și diagrama variației lui M_∞^* în raport cu χ.

În continuare, se calculează aceleași elemente aerodinamice pentru mișcarea gazoasă în jurul obstacolului quasi-eliptic, dedus din aplicarea formulei lui C. Jacob - H. S. Tsien, dîndu-se posibilitatea comparării rezultatelor obținute prin aceste două metode.

Autorul ține să-și manifeste sentimentele de recunoștință față de prof. Caius Jacob, membru corespondent al Academiei R.P.R., pentru sprijinul acordat în timpul efectuării acestei lucrări.

Capitolul I

ECUAȚIILE FUNCȚIONALE ALE PROBLEMEI

§ 1. Generalități asupra metodei de aproximație Ciaplighin

Notații:

ρ — densitatea locală a gazului,
ρ_0 — densitatea gazului în punctul de viteză nulă,
ρ_∞ — densitatea gazului la infinit,
p — presiunea locală a gazului,
p_0 — presiunea gazului în punctul de viteză nulă,
p_∞ — presiunea gazului la infinit,
c — viteza locală a sunetului în mediul gazos,
c_0 — viteza sunetului în punctul de viteză nulă,
c_∞ — viteza sunetului la infinit,
V — mărimea vitezei locale în mișcarea gazoasă,
W — mărimea vitezei locale în mișcarea lichidă asociată.

Să considerăm mișcarea plană permanentă și irotațională a unui gaz în jurul unui obstacol convex dat dinainte (Γ) din planul $Z = X + iY$, viteza la infinit $\vec{V}_\infty$ fiind paralelă cu axa X-lor. În plus, se presupune

că mişcarea este subsonică şi fără circulaţie. Metoda de aproximaţie a lui Ciaplîghin constă în a înlocui gazul real, cu un gaz fictiv care satisface relaţia

$$\varrho = \varrho_0 (1 + AV^2)^{-1/2}, \tag{1.1}$$

unde A este o constantă ce se determină într-un anumit mod*).

Această alegere a relaţiei densitate-viteză, permite să se asocieze mişcării gazului fictiv, care înlocuieşte gazul real în planul Z, o mişcare lichidă de comparare în jurul unui obstacol Γ_1 din planul de *bază* $z = x + iy$, avînd aceeaşi viteză $\vec{V}_\infty$ paralelă cu axa x-lor, la mari distanţe. Forma obstacolului Γ_1 apriori necunoscută, este apropiată formei obstacolului Γ.

Cele două mişcări asociate sînt legate prin relaţia lui C. Jacob-H. S. Tsien**).

$$dZ = C_1 dz + C_2 \overline{\left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz}, \tag{1.2}$$

$f(z)$ fiind potenţialul complex al mişcării lichide în jurul lui Γ_1.

Constantele C_1, C_2 au valorile

$$C_1 = \frac{\varrho_\infty + \varrho_0}{2\varrho_\infty}, \qquad C_2 = \frac{\varrho_\infty - \varrho_0}{2\varrho_\infty V_\infty^2} \tag{1.3}$$

şi verifică, după cum se vede uşor, relaţia

$$C_1 + C_2 V_\infty^2 = 1. \tag{1.4}$$

Corespondenţa mai sus amintită se bucură de unele proprietăţi remarcabile:

I. Potenţialul complex $\Phi + i\Psi$ este acelaşi pentru ambele mişcări în punctele omoloage Z, z.

II. Unghiul vectorilor viteză respectiv cu OX, sau Ox, este acelaşi în aceste puncte.

III. Mărimile vitezelor în cele două mişcări asociate sînt legate prin relaţia

$$V = \frac{W}{C_1 + C_2 W^2}. \tag{1.5}$$

---

*) Relaţia (1.1) înseamnă de fapt înlocuirea curbei adiabatice din planul $(p, 1/\varrho)$ printr-o dreaptă. Ciaplîghin [1] înlocuieşte curba adiabatică prin tangenta la curbă în punctul de viteză nulă. Th. von Kármán-H. S. Tsien [6] consideră tangenta în punctul de viteză $V = V_\infty$. În sfîrşit, C. Jacob [20] înlocuieşte adiabata reală prin dreapta care uneşte punctul de viteză $V = V_\infty$, cu punctul de viteză nulă. Pentru detalii a se vedea [21].

**) Această formulă se numeşte adesea „formula lui H.S. Tsien". În realitate, ea a fost stabilită în acelaşi timp de C. Jacob (Portugaliae Mathematica 1939) şi H. S. Tsien (Journal of the Aeronautical Sciences 1939). Formula lui H. S. Tsien derivă din aceea a lui C. Iacob printr-o uşoară modificare a constantelor.

IV. În sfîrșit, K și k fiind curburile obstacolelor asociate Γ, Γ_1, avem de asemenea relația

$$K = \frac{k}{C_1 + C_2 W^2}. \tag{1.6}$$

§ 2. Problema la limită

Să observăm că problema este rezolvată din moment ce se cunoaște forma obstacolului situat în planul mișcării lichide, sau, ceea ce este același lucru, funcția prin intermediul căreia se realizează transformarea conformă a exteriorului conturului Γ_1 pe exteriorul cercului unitate, din planul $\zeta = \xi + i\eta$, această transformare efectuîndu-se astfel încît punctele de la infinit din planele z, ζ să fie omoloage și ca direcțiile axelor Ox, $O\xi$ să se corespundă la infinit. În acest caz

$$z = \lambda\zeta + \text{funcție olomorfă pentru } |\zeta| > 1, \tag{1.7}$$

λ fiind o constantă reală pozitivă. În cele ce urmează ne vom opri atenția asupra unei funcții care rezultă din aceasta.

Să punem

$$\Omega(\zeta) = \Theta + i\tau = -i \log\left[\frac{1}{\lambda}\frac{dz}{d\zeta}\right]. \tag{1.8}$$

Vom arăta în continuare că această funcție este olomorfă în domeniul $|\zeta| > 1$ și nulă la infinit.

Într-adevăr, prin transformarea (1,7), mișcării lichide în jurul lui Γ_1 în planul z, îi corespunde o mișcare lichidă în jurul cercului-unitate din planul ζ, cu viteza $\lambda\vec{V}_\infty$ paralelă cu axa $O\xi$. la mari distanțe.

Să notăm cu $f(z)$ potențialul complex al mișcării din planul z și cu $F(\zeta) = V_\infty \lambda \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$ transformata lui $f(z)$ prin intermediul relației (1.7); fie acum $\omega[z(\zeta)] = \omega(\zeta) = \theta + i\tau$, $\omega_0(\zeta) = \theta_0 + i\tau_0$, funcțiile lui Levi-Civita pentru mișcările lichide în jurul obstacolului Γ_1, respectiv cercul-unitate. Vom avea ca atare

$$\frac{dF}{d\zeta} = \lambda V_\infty e^{-i\omega_0} = \lambda V_\infty \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right), \tag{1.9a}$$

$$\frac{df}{dz} = V_\infty e^{-i\omega} = \lambda V_\infty \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)\frac{d\zeta}{dz}. \tag{1.9b}$$

Obstacolul Γ_1 fiind presupus fără nici un punct angulos, se poate verifica cu ușurință că singurele puncte de oprire sînt acelea care corespund lui $\zeta = \pm 1$. Pentru aceste valori ale lui ζ, părțile reale ale

funcțiilor $\omega(\zeta)$ și $\omega_0(\zeta)$ au discontinuități egale cu π. În plus, este evident că avem

$$\begin{aligned} \omega(\infty) &= 0, \\ \omega_0(\infty) &= 0, \end{aligned} \tag{1.10}$$

viteza $\vec{V}_\infty$ fiind paralelă cu axa reală din planul z. În consecință, funcția $\omega(\zeta) - \omega_0(\zeta)$ trebuie să fie olomorfă în exteriorul cercului-unitate și nulă la infinit. Insă, conform definiției lui $\Omega(\zeta)$, avem

$$\Omega(\zeta) = \omega(\zeta) - \omega_0(\zeta). \tag{1.11}$$

q. e. d.

Rezultă de aici o relație simplă care dă elementul de arc pentru obstacolul Γ_1. Avem, dacă se are în vedere (1.8),

$$dz = \lambda e^{i\Omega(\zeta)} d\zeta,$$

de unde

$$ds = \lambda e^{-\tau} d\sigma \qquad (\zeta = e^{i\sigma}). \tag{1.12}$$

Calculăm în continuare unghiul θ pe care îl face viteza cu obstacolul (Γ_1). Dacă se are în vedere valoarea lui θ_0, dată de relația (1.9a), se deduce din relația (1.11)

$$\begin{aligned} \theta &= \Theta + \sigma - \frac{\pi}{2} && \text{pentru } 0 < \sigma < \pi, \\ \theta &= \Theta + \sigma + \frac{\pi}{2} && \text{pentru } \pi < \sigma < 2\pi. \end{aligned} \tag{1.13}$$

În continuare,

$$d\theta = \left[1 + \frac{d\Theta}{d\sigma}\right] d\sigma$$

și, deoarece Θ, τ sînt funcții armonice conjugate,

$$d\theta = \left[1 - \frac{d\tau}{dn}\right] d\sigma, \tag{1.14}$$

derivata normală fiind luată spre exteriorul cercului unitate. Atunci curbura k a obstacolului Γ_1, dată de $k = \frac{d\theta}{ds}$, va avea expresia

$$k = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \frac{d\tau}{dn}\right] e^{\tau}. \tag{1.15}$$

Determinăm acum expresia vitezei pe Γ_1; rezultă, din relația (1.9b)

$$W = 2V_\infty \,|\sin\sigma|\, e^{\tau}. \tag{1.16}$$

În sfîrșit, dacă dS este elementul de arc pentru obstacolul Γ din planul Z al mișcării gazoase, se deduce din relația (1.2)

$$dS = \lambda\left[C_1 e^{-\tau} + 4C_2 V_\infty^2 \sin^2 \sigma\, e^{\tau}\right] d\sigma. \tag{1.17}$$

Să presupunem acum că se dă curbura obstacolului Γ prin ecuația sa intrinsecă

$$K = K(S), \tag{1.18}$$

unde K este o funcție analitică de S. Atunci, folosind relația (1.6) dintre curburile obstacolelor asociate Γ, Γ_1, sîntem conduși la următoarea problemă la limită :

Să se determine o funcție $\Omega(\zeta)$ olomorfă în domeniul $|\zeta| > 1$, nulă la infinit, o funcție analitică $S(\sigma)$ și un parametru λ, astfel încît următoarele condiții la limită să fie verificate :

$$\frac{d\tau}{dn} = 1 - \lambda\left[C_1 e^{-\tau} + 4C_2 V_\infty^2 \sin^2\sigma e^{\tau}\right] K(S) \qquad \text{pe } |\zeta| = 1 \tag{1.19a}$$

$$dS = \lambda\left[C_1 e^{-\tau} + 4C_2 V_\infty^2 \sin^2 \sigma\, e^{\tau}\right] d\sigma \qquad [S(0) = 0], \tag{1.19b}$$

$$\Omega(\infty) = 0. \tag{1.19c}$$

§ 3. Existența soluției

Așa cum s-a menționat în introducere, existența soluției pentru mișcarea gazoasă continuă în jurul obstacolului convex oarecare a făcut deja obiectul cercetărilor lui Lipman Bers [15], [16], [17]. Se poate arăta echivalența dintre problema la limită enunțată în paragraful precedent și un anumit sistem funcțional. Lipman Bers determină direct sistemul funcțional corespunzător problemei la limită și stabilește existența soluției prin aplicarea metodelor topologice ale lui Leray-Schauder. Deoarece din formularea problemei dată de Lipman Bers nu reiese rolul pe care îl joacă parametrul λ în problema la limită, vom arăta că există valori ale lui λ pentru care condiția $\Omega(\infty) = 0$ este verificată. Pentru aceasta vom stabili în prealabil două inegalități privind soluțiile problemei la limită*).

Funcția armonică τ își atinge maximumul și minimumul pe circonferința unitate; fie σ_M abscisa curbilinie a punctului pentru care $\tau(\sigma_M) = \tau_{\max}$. În acest punct vom avea, evident,

$$\left(\frac{d\tau}{dn}\right)_{\sigma=\sigma_M} < 0,$$

de unde, dacă se are în vedere condiția la limită (1.19a),

$$1 - \lambda C_1 e^{-\tau_{\max}} K_{\sigma=\sigma_M} - 4\lambda C_2 V_\infty^2 \sin^2 \sigma_M e^{\tau_{\max}} K_{\sigma=\sigma_M} < 0 \tag{1.20}$$

*) Procedeul folosit de G. Iacob [14] pentru cazul obstacolului riguros circular se poate extinde fără nici o dificultate și în cazul obstacolului convex de formă oarecare.

Obstacolul Γ este presupus a avea curbură variind în mod continuu, prin urmare funcția $K(S)$ este mărginită și pozitivă pentru orice σ cuprins în intervalul $(0,2\pi)$. Fie acum $\overline{K}$, $\underline{K}$ marginea superioară, respectiv inferioară, a funcției $K(S)$ în intervalul $(0, 2\pi)$. Deoarece $C_1 > 0$, $C_2 < 0$*), inegalitatea (1.20) atrage

$$1 - \lambda C_1 e^{-\tau_{\max}} \overline{K} < 0, \tag{1.21}$$

de unde

$$\tau_{\max} < \log (\lambda C_1 \overline{K}). \tag{1.22}$$

În mod analog, fie σ_m abscisa corespunzătoare punctului de minim a funcției τ pe circonferință; deoarece

$$\left(\frac{d\tau}{dn}\right)_{\sigma=\sigma_m} > 0,$$

avem, de asemenea,

$$1 - \lambda C_1 e^{-\tau_{\min}} K_{\sigma=\sigma_m} - 4\lambda C_2 V_\infty^2 \sin^2 \sigma_m e^{\tau_{\min}} K_{\sigma=\sigma_m} > 0 \tag{1.23}$$

și, cu atît mai mult,

$$1 - \lambda C_1 K e^{-\tau_{\min}} - 4\lambda C_2 V_\infty^2 \overline{K} e^{\tau_{\min}} > 0. \tag{1.23'}$$

Din această ultimă inegalitate se obține următoarea limitare inferioară pentru τ:

$$\tau_{\min} > \log \left[\frac{1 - \sqrt{1 - 16 C_1 C_2 \overline{K} \underline{K} \lambda^2 V_\infty^2}}{8 C_2 \overline{K} \lambda V_\infty^2} \right] \tag{1.24}$$

și, în definitiv,

$$\log \left[\frac{1 - \sqrt{1 - 16 C_1 C_2 \overline{K} \underline{K} \lambda^2 V_\infty^2}}{8 C_2 \overline{K} \lambda V_\infty^2} \right] < \tau < \log (C_1 \overline{K} \lambda). \tag{1.25}$$

Vom încheia observațiile în legătură cu existența soluției problemei la limită, arătînd că există valori ale parametrului λ pentru care condiția $\Omega(\infty) = 0$ este satisfăcută.

Într-adevăr, din faptul că vitezele asimptotice ale celor două mișcări lichide din planele z, ζ sînt paralele cu axele reale, rezultă imediat

$$\Theta(\infty) = 0,$$

prin urmare condiția (1.19c) se poate înlocui cu condiția

$$\tau(\infty) = 0.$$

*) După cum rezultă imediat din formulele (1.3).

Însă se poate arăta că avem

$$\tau(\infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tau(\sigma)\, d\sigma \tag{1.26}$$

și ca atare condiția $\Omega(\infty) = 0$, prin intermediul căreia se determină valoarea parametrului λ, se înlocuiește cu condiția

$$\int_0^{2\pi} \tau(\sigma)\, d\sigma = 0. \tag{1.27}$$

Să observăm că dacă dăm pentru λ valori care satisfac inegalitatea

$$\lambda \leqslant \frac{1}{C_1 \overline{K}}, \tag{1.28}$$

atunci $\tau_{max} \leqslant 0$ și de aici rezultă imediat

$$\int_0^{2\pi} \tau(\sigma)\, d\sigma \leqslant 0.$$

Pe de altă parte, dacă avem

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 16\, C_1 C_2 \overline{K}\, \underline{K} \lambda^2 V_\infty^2}}{8 C_1 \overline{K} \lambda V_\infty^2} \geqslant 1,$$

ceea ce conduce la următoarea inegalitate pentru λ:

$$\lambda \geqslant \frac{1}{C_1 \underline{K} + 4 C_2 V_\infty^2 \overline{K}}, \tag{1.29}$$

atunci $\tau_{min} \geqslant 0$ și cu atît mai mult

$$\int_0^{2\pi} \tau(\sigma)\, d\sigma \geqslant 0.$$

În aceste condiții rezultă imediat că, dacă λ rămîne cuprins în intervalul

$$\frac{1}{C_1 \overline{K}} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{C_1 \underline{K} + 4 C_2 V_\infty^2 \overline{K}}, \tag{1.30}$$

atunci $\int_0^{2\pi} \tau(\sigma)\, d\sigma$, care este o funcție de λ, variază în mod continuu de la valori negative la valori pozitive. Așa dar condiția

$$\int_0^{2\pi} \tau(\sigma)\, d\sigma = 0,$$

considerată ca ecuație în raport cu λ, admite cel puțin o rădăcină cuprinsă în intervalul considerat.

§ 4. Validitatea vitezelor

Pentru ca problema la limită să conducă la soluții acceptabile din punct de vedere fizic, este necesar ca de-a lungul obstacolului să fie verificată inegalitatea

$$V = \frac{W}{C_1 + C_2 W^2} \geqslant 0, \tag{1.31}$$

a cărei semnificație este evidentă.

Pentru aceasta este necesar și suficient ca

$$C_1 + C_2 W^2 \geqslant 0, \tag{1.32}$$

sau, avîndu-se în vedere valoarea vitezei W,

$$C_1 + 4C_2 V_\infty^2 \sin^2\sigma e^{2\tau} \geqslant 0. \tag{1.32'}$$

Această ultimă inegalitate va fi satisfăcută o dată cu inegalitatea

$$C_1 + 4C_1^2 C_2 V_\infty^2 \lambda^2 \overline{K}^2 \geqslant 0, \tag{1.33}$$

obținută din (1.32') prin înlocuirea lui τ cu τ_{max} și ținîndu-se cont de inegalitatea pe care o verifică τ_{max}.

Obținem astfel o nouă delimitare pentru λ, și anume

$$\frac{-1}{2V_\infty \overline{K}\sqrt{-C_1 C_2}} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2V_\infty \overline{K}\sqrt{-C_1 C_2}}. \tag{1.34}$$

Revenind la inegalitățile (1.30) este evident că pentru a asigura existența unei soluții pentru problema la limită în condiții de compatibilitate fizică, trebuie satisfăcute inegalitățile

$$\frac{1}{C_1 \overline{K}} \geqslant \frac{-1}{2V_\infty \overline{K}\sqrt{-C_1 C_2}}, \tag{1.35a}$$

$$\frac{1}{C_1 \underline{K} + 4C_2 V_\infty^2 \overline{K}} \leqslant \frac{1}{2V_\infty \overline{K}\sqrt{-C_1 C_2}}. \tag{1.35b}$$

Prima dintre aceste două inegalități este evidentă, în timp ce a doua conduce la o limitare superioară pentru C_1 și de aici la o limitare superioară a numărului Mach M_∞ $\left(M_\infty = \frac{V_\infty}{c_\infty}\right)$.

Inegalitatea (1.35b) se poate scrie în continuare

$$\underline{K}^2 C_1^2 + 4\overline{K}(\overline{K} + 2\underline{K}) C_1 C_2 V_\infty^2 + 16\overline{K}^2 V_\infty^4 C_2^2 > 0, \tag{1.36}$$

sau, dacă se are în vedere relația (1.4) și dacă se notează

$$\underline{K}/\overline{K} = \varkappa \qquad (0 < \varkappa < 1), \tag{1.37}$$

se obține din (1.36)

$$(\varkappa^2 - 8\varkappa + 12)\, C_1^2 + 4\,(2\varkappa - 7)\, C_1 + 16 \geqslant 0 \tag{1.36'}$$

inegalitatea satisfăcută pentru

$$C_1 \geqslant \frac{2\,(7 - 2\varkappa) + 2\sqrt{4\varkappa + 1}}{\varkappa^2 - 8\varkappa + 12}, \tag{1.37a}$$

sau

$$C_1 \geqslant \frac{2\,(7 - 2\varkappa) - 2\sqrt{4\varkappa + 1}}{\varkappa^2 - 8\varkappa + 12}. \tag{1.37b}$$

Avîndu-se în vedere limitele între care poate varia constanta C_1, inegalitatea (1.37a) nu conduce la valori acceptabile pentru C_1 în timp ce din inegalitatea (1.37b) se obține

$$1 \leqslant C_1 \leqslant \frac{2\,(7 - 2\varkappa) - 2\sqrt{4\varkappa + 1}}{\varkappa^2 - 8\varkappa + 12} \tag{1.38}$$

și de aici o limitare corespunzătoare pentru M_∞.

Capitolul II

REZOLVAREA PROBLEMEI LA LIMITĂ PRIN APROXIMAȚII SUCCESIVE

§ 1. Aproximațiile succesive ale problemei

Existența soluției problemei la limită o dată asigurată, vom introduce, pentru simplificarea notațiilor, parametrul ν definit de relația

$$\nu = C_2 V_\infty^2 = 1 - C_1, \tag{2.1}$$

parametru ce are, în funcție de numărul lui Mach M_∞, o dezvoltare de forma

$$\nu = -\frac{1}{4} M_\infty^2 + \ldots$$

Condițiile la limită (1.19) se scriu acum

$$\frac{d\tau}{dn} = 1 - \lambda\left[(1 - \nu)\, e^{-\tau} + 4\nu \sin^2 \sigma\, e^{\tau}\right] K(S) \qquad \text{pe } |\zeta| = 1, \tag{2.2a}$$

$$dS = \lambda\left[(1 - \nu)\, e^{-\tau} + 4\nu \sin^2 \sigma\, e^{\tau}\right] d\sigma \qquad [S(0) = 0], \tag{2.2b}$$

$$\Omega(\infty) = 0. \tag{2.2c}$$

Să dăm pentru necunoscutele problemei la limită dezvoltări de forma

$$\begin{aligned} \Omega(\zeta) &= \Omega_0(\zeta) + \nu\Omega_1(\zeta) + \ldots, \\ S(\sigma) &= S_0(\sigma) + \nu S_1(\sigma) + \ldots, \\ \lambda &= \lambda_0 + \nu\lambda_1 + \ldots \end{aligned} \tag{2.3}$$

Avem în continuare

$$K(S) = K(S_0) + \left(\frac{\partial K}{\partial S}\right)_{S=S_0} S_1\nu + \ldots,$$

$$e^{-\tau} = e^{-\tau_0}(1 - \tau_1\nu + \ldots),$$

$$e^{\tau} = e^{\tau_0}(1 + \tau_1\nu + \ldots).$$

Aceste dezvoltări introduse în condițiile la limită (2.2), după identificarea coeficienților puterilor lui ν, se obțin următoarele noi probleme la limită :

Să se determine funcțiile $\Omega_k(\zeta) = \Theta_k + i\tau_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$, olomorfe în domeniul $|\zeta| > 1$, nule la infinit, funcțiile analitice $S_k(\sigma)$, precum și constantele λ_k, astfel încît să fie satisfăcute condițiile

$$\frac{d\tau_0}{dn} = 1 - \lambda_0 e^{-\tau_0} K(S_0) \qquad \text{pe } |\zeta| = 1, \tag{2.4 a}$$

$$dS_0 = \lambda e^{-\tau_0} d\sigma \qquad [S_0(0) = 0], \tag{2.4 b}$$

$$\Omega_0(\infty) = 0, \tag{2.4 c}$$

$$\frac{d\tau_1}{dn} = \left\{\left[(1+\tau_1)\lambda_0 - \lambda_1\right] e^{-\tau_0} + \lambda_0 \sin^2\sigma\, e^{\tau_0}\right\} K(S_0) - \lambda_0 e^{-\tau_0}\left(\frac{\partial K}{\partial S}\right)_{S=S_0} S_1$$

$$\text{pe } |\zeta| = 1, \tag{2.5 a}$$

$$dS_1 = \left\{\left[\lambda_1 - \lambda_0(1+\tau_i)\right] e^{-\tau_0} - \lambda_0 \sin^2\sigma\, e^{\tau_0}\right\} d\sigma \qquad [S_1(0) = 0], \tag{2.5 b}$$

$$\Omega_1(\infty) = 0, \tag{2.5 c}$$

. . . . . .

§ 2. Rezolvarea problemei la limită (2.4)

Este clar că problema la limită (2.4) reprezintă analoaga problemei (2.2) pentru mișcarea lichidă în jurul obstacolului Γ. Într-adevăr, să considerăm mișcarea lichidă în jurul acestui obstacol, presupus a fi situat în planul $z^* = X^* + iY^*$, lichidul fiind animat de o viteză $\vec{V}_\infty$, paralelă cu axa OX^* la mari distanțe.

Introducem pe $\omega^*(z^*)$, funcția lui Levi-Civita pentru mișcarea lichidă în jurul obstacolului Γ, și $\omega_0(\zeta^*)$, funcția lui Levi-Civita pentru

mișcarea lichidă în jurul cercului unitate din planul $\zeta^* = \xi^* + i\eta^*$, mișcare dedusă din prima, prin transformare conformă.

Fie

$$z^* = z^*(\zeta^*) = \lambda^*\zeta^* + \text{funcție olomorfă în } |\zeta^*| > 1 \tag{2.6}$$

funcția care efectuează această transformare conformă a exteriorului conturului Γ pe exteriorul cercului-unitate, cu păstrarea direcției axelor absciselor la infinit și astfel încît punctele de la infinit din planele z^*, ζ^* să fie omoloage.

Dacă se are în vedere notația obișnuită

$$\Omega^*(\zeta^*) = \omega^*[z^*(\zeta^*)] - \omega_0(\zeta^*),$$

atunci, conform formulelor (1.15), (1.12), se obține imediat

$$\frac{d\tau^*}{dn} = 1 - \lambda^* e^{-\tau^*} K(S^*), \tag{2.7a}$$

$$dS^* = \lambda^* e^{-\tau^*} d\sigma^* \qquad [S^*(0) = 0]. \tag{2.7b}$$

Se notează prin dS^*, $d\sigma^*$ elementele de arc pe conturul Γ, respectiv pe cercul-unitate din planul (ζ^*), iar prin $K(S^*)$ curbura conturului Γ ca funcție de abscisa curbilinie S^*.

La condițiile la limită (2.7) se mai adaugă condiția

$$\Omega^*(\infty) = 0, \tag{2.7c}$$

care asigură că viteza la infinit a mișcării lichide în jurul obstacolului Γ este efectiv egală cu $\vec{V}_\infty$.

Așa fiind, în virtutea definiției lui $\Omega(\zeta)$, soluția problemei la limită (2.4) va fi

$$\Omega_0(\zeta) = -i \log\left[\frac{1}{\lambda_0}\frac{dz}{d\zeta}\right], \tag{2.8}$$

constanta λ_0 fiind determinată de condiția $\Omega_0(\infty) = 0$.

§ 3. Rezolvarea problemei la limită (2.5)

Această problemă la limită se reduce imediat la o problemă la limită liniară pentru funcțiile armonice conjugate Θ_1, τ_1. Într-adevăr, dacă se are în vedere condiția (2.4b), condiția la limită (2.5a) se scrie

$$\frac{d\tau_1}{dn} = -K(S_0)\frac{dS_1}{d\sigma} - \frac{\partial K(S_0)}{\partial S_0}\frac{dS_0}{d\sigma}S_1$$

și de aici

$$\frac{d\tau_1}{dn} = -\frac{d}{d\sigma}[K(S_0)S_1],$$

sau, avîndu-se în vedere condițiile lui Cauchy-Riemann

$$d\Theta_1 = d\left[K(S_0)\,S_1\right]$$

de unde

$$\Theta_1 = K(S_0)\,S_1, \tag{2.9}$$

constanta de integrare luîndu-se egală cu zero, deoarece $\Theta_1 = 0$ pe axa reală.

Problema la limită (2.4) se enunță acum în felul următor:

Să se determine o funcție $\Omega_1(\zeta) = \Theta_1 + i\tau_1$ olomorfă în domeniul $|\zeta| > 1$ și o constantă λ_1, următoarele condiții fiind verificate:

$$\frac{d\tau_1}{dn} = \left\{\left[\lambda_0(1+\tau_1) - \lambda_1\right]e^{-\tau_0} + \lambda_0 \sin^2\sigma\, e^{\tau_0}\right\} K(S_0) - \lambda_0 e^{-\tau_0}\frac{K'(S_0)}{K(S_0)}\Theta_1$$

$$\text{pe } |\zeta| = 1, \tag{2.10}$$

$$\Omega_1(\infty) = 0,$$

unde τ_0, $S_0(\sigma)$ și λ_0 sînt determinați prin rezolvarea problemei la limită (2.2)

§ 4. Asupra unei probleme la limită

Problema la limită considerată în paragraful precedent, este aceea a determinării unei funcții $H(\zeta) = P + iQ$ olomorfă în exteriorul cercului unitate, verificînd o condiție de frontieră de forma

$$\frac{dQ}{dn} = u(\sigma)\,P + v(\sigma)\,Q + w(\sigma). \qquad \text{pe } |\zeta| = 1 \tag{2.11}$$

Se poate arăta ușor că rezolvarea acestei probleme la limită este echivalentă cu rezolvarea unei ecuații integrale liniare de tip Fredholm.

În cele ce urmează, vom indica o cale utilă în aplicații, care, în anumite cazuri, reduce rezolvarea problemei la limită, la cuadraturi. Vom face pentru aceasta, următoarele ipoteze:

a) $u(\sigma)$, $v(\sigma)$ și $w(\sigma)$ sînt funcții continue pe circomferința unitate, periodice de perioadă 2π, desfășurabile în serii trigonometrice uniform convergente.

Fie $g(\zeta) = u^* + iu$ funcția olomorfă în $|\zeta| > 1$, a cărei parte imaginară ia pe circumferință valorile $u(\sigma)$, și fie $u^*(\sigma)$ valoarea funcției u^* pe circumferință (u^* se determină cu aproximația unei constante aditive reale). Să considerăm în continuare funcțiile $u^*(-i\log\zeta)$ și $v(-i\log\zeta)$ deduse din $u^*(\sigma)$, $v(\sigma)$ prin înlocuirea lui σ cu $-i\log\zeta$.

b) Presupunem că funcția

$$\varpi(\zeta) = v(-i\log\zeta) - u^*(-i\log\zeta) \tag{2.12}$$

este analitică în raport cu ζ în domeniul $|\zeta| > 1$ și nu admite în acest

domeniu alte singularități decît un număr finit de poli. În aceste condiții, rezolvarea problemei la limită (2.11) se reduce la rezolvarea unei ecuații diferențiale lineare de ordinul I.

În sfîrșit, pentru ca unicitatea problemei la limită (2.11) să fie asigurată, este necesar și suficient ca funcția

$$H_1(\zeta) = \exp\left\{\int [g(\zeta) + \varpi(\zeta)]\,\frac{d\zeta}{\zeta}\right\} \tag{2.13}$$

să *nu fie olomorfă* în domeniul $|\zeta| > 1$

Să observăm pentru început că avem

$$\frac{dQ}{dn} = \operatorname{Im}\left[\zeta \frac{dH}{d\zeta}\right]_{|\zeta|=1}. \tag{2.14}$$

Pe de altă parte, pe circumferința unitate putem scrie

$$u(\sigma)P + u^*(\sigma)Q = \operatorname{Im}\,[g(\zeta)H(\zeta)]_{|\zeta|=1} \tag{2.15}$$

și, deoarece $\varpi(\zeta)$ verifică relațiile

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\,[\varpi(\zeta)]_{|\zeta|=1} = \varpi(\sigma), \\ &\operatorname{Im}\,[\varpi(\zeta)]_{|\zeta|=1} = 0, \end{aligned} \tag{2.16}$$

vom avea pe circumferință

$$u(\sigma)P + v(\sigma)Q = \operatorname{Im}\left\{[g(\zeta) + \varpi(\zeta)]H(\zeta)\right\}_{|\zeta|=1}. \tag{2.17}$$

Să presupunem că funcția $\varpi(\zeta)$ admite în domeniul $|\zeta| > 1$ m poluri $\zeta = \zeta_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ de ordinele m_j de multiplicitate. În vecinătatea polului $\zeta = \zeta_j$, funcția $[g(\zeta) + \varpi(\zeta)]H(\zeta)$ va avea o dezvoltare de forma

$$[g(\zeta) + \varpi(\zeta)]H(\zeta) = -\sum_{\mu=1}^{m_j} \frac{\alpha_\mu^{(j)} + i\beta_\mu^{(j)}}{(\zeta - \zeta_j)^\mu} + \mathcal{F}(\zeta - \zeta_j). \tag{2.18}$$

Să notăm

$$\varphi_\mu^{(j)}(\sigma) = -\operatorname{Im}\left[\frac{\alpha_\mu^{(j)} + i\beta_\mu^{(j)}}{(\zeta - \zeta_j)^\mu}\right]_{|\zeta|=1} \tag{2.19}$$

și să notăm prin $\psi_\mu^{(j)}(\zeta)$ funcția olomorfă în domeniul $|\zeta| > 1$ a cărei parte imaginară ia pe circumferință valorile $\varphi_\mu^{(j)}(\sigma)$.

Această funcție se determină cu ajutorul formulei lui Schwartz:

$$\psi_\mu^{(j)}(\zeta) = -\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_\mu^{(j)}(\sigma)\,\frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta}\,d\sigma.$$

Atunci funcția analitică

$$\Psi_{\mu}^{(j)}(\zeta) = \psi_{\mu}^{(j)}(\zeta) + \frac{\alpha_{\mu}^{(j)} + i\beta_{\mu}^{(j)}}{(\zeta - \zeta_j)^{\mu}} \tag{2.20}$$

verifică pe circumferință relația

$$\operatorname{Im}\left[\Psi_{\mu}^{(j)}(\zeta)\right]_{|\zeta|=1} = 0 \tag{2.21}$$

și, dacă se notează

$$\Phi_j(\zeta) = \sum_{\mu=1}^{m_j} \Psi_{\mu}^{(j)}, \tag{2.22}$$

avem, de asemenea,

$$\operatorname{Im}\left[\Phi_j(\zeta)\right]_{\zeta|=1} = 0. \tag{2.23}$$

Fie acum $h(\zeta)$ funcția olomorfă în domeniul $|\zeta| > 1$, a cărei parte imaginară ia pe circumferință valorile $w(\sigma)$:

Este ușor de verificat că funcția

$$\zeta \frac{dH}{d\zeta} - [g(\zeta) + \varpi(\zeta)] H(\zeta) - h(\zeta) - \sum_{j=1}^{m} \Phi_j(\zeta) \tag{2.24}$$

este olomorfă în domeniul $|\zeta| > 1$, iar partea sa imaginară este nulă pe circumferință.

Rezultă de aici

$$\zeta \frac{dH}{d\zeta} - [g(\zeta) + \varpi(\zeta)] H(\zeta) - h(\zeta) - \sum_{j=1}^{m} \Phi_j(\zeta) = \text{const. reală}$$

$$\text{în } |\zeta| > 1 \tag{2.25}$$

deci determinarea funcției $H(\zeta)$ se reduce la cuadraturi.

Constantele $\alpha_{\mu}^{(j)}$, $\beta_{\mu}^{(j)}$, care intervin în expresia ecuației diferențiale (2.25), vor fi determinate astfel încît funcția $H(\zeta)$, obținută prin rezolvarea acestei ecuații, să fie olomorfă în domeniul considerat. La aceasta se adaugă condiția de olomorfie la infinit, prin care se determină constanta reală ce apare în membrul al doilea al ecuației diferențiale (2.25).

Soluția problemei la limită (2.11) este unică, dacă ecuația diferențială (2.25) făcută omogenă nu admite soluții olomorfe în domeniul $|\zeta| > 1$. Acest lucru este asigurat de condiția (2.13).

Observație. Celelalte probleme la limită obținute prin aplicarea metodei de aproximații succesive, sînt de același tip cu problema la limită (2.10).

În capitolele care urmează, vom aplica aceste rezultate la mișcarea subsonică continuă a unui gaz în jurul unui obstacol riguros eliptic.

Capitolul III

CAZUL OBSTACOLULUI ELIPTIC

§ 1. Problema la limită

Să presupunem că mișcarea gazoasă are loc în planul $Z = X + iY$ în jurul unui obstacol eliptic de ecuație :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \tag{3.1}$$

a, b fiind semi-axele elipsei.

Pentru a aplica metoda aproximațiilor succesive indicată în capitolul precedent, vom modifica în prealabil problema la limită (2.3), făcînd să intervină reprezentarea parametrică a elipsei

$$\begin{aligned} X &= a \cos \mu, \\ Y &= b \sin \mu. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Relația dintre elementele de arc din planele Z, ζ se va scrie acum

$$(a^2 \sin^2\mu + b^2 \cos^2 \mu)^{1/2} d\mu = \lambda [(1 - \nu) e^{-\tau} + 4\nu \sin^2 \sigma e^{\tau}] d\sigma, \tag{3.3}$$

iar curbura elipsei exprimată în funcție de același parametru va avea valoarea

$$K(\mu) = ab (a^2 \sin^2\mu + b^2 \cos^2 \mu)^{-3/2}. \tag{3.4}$$

Să revenim acum la condiția la limită (2.2a). Ea se va scrie

$$\frac{d\tau}{dn} = 1 - \lambda ab[(1-\nu) e^{-\tau} + 4 \sin^2 \sigma e^{\tau}] (a^2 \sin^2 \mu + b^2 \cos^2 \mu)^{-3/2} \text{ pe } |\zeta| = 1. \tag{3.5}$$

Parametrul μ se elimină destul de ușor între relațiile (3.3) și (3.5). Prin înmulțire membru cu membru se obține

$$\left(1 - \frac{d\tau}{dn}\right) d\sigma = ab (a^2 \sin^2\mu + b^2 \cos^2\mu)^{-1} d\mu \tag{3.6}$$

și de aici, prin integrare,

$$\sigma - \int \frac{d\tau}{dn} d\sigma = \int ab (a^2 \sin^2 \mu + b^2 \cos^2 \mu)^{-1} d\mu,$$

sau, avînd în vedere condițiile lui Cauchy—Riemann,

$$\sigma + \Theta = \text{arc tg} \left(\frac{a}{b} \text{tg } \mu\right). \tag{3.7}$$

Constanta de integrare se ia egală cu zero, deoarece pe axa reală $\Theta = 0$.

Din această ultimă relație valoarea lui μ este imediată.

$$\mu = \operatorname{arctg}\left[\frac{b}{a}\operatorname{tg}(\Theta+\sigma)\right], \tag{3.8}$$

iar condițiile la limită (2.3a), (2.3b) se înlocuiesc acum cu următoarea condiție la limită pentru funcțiile armonice conjugate Θ, τ :

$$\frac{d\tau}{dn} = 1 - \frac{\lambda}{a^2 b^2}\left[(1-\nu)\,e^{-\tau} + 4\nu\sin^2\sigma e^{\tau}\right]\left[\frac{a^2+b^2\,tg^2(\Theta+\sigma)}{1+tg^2(\Theta+\sigma)}\right]^{3/2} \text{ pe } |\zeta|=1 \tag{3.9}$$

la care se adaugă condiția

$$(\Theta + i\,\tau)_\infty = 0. \tag{3.10}$$

Să notăm acum

$$A\,(\Theta_0+\sigma) = \left[\frac{a^2+b^2\,tg^2(\Theta_0+\sigma)}{1+tg^2(\Theta_0+\sigma)}\right]^{3/2}. \tag{3.11}$$

Folosind în continuare metoda de aproximații succesive amintită, obținem, după identificarea coeficienților lui ν^k $(k=0,1)$, următoarele probleme dacă ne limităm la termenii în ν^2 :

Să se determine funcțiile $\Omega_0(\zeta) = \Theta_0 + i\,\tau_0$, $\Omega_1(\zeta) = \Theta_1 + i\tau_1$, olomorfe în domeniul $|\zeta| > 1$ și constantele λ_0, λ_1, astfel încît următoarele condiții la limită să fie satisfăcute :

$$\frac{d\tau_0}{dn} = 1 - \frac{\lambda_0}{a^2 b^2}\,A\,(\Theta_0+\sigma) \quad \text{pe} \quad |\zeta| = 1, \tag{3.12}$$

$$(\Theta_0 + i\,\tau_0) = 0$$

și $$\frac{d\tau_1}{dn} = \frac{\lambda_0}{a^2 b^2}\left[(1+\tau_1)\,e^{-\tau_0} - 4\sin^2\sigma\, e^{\tau_0}\right]A\,(\Theta_0+\sigma) - \frac{\lambda_0}{a^2 b^2}\left(\frac{\partial A}{\partial \Theta_0}\right)e^{-\tau_0}\,\Theta_1 -$$

$$\frac{\lambda_1}{a^2 b^2}\,A\,(\Theta_0+\sigma)\,e^{-\tau_0} \quad \text{pe}\,|\zeta| = 1, \tag{3.13}$$

$$(\Theta_1 + i\tau_1)_\infty = 0.$$

§ 2. Rezolvarea problemei la limită (3.12)

Așa cum am arătat în capitolul II, § 2, rezolvarea acestei probleme la limită revine la cunoașterea transformării conforme a exteriorului elipsei din planul $Z = X + iY$ pe exteriorul cercului unitate din planul $\zeta = \xi + i\,\eta$. Să considerăm deci funcția care efectuează această transformare conformă,

$$Z = \frac{a+b}{2}\left(\zeta + \frac{k^2}{\zeta}\right), \tag{3.14}$$

unde pentru simplificarea notației s-a pus

$$k^2 = \frac{a-b}{a+b}. \tag{3.15}$$

Atunci, conform formulei (2.8), avem

$$\Omega_0(\zeta) = -i \log\left[\frac{1}{\lambda_0}\frac{dz}{d\zeta}\right],$$

sau

$$\Omega_0(\zeta) = -i \log\left[\frac{a+b}{2\lambda_0}\left(1 - \frac{k^2}{\zeta^2}\right)\right]. \tag{3.16}$$

Condiția $(\Theta_0 + i\,\tau_0)_\infty = 0$ impune pentru λ_0 valoarea

$$\lambda_0 = \frac{a+b}{2} \tag{3.17}$$

și, prin urmare, $\Omega_0(\zeta)$ ia forma definitivă

$$\Omega_0(\zeta) = i \log\left(1 - \frac{k^2}{\zeta^2}\right), \tag{3.18}$$

determinația logaritmului fiind aleasă astfel încît

$$\Omega_0(1) = -i \log(1 - k^2)$$

§ 3. Rezolvarea problemei la limită (3.13)

Vom aplica în continuare metoda expusă în capitolul II, § 4, la rezolvarea problemei la limită rezultată din a doua aproximație.

Pentru început să observăm că funcția $\Omega_0(\zeta) = \Theta_0 + i\,\tau_0$ o dată determinată, obținem pe circumferința unitate următoarele valori pentru Θ_0, τ_0:

$$\begin{aligned} \Theta_0(\sigma) &= \operatorname{arctg}\frac{k \sin 2\sigma}{1 - k^2 \cos 2\sigma}, \\ \tau_0(\sigma) &= \log\frac{1}{\sqrt{1 - 2k^2 \cos 2\sigma + k^4}}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

de unde, printr-un calcul simplu, rezultă imediat

$$\operatorname{tg}(\Theta_0 + \sigma) = \frac{1+k^2}{1-k^2}\operatorname{tg}\sigma. \tag{3.20}$$

Se obține în continuare

$$\begin{aligned} A(\Theta_0 + \sigma) &= b^3(1+k^2)^3(1 - 2k^2\cos 2\sigma + k^4)^{-3/2}, \\ \frac{\partial A}{\partial \Theta_0} &= -6b^3k^2\frac{(1+k^2)^2}{1-k^2}(1 - 2k^2\cos 2\sigma + k^4)^{-3/2}\cdot \sin 2\sigma, \end{aligned} \tag{3.21}$$

în timp ce condiția la limită (3.13) ia forma

$$\frac{d\tau_1}{dn} = \frac{6k^2 \sin 2\sigma}{1 - 2k^2 \cos 2\sigma + k^4}\,\Theta_1 + \frac{1 - k^4}{1 - 2k^2 \cos 2\sigma + k^4}\,\tau_1 + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\frac{1 - k^4}{1 - 2k^2 \cos 2\sigma + k^4} -$$

$$- \frac{4(1 - k^4)\sin^2 \sigma}{(1 - 2k^2 \cos 2\sigma + k^4)^2} \text{ pe } |\zeta| = 1 \tag{3.22}$$

$$(\Theta_1 + i\tau_1)_\infty = 0.$$

Fie acum $g(\zeta)$ funcția olomorfă în exteriorul cercului unitate, determinată prin condiția de frontieră

$$\operatorname{Im}[g(\zeta)]_{|\xi|=1} = \frac{6k^2 \sin 2\sigma}{1 - 2k^2 \cos 2\sigma + k^4}. \tag{3.23}$$

Această funcție se determină prin aplicarea formulei lui Schwarz

$$(g(\zeta) = \frac{-i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{6k^2 \sin 2\sigma}{1 - 2k^2 \cos 2\sigma + k^4} \cdot \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta}\, d\sigma \tag{3.24}$$

și, după ce se fac calculele necesare, se obține,

$$g(\zeta) = -3\,\frac{\zeta^2 + k^2}{\zeta^2 - k^2}. \tag{3.25}$$

Funcția $g(\zeta)$ o dată determinată, avem pe circumferință

$$\operatorname{Re}[g(\zeta)]_{|\xi|=1} = -\frac{3(1 - k^4)}{1 - 2k^2 \cos 2\sigma + k^4}. \tag{3.26}$$

Se introduce în continuare funcția

$$g^*(\zeta) = -\frac{4(1 - k^4)}{(\zeta^2 - k^2)(k^2\zeta^2 - 1)}, \tag{3.27}$$

analitică în exteriorul cercului unitate. Este ușor de văzut că această funcție verifică pe circumferință relațiile

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[g^*(\zeta)]_{|\zeta|=1} &= 0, \\ \operatorname{Re}[g^*(\zeta)]_{|\zeta|=1} &= \frac{4(1 - k^4)}{1 - 2k^2 \cos 2\sigma + k^4}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

prin urmare, dacă se are în vedere notația $\Omega_1(\zeta) = \Theta_1 + i\tau_1$,

$$\operatorname{Im}\{[g(\zeta) + g^*(\zeta)]\ \Omega_1(\zeta)\}_{|\xi|=1} = \frac{6k^2 \sin 2\sigma}{1 - 2k^2 \cos 2\sigma + k^4}\,\Theta_1 + \frac{1 - k^4}{1 - 2k^2 \cos 2\sigma + k^4}\,\tau_1. \tag{3.29}$$

Să mai observăm că în jurul punctelor $\zeta_1 = \frac{1}{k}$, $\zeta_2 = -\frac{1}{k}$, puncte care sînt poli simpli pentru funcția $g^*(\zeta)$, funcția $[g(\zeta) + g^*(\zeta)]\,\Omega_1(\zeta)$ va avea în jurul acestor puncte, dezvoltări de forma

$$\begin{aligned}
[g(\zeta) + g^*(\zeta)]\,\Omega_1(\zeta) &= -\frac{\alpha_1 + i\beta_1}{\zeta - \frac{1}{k}} + \mathcal{F}\left(\zeta - \frac{1}{k}\right), \\
[g(\zeta) + g^*(\zeta)]\,\Omega_1(\zeta) &= -\frac{\alpha_2 + i\beta_2}{\zeta + \frac{1}{k}} + \mathcal{F}\left(\zeta + \frac{1}{k}\right).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Această circumstanță impune introducerea unor noi funcții

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(\zeta) &= \gamma_1(\zeta) + \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{\zeta - \frac{1}{k}}, \\
\Gamma_2(\zeta) &= \gamma_2(\zeta) + \frac{\alpha_2 + i\beta_2}{\zeta + \frac{1}{k}},
\end{aligned} \tag{3.31}$$

unde $\gamma_1(\zeta)$, $\gamma_2(\zeta)$ sînt funcții olomorfe în exteriorul cercului unitate, determinate astfel încît să verifice relațiile

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\,[\gamma_1(\zeta)]_{|\zeta|=1} &= -\operatorname{Im}\left[\frac{\alpha_1 + i\beta_1}{\zeta - \frac{1}{k}}\right]_{|\zeta|=1} \\
\operatorname{Im}\,[\gamma_2(\zeta)]_{|\zeta|=1} &= -\operatorname{Im}\left[\frac{\alpha_2 + i\beta_2}{\zeta - \frac{1}{k}}\right]_{|\zeta|=1}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Vom avea, așa dar, pe circumferință

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\,[\Gamma_1(\zeta)]_{|\zeta|=1} &= 0 \\
\operatorname{Im}\,[\Gamma_2(\zeta)]_{|\zeta|=1} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Determinarea funcțiilor $\gamma_1(\zeta)$, $\gamma_2(\zeta)$ se face imediat :

$$\begin{aligned}
\gamma_1(\zeta) &= \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\operatorname{Im}\left[\frac{\alpha_1 + i\beta_1}{\zeta - \frac{1}{k}}\right]_{|\zeta|=1} \cdot \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta}\,d\sigma, \\
\gamma_2(\zeta) &= \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} -\operatorname{Im}\left[\frac{\alpha_2 + i\beta_2}{\zeta + \frac{1}{k}}\right]_{|\zeta|=1} \cdot \frac{e^{i\sigma} + \zeta}{e^{i\sigma} - \zeta}\,d\sigma,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

de unde rezultă în cele din urmă

$$\Gamma_1(\zeta) = -\frac{k\alpha_1}{2}\frac{\zeta+k}{\zeta-k} + i\beta_1\frac{k\zeta}{\zeta-k} + \frac{\alpha_1+i\beta_1}{\zeta-\frac{1}{k}},$$
$$\Gamma_2(\zeta) = \frac{k\alpha_2}{2}\frac{\zeta-k}{\zeta+k} - i\beta_2\frac{k\zeta}{\zeta+k} + \frac{\alpha_2+i\beta_2}{\zeta+\frac{1}{k}}. \tag{3.35}$$

Fie acum $h(\zeta)$ funcția olomorfă în domeniul $|\zeta| > 1$, a cărei parte imaginară ia pe circumferința $|\zeta| = 1$, valorile :

$$\varphi(\sigma) = \left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\frac{1-k^3}{1-2k^2\cos 2\sigma + k^4} - \frac{4(1-k^4)\sin^2\sigma}{(1-2k^2\cos 2\sigma+k^4)^2}. \tag{3.36}$$

Obținem prin aplicarea formulei lui Schwarz, următoarea expresie pentru $h(\zeta)$:

$$h(\zeta) = 2i\left[\frac{1-k^2}{1+k^2}\frac{\zeta^2}{(\zeta^2-k^2)^2} - \frac{1}{(1+k^2)^2}\frac{(\zeta^2+k^2)}{\zeta^2-k^2}\right] + i\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\frac{\zeta^2+k^2}{\zeta^2-k^2}. \tag{3.37}$$

Să considerăm funcțiile

$$\zeta\frac{d\Omega_1}{d\zeta} \text{ și } [g(\zeta)+g^*(\zeta)]\,\Omega_1(\zeta) + \Gamma_1(\zeta) + \Gamma_2(\zeta) + h(\zeta).$$

Aceste funcții sînt olomorfe în exteriorul cercului unitate și au aceleași valori ale părții imaginare pe circumferință ; ca atare, în tot domeniul $|\zeta| > 1$, aceste funcții vor diferi printr-o constantă reală,

$$\frac{\zeta\,d\Omega_1}{d\zeta} = -\left[3\frac{\zeta^2+k^2}{\zeta^2-k^2} + \frac{4(1-k^4)\zeta^2}{(\zeta^2-k^2)(k^2\zeta^2-1)}\right]\Omega_1 + 2i\left[\frac{1-k^2}{1+k^2}\frac{\zeta^2}{(\zeta^2-k^2)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(1+k^2)^2}\frac{\zeta^2+k^2}{\zeta^2-k^2}\right] + i\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\frac{\zeta^2+k^2}{\zeta^2-k^2} - \frac{kd_1}{2}\frac{\zeta+k}{\zeta-k} + i\beta_1\frac{k\zeta}{\zeta-k} +$$
$$+ \frac{\alpha_1+i\beta_1}{\zeta-\frac{1}{k}} + \frac{k\alpha_2}{2}\frac{\zeta-k}{\zeta+k} - i\beta_2\frac{k\zeta}{\zeta+k} + \frac{\alpha_2+i\beta_2}{\zeta+\frac{1}{k}} + C. \tag{3.38}$$

Problema determinării funcției $\Omega_1(\zeta)$ se reduce la cuadraturi.
Ecuația diferențială (3.38) făcută omogenă are soluția :

$$\Omega_{1H}(\zeta) = \frac{\zeta^3}{(\zeta^2-k^2)(k^2\zeta^2-1)^2}. \tag{3.39}$$

Funcția $\Omega_{1H}(\zeta)$ nefiind olomorfă în domeniul $|\zeta| > 1$, problema la limită considerată are o soluție unică și din aceste considerente constanta de integrare ce apare la rezolvarea ecuației diferențiale (3.38) va fi luată egală

cu zero. Celelalte constante $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, C$ vor fi determinate astfel încît funcția $\Omega_1(\zeta)$ să fie olomorfă în domeniul $|\zeta| > 1$, inclusiv punctul de la infinit. Dacă se mai adaugă condiția suplimentară

$$\Omega_1(\infty) = 0$$

și se fac calculele necesare, obținem

$$\Omega_1(\zeta) = -\frac{i(1-k^2)^2}{(\zeta^2-k^2)(k^2\zeta^2-1)^2}\left\{\left[1+\frac{1-k^4}{2k^2}\ln\frac{1-k^2}{1+k^2}\right]\zeta^4+\left[-\frac{1}{k^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1-k^4}{2k^4}\ln\frac{1-k^2}{1+k^2}\right]\zeta^2-\frac{1-k^4}{k^3}\zeta^3\ln\frac{\zeta-k}{\zeta+k}\right\} \qquad (3.40)$$

singularitățile referitoare la polii $\zeta_1 = \frac{1}{k}$, $\zeta_2 = -\frac{1}{k}$ nefiind decît aparente.

Simultan cu determinarea funcției $\Omega_1(\zeta)$ se determină și valoarea parametrului λ_1,

$$\lambda_1 = -\frac{b}{k^2}\left[1+\frac{1-k^2}{2k^2}\ln\frac{1-k^2}{1+k^2}\right], \qquad (3.41)$$

sau, dacă avem în vedere valoarea lui k

$$\lambda_1 = -\frac{b(a+b)}{a-b}\left[1+\frac{k}{a-b}\ln\frac{b}{a}\right]; \qquad (3.41')$$

$\Omega_0(\zeta)$, $\Omega_1(\zeta)$ o dată determinate, elementele aerodinamice ale mișcării gazoase în jurul obstacolului eliptic se pot calcula ținînd seama de termenii în M_∞^2. Vom face acest lucru în capitolul următor.

Capitolul IV

STUDIUL COMPARAT AL DISTRIBUȚIEI VITEZELOR PE OBSTACOLUL ELIPTIC

§ 1. Observații preliminarii

În acest capitol vom folosi rezultatele obținute pînă acum, pentru calcularea distribuției vitezelor pe obstacolul eliptic, pentru determinarea vitezei maxime și a numărului Mach critic. Se va da de asemenea, un tablou privind variația vitezei maxime în raport cu numărul Mach și cu numărul $\chi = \frac{b}{a}$ a și b fiind semiaxele elipsei. De asemenea, va fi dată o diagramă a variației numărului Mach critic în raport cu χ.

Vom calcula apoi datele aerodinamice privind obstacolul construit *a posteriori*, plecîndu-se de la un obstacol eliptic în mișcarea incompresibilă așa cum s-a procedat de către unii cercetători, prin aplicarea directă a formulei lui C. Iacob - H.S. Tsien.

Se știe că dacă se consideră numai termenii în M_∞^2 soluția care se obține prin aplicarea metodei expuse în capitolul I coincide cu soluția mișcării gazului real, dacă se are în vedere aceeași aproximație.

Din compararea rezultatelor obținute prin aplicarea celor două metode, se obțin indicații asupra erorii ce se comite prin înlocuirea obstacolului eliptic cu obstacolul cvasi-eliptic determinat de formula de corespondență sus-amintită.

§ 2. Distribuția vitezelor pe obstacolul eliptic

Funcția $\Omega_1(\zeta) = \Theta_1 + i\,\tau_1$ o dată determinată, valorile lui Θ_1 și τ_1 pe circumferință se obțin și ele după unele calcule. Să observăm că putem scrie :

$$\Omega_1(\zeta) = -\frac{i(1-k^2)^2(\zeta^2-k^2)\,\zeta^4}{[(\zeta^2-k^2)(k^2\zeta^2-1)]^2}\left\{1+\frac{1-k^4}{2k^2}\ln\frac{1-k^2}{1+k^2}+\right.$$
$$\left.+\left[-\frac{1}{k^2}+\frac{1-k^4}{2k^4}\ln\frac{1-k^2}{1+k^2}\right]\frac{1}{\zeta^2}-\frac{1-k^4}{k^3\zeta}\ln\frac{\zeta-k}{\zeta+k}\right\} \tag{4.1}$$

și, deoarece,

$$\left[\frac{\zeta^2}{(\zeta^2-k^2)(k^2\zeta^2-1)}\right]^2_{|\zeta|=1} = \frac{1}{(1-2k^2\cos 2\sigma+k^4)^2},$$
$$\left[\ln\frac{\zeta-k}{\zeta+k}\right]_{|\zeta|=1} = \ln\frac{\sqrt{1-2k^2\cos 2\sigma+k^4}}{\sqrt{1-2k\cos\sigma+k^2}} + i\,\operatorname{arctg}\left(\frac{2k}{1-k^2}\sin\sigma\right), \tag{4.2}$$

avem pe circumferință

$$\Omega_1(e^{i\sigma}) = -i\,(1-k^2)^2\,\frac{(e^{2i\sigma}-k^2)}{(1-2k^2\cos 2\sigma+k^4)^2}\left\{1+\frac{1-k^4}{2k^2}\ln\frac{1-k^2}{1+k^2}+\right.$$
$$+\left[-\frac{1}{k^2}+\frac{1-k^4}{2k^4}\ln\frac{1-k^2}{1+k^2}\right]e^{-2i\sigma}-\frac{1-k^4}{2k^3}e^{-i\sigma}\left[\ln\frac{\sqrt{1-2k^2\cos 2\sigma+k^4}}{\sqrt{1-2k\cos\sigma+k^2}}+\right.$$
$$\left.\left.+\,i\,\operatorname{arctg}\left(\frac{2k}{1-k^2}\sin\sigma\right)\right]\right\}. \tag{4.3}$$

Separînd partea reală de partea imaginară și avînd în vedere valoarea lui k, se obține fără nici o dificultate

$$\Theta_1(\sigma) = \frac{ab^3(a+b)}{(a-b)(a^2\sin^2\sigma+b^2\cos^2\sigma)^2}\left\{\left(\ln\frac{b}{a}\right)\sin 2\sigma-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\left[b\cos\sigma\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\sin\sigma\right)+a\sin\sigma\ln\frac{\sqrt{a^2\sin^2\sigma+b^2\cos^2\sigma}}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\sigma}\right]\right\} \tag{4.4}$$

$$\tau_1(\sigma) = \frac{b^2(a+b)^2}{(a^2\sin^2\sigma+b^2\cos^2\sigma)^2}\left\{-\frac{1}{2}\cos 2\sigma-\frac{2a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}\ln\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2ab}{(a^2-b^2)^{3/2}}\left[b\cos\sigma\ln\frac{\sqrt{a^2\sin^2\sigma+b^2\cos^2\sigma}}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\sigma}-a\sin\sigma\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\sin\sigma\right)\right]\right\}. \tag{4.5}$$

Pentru determinarea vitezelor pe obstacol folosim formula (1.4)

$$U(\sigma) = \frac{V(\sigma)}{C_1 + C_2 V^2(\sigma)}.$$

Așa cum rezultă din formula (1. 9 *b*), viteza pe obstacolul din mișcarea lichidă asociată mișcării gazoase are expresia

$$V(\sigma) = 2V_\infty |\sin\sigma| e^{\tau(\sigma)}, \tag{4.6}$$

sau, dacă ne mărginim la aproximația termenilor în M_∞^2,

$$V(\sigma) = 2V_\infty |\sin\sigma| e^{\tau_0}\left[1 - \frac{M_\infty^2}{4}\tau_1\right]. \tag{4.7}$$

Pentru $U(\sigma)$ obținem în aceeași aproximație,

$$U(\sigma) = 2V_\infty |\sin\sigma| e^{\tau_0}\left\{1 - \frac{1}{4}[1 + \tau_1 - 4\sin^2\sigma e^{2\tau_0}] M_\infty^2\right\}, \tag{4.8}$$

și dacă înlocuim pe τ_0, τ_1 prin valorile lor, se obține formula care dă distribuția vitezelor pe obstacolul eliptic, în aproximația termenilor în M_∞^2 :

$$U(\sigma) = \frac{(a+b)V_\infty |\sin\sigma|}{\sqrt{a^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma}}\left\{1 - \frac{1}{4}\left[\frac{b^2(a+b)^2}{(a^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma)^2}\left(\frac{a^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma}{a^2 - b^2} - \right.\right.\right.$$

$$- \frac{2a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}\ln\frac{b}{a} + \frac{2ab}{(a^2-b^2)^{3/2}}\left[b\cos\sigma\ln\frac{\sqrt{a^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma}}{a + \sqrt{a^2-b^2}\cos\sigma} - \right.$$

$$\left.\left.\left. - a\sin\sigma\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\sin\sigma\right)\right]\right) - \frac{ab - b(a+b)\cos 2\sigma}{(a^2\sin^2\sigma + b^2\cos^2\sigma)}\left.\right]M_\infty^2\right\} \tag{4.9}$$

Vom introduce în continuare un nou parametru

$$\chi = \frac{b}{a} \tag{4.10}$$

și vom scrie forma definitivă a vitezei $U(\sigma)$ pe obstacolul eliptic din planul mișcării gazoase, ca funcție de acest nou parametru,

$$U(\sigma) = \frac{(1+\chi)V_\infty |\sin\sigma|}{\sqrt{\sin^2\sigma + \chi^2\cos^2\sigma}}\left\{1 - \frac{1}{4}\left[\frac{\chi^2(1+\chi)^2}{\sqrt{\sin^2\sigma + \chi^2\cos^2\sigma}}\left(\frac{\sin^2\sigma + \chi^2\cos^2\sigma}{1-\chi^2} - \right.\right.\right.$$

$$- \frac{2\chi^2}{(1-\chi^2)^2}\ln\chi + \frac{2\chi^2}{(1-\chi^2)^{3/2}}\cos\sigma\ln\frac{\sqrt{\sin^2\sigma + \chi^2\cos^2\sigma}}{1 + \sqrt{1-\chi^2}\cos\sigma} - $$

$$\left.\left.\left. - \frac{2\chi}{(1-\chi^2)^{3/2}}\sin\sigma\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\chi^2}}{\chi}\sin\sigma\right)\right) - \frac{\chi - \chi(1+\chi)\cos^2\sigma}{\sin^2\sigma + \chi^2\cos^2\sigma}\right]M_\infty^2\right\} \tag{4.11}$$

§ 3. Viteza maximă. Tabloul vitezelor maxime

Un calcul simplu arată că $U(\sigma)$ devine maxim o dată cu $V(\sigma)$; pe de altă parte, se știe că $V(\sigma)$ devine maxim pentru $\sigma = \frac{\pi}{2}$ sau $\sigma = \frac{3\pi}{2}$, de unde rezultă imediat valoarea vitezei maxime U_{max} ca funcție de χ,

$$U_{max} = (1+\chi)\left\{1 - \frac{1}{4}\left[\chi^2(1+\chi)^2\left(\frac{1}{1-\chi^2} - \frac{2\chi^2}{(1-\chi^2)^2}\ln\chi - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{2\chi}{(1-\chi^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{\chi^2}-1}\right) - (2\chi+\chi^2)\right]M_\infty^2\right\} \tag{4.12}$$

Să punem pentru simplificarea notației

$$P(\chi) = -\frac{1}{4}\left[\chi^2(1+\chi)^2\left(\frac{1}{1-\chi^2} - \frac{2\chi^2}{(1-\chi^2)^2}\ln\chi - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2\chi}{(1-\chi^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{\chi^2}-1}\right) - (2\chi+\chi^2)\right], \tag{4.13}$$

atunci relația (3.12) ia forma mai condensată

$$U_{max} = (1+\chi)\,V_\infty\,[1 + P(\chi)\,M_\infty^2]. \tag{4.14}$$

Această ultimă relație permite să se calculeze mărimea vitezei maxime pe obstacolul eliptic, pentru diferite valori date raportului semiaxelor și numărului Mach. Vom face calcule numerice pentru cazul cînd $\chi = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9$.
Avem de exemplu,

$$\begin{aligned} &P(0{,}1) = 0{,}050, && P(0{,}6) = 0{,}323,\\ &P(0{,}2) = 0{,}101, && P(0{,}7) = 0{,}385,\\ &P(0{,}3) = 0{,}154, && P(0{,}8) = 0{,}449,\\ &P(0{,}4) = 0{,}212, && P(0{,}9) = 0{,}512.\\ &P(0{,}5) = 0{,}267, \end{aligned} \tag{4.15}$$

Acum, dacă se dau pentru numărul lui Mach M_∞, valorile $M_\infty = 0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$, sîntem conduși la tabloul nr. 1 al raportului U_{max}/V_∞.

Tabloul nr. 1

	$M_\infty = 0$	$M_\infty = 0{,}1$	$M_\infty = 0{,}2$	$M_\infty = 0{,}3$	$M_\infty = 0{,}4$
$\chi = 0{,}1$	1,1000	1,1005	1,1022	1,1049	1,1088
$\chi = 0{,}2$	1,2000	1,2012	1,2048	1,2109	1,2193
$\chi = 0{,}3$	1,3000	1,3020	1,3080	1,3190	1,3320
$\chi = 0{,}4$	1,4000	1,4033	1,4134	1,4302	1,4537
$\chi = 0{,}5$	1,5000	1,5046	1,5167	1,5421	1,5750
$\chi = 0{,}6$	1,6000	1,6062	1,6249	1,6561	1,6998
$\chi = 0{,}7$	1,7000	1,7080	1,7320	1,7721	1,8282
$\chi = 0{,}8$	1,8000	1,8100	1,8403	1,8907	1,9612
$\chi = 0{,}9$	1,9000	1,9123	1,9495	2,0115	2,0983

§ 4. Numărul Mach critic

Se știe că viteza locală a sunetului este dată de formula

$$c^2 = c_\infty^2 - \frac{\gamma - 1}{2}(U^2 - V_\infty^2), \tag{4.16}$$

unde γ este constanta adiabatică ($\gamma = 1{,}4$ în cazul aerului).

Această relație se mai poate scrie

$$c^2 = c_\infty^2 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{U^2}{V_\infty^2} - 1\right)\right]. \tag{4.17}$$

Obținem numărul Mach critic scriind că în punctul de viteză maximă de pe obstacol, viteza este egală cu viteza locală a sunetului. Aceasta revine la eliminarea lui U_{max} între relațiile

$$U_{max}^2 = c_\infty^2 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{U_{max}^2}{V_\infty^2} - 1\right)\right], \tag{4.18}$$

$$U_{max} = (1 + \chi) V_\infty [1 + P(\chi) M_\infty^2].$$

Fie M_∞^* numărul Mach critic și să notăm $y = M_\infty^{*2}$. Eliminarea lui U_{max} între relațiile (4.18) ne conduce la rezolvarea ecuației

$$F(y) = 1{,}2\ (1 + \chi)^2 P^2(\chi) y^3 + 2{,}4\ P(\chi)\ (1 + \chi)^2 y^2 + \\ + 0{,}2\ [6(1 + \chi)^2 - 1]\, y - 1 = 0 \tag{4.19}$$

(s-a pus în ecuația obținută : $\gamma = 1{,}4$).

Din teorema lui Descartes rezultă imediat că ecuația (4.19) nu are decît o singură rădăcină reală. Această rădăcină este cuprinsă între 0 și 1. Într-adevăr, avem :

$$F(0) = -1,$$

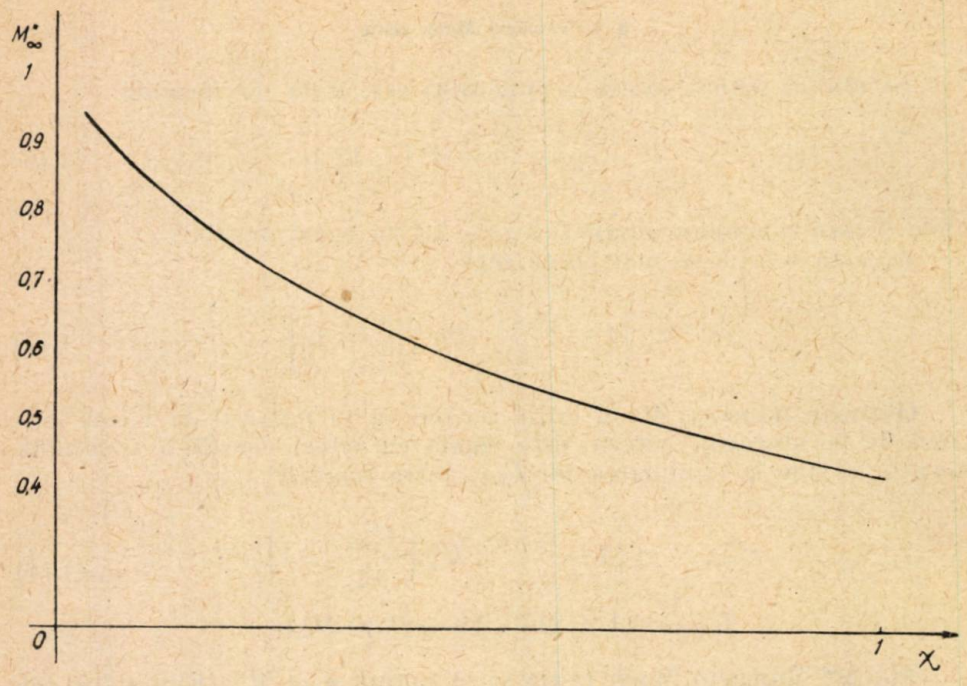
$$F(1) = 1{,}2\ \{(1 + \chi)^2 [1 + P(\chi)]^2 - 1\} > 0,$$

deoarece

$$0 < P(\chi) < \frac{7}{12}.$$

Vom determina în continuare rădăcina reală a ecuației (4.19), pentru diferite valori date parametrului χ, pentru a se putea aprecia variația numărului Mach critic în raport cu variația excentricității obstacolului eliptic.

Vom considera aceleași valori pentru χ ca și la determinarea tabloului vitezelor maxime.



Avem, de exemplu,

$$\chi = 0{,}1 \quad 0{,}0036\ y^3 + 0{,}1452\ y^2 + 1{,}2520\ y - 1 = 0 \quad y = 0{,}7349$$
$$\chi = 0{,}2 \quad 0{,}0176\ y^3 + 0{,}3490\ y^2 + 1{,}5280\ y - 1 = 0 \quad y = 0{,}5763$$
$$\chi = 0{,}3 \quad 0{,}0531\ y^3 + 0{,}6246\ y^2 + 1{,}8280\ y - 1 = 0 \quad y = 0{,}4687$$
$$\chi = 0{,}4 \quad 0{,}1057\ y^3 + 0{,}9972\ y^2 + 2{,}1520\ y - 1 = 0 \quad y = 0{,}3910$$
$$\chi = 0{,}5 \quad 0{,}1924\ y^3 + 1{,}4418\ y^2 + 2{,}5000\ y - 1 = 0 \quad y = 0{,}3330$$
$$\chi = 0{,}6 \quad 0{,}3204\ y^3 + 1{,}9845\ y^2 + 2{,}8720\ y - 1 = 0 \quad y = 0{,}2887$$
$$\chi = 0{,}7 \quad 0{,}5140\ y^3 + 2{,}6703\ y^2 + 3{,}2680\ y - 1 = 0 \quad y = 0{,}2517$$
$$\chi = 0{,}8 \quad 0{,}7838\ y^3 + 3{,}4914\ y^2 + 3{,}6880\ y - 1 = 0 \quad y = 0{,}2221$$
$$\chi = 0{,}9 \quad 1{,}1356\ y^3 + 4{,}4350\ y^2 + 4{,}0320\ y - 1 = 0 \quad y = 0{,}2012$$

În sfîrşit, pentru cazul $\chi = 1$, cînd obstacolul eliptic devine un cerc :

$$1{,}63\ y + 5{,}6\ y + 4{,}6\ y - 1 = 0, \qquad y = 0{,}1772,$$

cu $M_\infty^* = 0{,}4208$.

Rezultă de aici tabloul nr. 2 al numerelor Mach critice :

Tabloul nr. 2 *)

	$\chi = 0{,}1$	$\chi = 0{,}2$	$\chi = 0{,}3$	$\chi = 0{,}4$	$\chi = 0{,}5$	$\chi = 0{,}6$	$\chi = 0{,}7$	$\chi = 0{,}8$	$\chi = 0{,}9$
M_∞^*	0,8572	0,7591	0,6846	0,6261	0,5777	0,5373	0,5016	0,4712	0,4485

Variația numărului Mach critic în raport cu χ este dată de diagrama din figura 1.

§ 5. Mișcarea dedusă din aplicarea formulei C. Jacob-H.S.Tsien

Formula

$$Z = C_1 z + C_2 \int \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz,$$

amintită în capitolul I, permite să se deducă din mișcarea lichidă în jurul unui obstacol dat din planul z, o mișcare gazoasă în planul Z, supusă relației adiabatice a lui Ciaplîghin, obstacolul din planul mișcării gazului fiind construit *a posteriori*. Să presupunem că obstacolul din planul mișcării lichide este eliptic.

Potențialul complex al acestei mișcări se scrie

$$f(z) = \frac{V_\infty}{a-b}\left[az - b\sqrt{z^2-(a^2-b^2)}\right], \tag{4.20}$$

a,b fiind semiaxele elipsei, iar V_∞ viteza asimptotică a mișcării lichide, aceeași cu viteza asimptotică a mișcării gazoase, dedusă din sus-amintita corespondență. Vitezele asimptotice în cele două mișcări sînt paralele cu axa reală.

Prin aplicarea formulei lui C. Iacob - H.S. Tsien, obținem următoarea ecuație pentru obstacolul din planul mișcării gazului:

$$Z = C_1 z + \frac{C_2 V_\infty^2}{(a-b)^2}\left[(a^2+b^2)\bar{z} - 2ab\sqrt{\bar{z}^2-(a^2-b^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{b^2\sqrt{a^2-b^2}}{2}\ln\frac{\bar{z}-\sqrt{a^2-b^2}}{\bar{z}+\sqrt{a^2-b^2}}\right]^{**)} \tag{4.21}$$

unde

$$z = a\cos\sigma + ib\sin\sigma. \tag{4.22}$$

*) Ținînd seama numai de termenii în M_∞^2. I. Imai [22] a obținut în cazul obstacolului circular ($\chi = 1$), prin aplicarea formulei directe, $M_\infty^* = 0{,}4206$.

Studiul direct pentru acest caz a fost făcut și de C. Iacob [23], care, ținînd seama de termenii în M_∞^4, găsește numărul Mach critic $M_\infty^* = 0{,}415$.

Ambele aceste rezultate infirmă rezultatele lui Ko Tamada [8] după care metoda lui Ciaplîghin conduce la valoarea $M_\infty^* = 0{,}400$ în cazul obstacolului circular.

**) Cu unele modificări de notație, această formulă a fost dată de C. Iacob în [4]. De asemenea ea a fost dată de către *H.S. Tsien* într-un memoriu apărut în același an [5]

Însă pentru această valoare a lui z avem

$$\ln\frac{\bar{z}-\sqrt{a^2-b^2}}{\bar{z}+\sqrt{a^2-b^2}}=2\ln\frac{\sqrt{a^2\sin^2\sigma+b^2\cos^2\sigma}}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\sigma}-2i\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\sin\sigma\right),$$

$$\sqrt{\bar{z}^2-(a^2-b^2)}=b\cos\sigma-ia\sin\sigma \tag{4.23}$$

și de aici rezultă imediat ecuațiile parametrice ale obstacolului qvasieliptic din planul mișcării gazoase,

$$X(\sigma)=a\left[C_1+\frac{(a^2+b^2)C_2V_\infty^2}{(a-b)^2}-\frac{2b^2C_2V_\infty^2}{(a-b)^2}\right]\cos\sigma+$$
$$+\frac{b^2\sqrt{a^2-b^2}\,C_2V_\infty^2}{(a-b)^2}\ln\frac{\sqrt{a^2\sin^2\sigma+b^2\cos^2\sigma}}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\sigma}.$$
$$Y(\sigma)=b\left[C_1-\frac{(a^2+b^2)C_2V_\infty^2}{(a-b^2)}+\frac{2a^2C_2V_\infty^2}{(a-b)^2}\right]\sin\sigma-$$
$$-\frac{b^2\sqrt{a^2-b^2}\,C_2V_\infty^2}{(a-b)^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\sin\sigma\right), \tag{4.24}$$

sau, după o reducere imediată,

$$X(\sigma)=a\left[C_1+\frac{a+b}{a-b}C_2V_\infty^2\right]\cos\sigma+\frac{b\sqrt{a^2-b^2}\,C_2V_\infty^2}{(a-b)}\ln\frac{\sqrt{a^2\sin^2\sigma+b^2\cos^2\sigma}}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\sigma},$$

$$Y(\sigma)=b\left[C_1+\frac{a+b}{a-b}C_2V_\infty^2\right]\sin\sigma-\frac{b\sqrt{a^2-b^2}\,C_2V_\infty^2}{(a-b)^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\sin\sigma\right). \tag{4.25}$$

În sfîrșit, avîndu-se în vedere dezvoltările constantelor C_1, C_2 după puterile numărului Mach și limitîndu-ne ca de obicei la aproximația termenilor în M_∞^2

$$X(\sigma)=a\cos\sigma-\frac{1}{4}\left[\frac{2ab}{a-b}\cos\sigma+\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{(a-b)^2}\ln\frac{\sqrt{a^2\sin^2\sigma+b^2\cos^2\sigma}}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\sigma}\right]M_\infty^2,$$

$$Y(\sigma)=b\sin\sigma-\frac{1}{4}\left[\frac{2ab}{a-b}\sin\sigma-\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{(a-b)^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\sin\sigma\right)\right]M_\infty^2. \tag{4.26}$$

Datele aerodinamice care vor fi calculate în continuare, se referă la obstacolul (4.25).

§ 6. Distribuția vitezelor pe obstacolul cvasieliptic. Tabloul vitezelor maxime

Fie $U_1(\sigma)$ mărimea vitezei pe obstacolul cvasieliptic determinat de ecuațiile parametrice (4.25). Determinarea acestei viteze se face cu formula (1.4)

$$U_1(\sigma)=\frac{V_1(\sigma)}{C_1+C_2V_1^2(\sigma)},$$

unde prin $V_1(\sigma)$ s-a notat mărimea vitezei pe obstacolul eliptic din planul mișcării lichide și a cărei valoare este, după cum se știe,

$$V_1(\sigma) = (a+b)\, V_\infty \frac{|\sin\sigma|}{\sqrt{a^2 \sin^2\sigma + b^2 \cos^2\sigma}}. \tag{4.27}$$

Viteza maximă se obține, ca și în cazul precedent, pentru $\sigma = \frac{\pi}{2}$; vom da ca atare

$$V_{1\max} = (1+\chi)\, V_\infty. \tag{4.28}$$

iar pentru U_1 se obține, în aproximația termenilor în M_∞^2, valoarea

$$U_{1\max} = (1+\chi)\left[1 + \frac{1}{4}(2\chi + \chi^2) M_\infty^2\right] V_\infty. \tag{4.29}$$

Această ultimă relație permite să se calculeze tabloul vitezelor maxime pe obstacolul din planul mișcării gazoase, analog tabloului nr. 1 din § 3 al acestui capitol. Vom calcula mărimea vitezei $U_{1\max}$ pentru aceleași valori date parametrului χ și pentru aceleași valori ale numărului Mach; ca și în cazul precedent.

Vom obține pentru raportul $U_{1\max}/V_\infty$, tabloul nr. 3.

Tabloul nr. 3

	$M_\infty = 0$	$M_\infty = 0{,}1$	$M_\infty = 0{,}2$	$M_\infty = 0{,}3$	$M_\infty = 0{,}4$
$\chi = 0{,}1$	1,1000	1,1005	1,1023	1,1051	1,1092
$\chi = 0{,}2$	1,2000	1,2013	1,2052	1,2118	1,2201
$\chi = 0{,}3$	1,3000	1,3022	1,3089	1,3201	1,3358
$\chi = 0{,}4$	1,4000	1,4033	1,4134	1,4302	1,4537
$\chi = 0{,}5$	1,5000	1,5046	1,5167	1,5421	1,5750
$\chi = 0{,}6$	1,6000	1,6062	1,6249	1,6561	1,6998
$\chi = 0{,}7$	1,7000	1,7080	1,7320	1,7721	1,8282
$\chi = 0{,}8$	1,8000	1,8100	1,8403	1,8907	1,9612
$\chi = 0{,}9$	1,9000	1,9123	1,9495	2,0115	2,0983

§ 7. Determinarea noului număr Mach critic

Obținem ecuația care determină noul număr Mach critic, eliminînd, de data aceasta, $U_{1\max}$ între relațiile

$$U_{1\max} = (1+\chi)\left[1 + \frac{1}{4}(2\chi + \chi^2) M_\infty^2\right] V_\infty$$

$$U_{1\max}^2 = c_\infty^2 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{U_{1\max}^2}{V_\infty^2} - 1\right)\right]. \tag{4.30}$$

Dacă notăm cu M_∞^{**} noul număr Mach critic și punem $y = M_\infty^{**2}$, se ajunge, prin eliminarea amintită, la rezolvarea ecuației

$$0{,}3\,(1+\chi)^2 \left(\chi + \frac{\chi^2}{2}\right)^2 y^3 + 1{,}2\,(1+\chi)^2 \left(\chi + \frac{\chi^2}{2}\right) y^2 + \\ + 0{,}2\,[6\,(1+\chi)^2 - 1]\, y - 1 = 0, \tag{4.31}$$

ecuație care are o singură rădăcină reală cuprinsă între 0 și 1. Vom determina această rădăcină pentru aceleași valori date parametrului χ ca și în § 4 din acest capitol.

Vom avea ca atare

$$\chi = 0{,}1 \quad 0{,}0039\, y^3 + 0{,}1524\, y^2 + 1{,}2520\, y - 1 = 0 \quad y = 0{,}7322$$
$$\chi = 0{,}2 \quad 0{,}0209\, y^3 + 0{,}3801\, y^2 + 1{,}5280\, y - 1 = 0 \quad y = 0{,}5709$$
$$\chi = 0{,}3 \quad 0{,}0603\, y^3 + 0{,}6996\, y^2 + 1{,}8280\, y - 1 = 0 \quad y = 0{,}4624$$
$$\chi = 0{,}4 \quad 0{,}1354\, y^3 + 1{,}1289\, y^2 + 2{,}1520\, y - 1 = 0 \quad y = 0{,}3845$$
$$\chi = 0{,}5 \quad 0{,}2336\, y^3 + 1{,}6845\, y^2 + 2{,}5000\, y - 1 = 0 \quad y = 0{,}3250$$
$$\chi = 0{,}6 \quad 0{,}4672\, y^3 + 2{,}3961\, y^2 + 2{,}8720\, y - 1 = 0 \quad y = 0{,}2795$$
$$\chi = 0{,}7 \quad 0{,}7742\, y^3 + 3{,}2772\, y^2 + 3{,}2680\, y - 1 = 0 \quad y = 0{,}2436$$
$$\chi = 0{,}8 \quad 1{,}2193\, y^3 + 4{,}3545\, y^2 + 3{,}6880\, y - 1 = 0 \quad y = 0{,}2140$$
$$\chi = 0{,}9 \quad 1{,}8443\, y^3 + 5{,}6532\, y^2 + 4{,}0320\, y - 1 = 0 \quad y = 0{,}1926$$

În sfîrșit, cînd $\chi = 1$ se obține numărul Mach critic pentru obstacolul cvasicircular, dedus din mișcarea lichidă în jurul unui cerc :

$$2{,}7y^3 + 7{,}2y^2 + 4{,}6y - 1 = 0, \qquad y = 0{,}1690,$$

cu $M_\infty^{**} = 0{,}4118$.

Pentru valorile noilor numere Mach critice se obține tabloul nr. 4.

Tabloul nr. 4 *)

	$\chi=0{,}1$	$\chi=0{,}2$	$\chi=0{,}3$	$\chi=0{,}4$	$\chi=0{,}5$	$\chi=0{,}6$	$\chi=0{,}7$	$\chi=0{,}8$	$\chi=0{,}9$
M_∞^{**}	0,8555	0,7555	0,6800	0,6200	0,5701	0,5286	0,4935	0,4613	0,4388

Reamintim că în calculele de mai sus, s-a ținut seamă numai de termenii în M_∞^2. În particular, în cazul obstacolului cvasicircular, cînd deci $\chi = 1$, avem $M_\infty^{**} = 0{,}411$, în timp ce dacă se face calculul exact așa cum a procedat K o T a m a d a, se găsește $M_\infty^{**} = 0{,}400$. În realitate, această valoare a numărului Mach critic nu poate fi atribuită mișcării în jurul obstacolului riguros circular, ci mișcării în jurul obstacolului cvasicircular, dedus prin aplicarea corespondenței C. Iacob-H. S. Tsien.

*) Ar fi interesant de comparat aceste rezultate numerice, cu cele date de H.S. T s i e n [5]. În calculele lui H.S. T s i e n figurează raportul semiaxelor obstacolului cvasieliptic, obținut prin aplicarea formulei (1.2). Din contra, în calculele noastre figurează raportul χ al semiaxelor elipsei din planul mișcării lichide, pentru a putea compara rezultatele obținute în § 6 — 7 din acest capitol cu cele obținute în § 3—4. Nu am putut consulta decît din recenzii lucrarea sus-amintită a lui H.S. T s i e n.

О ПОПРАВКАХ НА СЖИМАЕМОСТЬ ПРИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДОЗВУКОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ. СЛУЧАЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРЕПЯТСТВИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Годографический метод С. А. Чаплыгина корректно применяется к исследованию плоского, непрерывного и безвихревого движения газа при дозвуковом режиме, в случае обтекания заданного препятствия (Г). Газ подчиняется соотношению плотность-скорость (1.1). Формула:

$$dZ = C_1\,dz + C_2\sqrt{\left(\frac{df}{dz}\right)^2}\,dz$$

устанавливает соответствие между движением вокруг (Г) в плоскости Z и жидкостным движением вокруг препятствия (Γ_1), неизвестного заранее, в плоскости Z. Если

$$Z = \lambda\zeta + \text{голоморфная функция от } |\zeta| > 1$$

представляет собой функцию, отображающую конформно внешность (Γ_1) на внешность единичного круга в плоскости (ζ), и если обозначить

$$\Omega(\zeta) = \Theta + i\tau = i\,\log\,(\lambda^{-1}\,dz/d\zeta),$$

то определение функции $\Omega(z)$, голоморфной в области $|\zeta| > 1$, сводится к решению нелинейной граничной задачи:

$$\frac{d\tau}{dn} = 1 - \lambda\,[C_1\,e^{-\tau} + 4\,C_2V_\infty^2\,\sin^2\sigma\,e^{\tau}]\,K(S) \text{ на } |\zeta| = 1,$$

$$dS = \lambda\,[C_1\,e^{-\tau} + 4\,C_2V_\infty^2\,\sin^2\sigma\,e^{\tau}]\,d\sigma,$$
$$\Omega(\infty) = 0,$$

где $dS, d\sigma$ обозначают элементы дуги для препятствия (Г), соответственно для единичной окружности в плоскости (ζ), а $K(S)$ кривизну препятствия (Г).

Если искать для $\Omega(\zeta)$, $S(\sigma)$, λ разложения вида (2.3), то приближение нулевого порядка приводит к нелинейной граничной задаче:

$$\frac{d\tau_0}{dn} = 1 - \lambda_0\,e^{-\tau_0}\,K(S_0) \text{ на } |\zeta| = 1$$

$$dS_0 = \lambda_0\,e^{-\tau}\,d\sigma$$
$$\Omega_0(\infty) = 0$$

со следующим решением:

$$\Omega_0(\zeta) = -\,i\,\log\,(\lambda_0^{-1}\,dz_0/d\zeta),$$

где на этот раз $z_0(\zeta)$ представляет собой функцию, при посредстве которой производится конформное преобразование внешней к (Г) области на внешность единичного круга в плоскости (ζ).

Вторая и остальные граничные задачи, возникающие при применении метода последовательных приближений, приводят к определению функций $\Omega_k(\zeta) = \Theta_k + i\,\tau_k$ голоморфных в $|\zeta| > 1$, при граничных условиях следующей формы

$$\frac{d\tau_k}{dn} = u_k(\sigma)\,\Theta_k + v_k(\sigma)\,\tau_k + w_k(\sigma) \text{ на } |\zeta| = 1$$

$$(\Theta_k + i\,\tau_k)\,\infty = 0,$$

где $u_k(\sigma)$, $v_k(\sigma)$, $w_k(\sigma)$ непрерывны на единичной окружности, периодичны с периодом 2π, и разлагаются в тригонометрические равномерно сходящиеся ряды.

Пусть требуется определить функцию $H(\zeta) = P + i\,Q$, голоморфную в $|\zeta| > 1$ при граничном условии

$$\frac{dQ}{dn} = u(\sigma)\,P + v(\delta)Q + w(\sigma) \text{ на } |\zeta| = 1.$$

Пусть $u^* + iu$ будет голоморфной функцией в $|\zeta| > 1$, мнимая часть которой принимает на окружности значения $u(\sigma)$ и пусть $u^*(\sigma)$ значение функции u^* на окружности. Если существует мероморфная функция в $|\zeta| > 1$, равная $v(\sigma) - u^*(\sigma)$ на окружности, то определение функции $H(\zeta) = P + iQ$ сводится к квадратурам.

Эти теоретические результаты прилагаются к исследованию непрерывного движения газа, обтекающего эллиптическое препятствие. Если берется приближение в M_∞^2 точного решения в этом последнем случае, то для $\Omega_0(\zeta)$, $\Omega_1(\zeta)$, получаются значения, данные в (3.18) и (3.40).

После определения функций $\Omega_1(\zeta)$, $\Omega_1(\zeta)$ переходят к определению аэродинамических элементов движения газа, обтекающего эллиптическое препятствие.

Для распределения скоростей на препятствии в вышеуказанном приближении выводится формула (4.11), в то время как максимальная скорость на препятствии дается формулой (4.12). Эта последняя формула позволяет составить таблицу максимальных скоростей при различных значениях отношения полуосей эллипса χ (таблица 1).

Далее определяется для движения критическое число Маха и дается таблица критических чисел Маха для тех же значений χ, как и в предыдущем случае (таблица 2). Приводится также и изменения критического числа Маха в зависимости от χ (таблица 3).

В последнем параграфе работы рассматривается движение газа, приведенное посредством прямого применения формулы (1.2) к движению жидкости, обтекающей эллиптическое препятствие. Таким образом получается движение газа, подчиняющееся соотношению плотность—скорость (1.1) при обтекании квазиэллиптического препятствия, параметрические уравнения которого даются выражениями (4.25). Вычисление аэродинамических элементов для этого последнего движения (таблицы 4 и 5) позволяет сравнивать результаты, полученные

при корректном применении годографического метода С. А. Чаплыгина, и результаты, полученные при прямом применении формулы (1.2), как это делали Х. С. Цзин [5], К. Якоб]4] и другие.

SUR LES CORRECTIONS DE COMPRESSIBILITÉ AUX MOUVEMENTS CONTINUS SUBSONIQUES. CAS DE L'OBSTACLE ELLIPTIQUE

(RÉSUMÉ)

La méthode hodographique de S. A. Tchapliguine est appliquée d'une manière correcte à l'étude du mouvement plan, continu et irrotationnel, en régime subsonique d'un gaz, autour d'un obstacle donné à l'avance (Γ). Le gaz satisfait à la relation densité-vitesse (1.1). La formule

$$dZ = C_1\, dz + C_2 \overline{\left(\frac{df}{dz}\right)}^2 dz$$

réalise une correspondance entre le mouvement autour de (Γ) du plan Z. et un mouvement liquide autour d'un obstacle (Γ_1), *à-priori inconnu*, du plan z. Si :

$$Z = \lambda\zeta \; + \text{ fonction holomorphe en } |\zeta| > 1$$

est la fonction qui donne la transformation conforme de l'extérieur de (Γ_1) sur l'extérieur du cercle-unité du plan (ζ), et si l'on note :

$$\Omega(\zeta) = \Theta + i\tau = -i \log (\lambda^{-1}\, dz/d\zeta)$$

alors la détermination de la fonction $\Omega(\zeta)$, holomorphe dans le domaine $|\zeta| > 1$, se réduit à la résolution du problème aux limites non-linéaire :

$$\frac{d\tau}{dn} = 1 - \lambda\,[C_1 e^{-\tau} + 4\,C_2\, V_\infty^2 \sin^2\sigma\, e^{\tau}]\, K(S) \qquad \text{sur } |\zeta| = 1$$

$$dS = \lambda\,[C_1 e^{-\tau} + 4C_2\, V_\infty^2 \sin^2\sigma\, e^{\tau}]\, d\sigma$$

$$\Omega(\infty) = 0$$

où l'on a noté dS, $d\sigma$ les éléments d'arc pour les obstacles (Γ), respectivement le cercle-unité de (ζ), et par $K(S)$ la courbure de l'obstacle (Γ).

En cherchant pour $\Omega(\zeta)$, $S(\sigma)$, λ des développements de la forme (2.3), l'approximation d'ordre zéro conduit au problème aux limites nonlinéaire

$$\frac{d\tau_0}{dn} = 1 - \lambda_0 e^{-\tau_0} K(S_0) \qquad \text{sur } |\zeta| = 1$$

$$dS_0 = \lambda_0 e^{-\tau_0}\, d\sigma$$

$$\Omega_0(\infty) = 0$$

dont la solution est :

$$\Omega_0(\zeta) = -i \log (\lambda_0^{-1}\, dz_0/d\zeta)$$

dans laquelle, cette fois-ci, $z_0(\zeta)$ est la fonction par l'intermédiaire de laquelle on effectue la transformation conforme de l'extérieur de (Γ) sur l'extérieur du cercle unité du plan (ζ).

Le second et le reste des problèmes aux limites résultant de l'application de la méthode des approximations successives, conduisent à la détermination de certaines fonctions $\Omega_K(\zeta) = \Theta_K + i\,\tau_K$ holomorphes en $|\zeta| > 1$, par des conditions aux limites de la forme :

$$\frac{d\tau_K}{dn} = U_K(\sigma)\,\Theta_K + V_K(\sigma)\,\tau_K + W_K(\sigma) \qquad \text{sur } |\zeta| = 1$$

$$(\Theta_K + i\,\tau_K)_\infty = 0$$

où $U_K(\sigma)$,$V_K(\sigma)$, $W_K(\sigma)$ sontcontinus sur la circonférence-unité, périodiques ayant par période 2π , développables en séries trigonométriques uniformément convergentes.

Soit à déterminer une fonction $H(\zeta) = P + iQ$ holomorphe en $|\zeta| > 1$, par la condition aux limites :

$$\frac{dQ}{dn} = u(\sigma)\,P + V(\sigma)Q + W(\sigma) \qquad \text{sur } |\zeta| = 1$$

Soit $u^\star + iu$ la fonction holomorphe $|\zeta| > 1$ dont la partie imaginaire prend les valeurs $u(\sigma)$ sur la circonférence et soit $u^\star(\sigma)$ la valeur de la fonction $u^\star$ sur la circonférence. S'il existe une fonction méromorphe en $|\zeta| > 1$ qui soit égale à $v(\sigma) - {}^\star u(\sigma)$ sur la circonférence, alors la détermination de la fonction $H(\zeta) = P + iQ$ se réduit à des quadratures.

Ces résultats théoriques sont appliqués à l'étude du mouvement continu gazeux autour d'un obstacle elliptique. Si l'on considère l'approximation en M_∞^2 de la solution exacte dans ce dernier cas, on obtient pour $\Omega_0(\zeta)$, $\Omega_1(\zeta)$ les valeurs données par (3.18) et (3.40).

Les fonctions $\Omega_0(\zeta)$, $\Omega_1(\zeta)$ une fois déterminées, on passe à la détermination des éléments aérodynamiques du mouvement gazeux autour de l'obstacle elliptique.

Pour la distribution des vitesses sur l'obstacle, dans l'approximation en question, on obtient la formule (4.11) alors que la vitesse maximum sur l'obstacle est donnée par la formule (4.12). Cette dernière formule permet de construire le tableau des vitesses maxima pour différentes valeurs de χ, le rapport des demi-axes de l'ellipse (tableau n° 1).

Par la suite, on détermine le nombre critique de Mach du mouvement et l'on donne le tableau des nombres critiques de Mach. Pour les mêmes valeurs de χ que dans le cas précedent (tableau n° 2).Est également donnée la variation du nombre critique de Mach par rapport à χ (tableau n° 3).

Dans le dernier paragraphe du travail on considère le mouvement gazeux, déduit par l'application directe de la formule (1.2) au mouvement liquide autour de l'obstacle elliptique. On obtient ainsi un mouvement

gazeux soumis à la relation densité-vitesse (1.1), autour d'un obstacle quasi-elliptique dont les équations paramétriques sont données par les relations (4.25). Le calcul des éléments aérodynamiques pour ce dernier mouvement (tableaux nos 4 et 5) permet une comparaison entre les résultats obtenus par l'application correcte de la méthode hodographique de S. A. Tchapliguine et ceux que l'on obtient par l'application directe de la formule (1.2), ainsi qu'ont procédé H. S. Tsien [5], C. Jacob [4] et d'autres.

BIBLIOGRAFIE

1. S.A. Ciaplîghin, *O gazovîh struiah.* Analele Universității din Moscova, 1902, t. 21, p. 1.
2. D. Riabouchinsky, *Mouvement d'une fluide incompressible autour d'un obstacle.* C.R. de l'Académie des Sciences de Paris, 1932, t. 194, p. 1215.
3. B. Demtchenko, *Sur la relation entré la dynamique des fluides compressibles et celle des fluides incompressibles* Publ. Univ. de Belgrade, 1933, t. II, p. 85.
4. C. Jacob, *Sur les mouvements lents des fluides parfais compressibles.* Portugaliae Mathematica, 1939, t. I, p. 209.
5. H.S. Tsien, *Two-dimensional Subsonic Flow of a Compressible Fluid.* J. of the Aeronautical Sciences, 1939, t. 7, p. 399.
6. Th. von Kármán, *Compressibility Effects in Aerodynamics,* J. of the Aeronautical Sciences, 1941, t. 8, p. 377.
7. Jean Leray, *Mécanique des fluides compressibles.* Centre d'Etudes sup. de Mécanique des fluides. Paris, 1946 (Curs litografiat).
8. Ko Tamada, *Application of the Hodograph Method to a Flow of a Compressible Fluid past a Circular Cylinder.* Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 1940, t. 22, p. 208.
9. I. Imai, *On the Flow of a Compressible Fluid past a Circular Cylinder.* Proc.Phys. Math. Soc. Japan, 1941, t. 23, p. 180.
10. S.A. Hristianovici, *Mișcarea gazelor în jurul corpurilor, la mari viteze subsonice.* Publicațiile Institutului Central de Aero-și Hidrodinamică, Moscova, 1940, nr. 481.
11. C. C. Lin, *On a Extension of the Von Kármán-Tsien Method to Two-dimensional Subsonic Flow with Circulation around Closed Profiles.* Quarterly of Applied Mathematics, 1946, t. 4, p. 291.
12. A. Gelbart, Technical Notes N.A.C.A. 1947, nr. 1170.
13. N.A. Slioskin, *On the Problem of a Motion of a Gas in Two Dimensions.* DAN, SSSR 1936, t. 3, p. 419.
14. C. Jacob, *Sur l'écoulement lent d'un fluide parfait compressible autour d'un cylindre circulaire.* Mathematica, 1941, t. XVII, p. 1.
15. L. Bers, *An Existence Theorem in Two-dimensional Gas Dynamics.* Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 1949, t. I, p. 41.
16. — *Existence and Uniqueness of a Subsonic Flow past a Given Profile.* Communications on Pure and Applied Mathematics, 1954, t. VII, p. 441.
17. — *Results ans Conjectures in the Mathematical Theory of Subsonic and Transonic Gas Flow.* Communications on Pure and Applied Mathematics, 1954, t. VII, p. 79.
18. J. Leray et J. Schauder, *Topologie et équations fonctionnelles.* Ann. Sc. Ecole Normale Sup. 1934, t. 51, p. 45.
19. J. Schauder, *Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* Math. Z., 1934, t. 38, p. 623.
20. C. Jacob, *Remarques sur la méthode approchée de Tchapliguine.* C.R. de l'Académie des Sciences de Paris, 1946, t. 223, p. 714.
21. — *Introducere matematică în mecanica fluidelor.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1952.
22. I. Imai, *On the Flow of a Compressible Fluid past a Circular Cylinder.* Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 1941, t. 23, 180.
23. C. Iacob, *Studiul comparat al variantelor metodei de aproximație a lui S.A.Ciaplîghin în problema mișcării subsonice în jurul cilindrului circular.* Bul. Științ. Acad. R.P.R., Secția de științe matematice și fizice, t. III, nr. 3 iulie-septembrie 1951, p. 293.

24. S.G. Hooker, *The Two-dimensional Flow of Compressible Fluid at Subsonic Speeds past Elliptic Cylinders.* British A.R.C.R. & M, 1936, nr. 1648.
25. C. Kaplam, *Two-dimensional Subsonic Compressible Flow past Elliptic Cylinders.* N.A.C.A. Tech. Rep., 1938, nr. 624.
26. S. Tomotika and Ko Tamada, *Studies on the Subsonic Flow of a Compressible Fluid past an Elliptic Cylinders.* Report Aeron. Res. Inst. Tokyo Imp. Univ., 1944, nr. 201.
27. I. Imai a. T. Aihara, *On the Subsonic Flow of a Compressible Fluid past an Elliptic Cylinders.* Report Aeron. Res. Inst. Tokyo Imp. Univ., 1940, nr. 194.
28. I. Filimon, *Sur le mouvement plan, subsonique autour d'un obstacle donné.* C.R. de l'Academie des Sciences de Paris, 1957, t. 244, p. 2133.
29. — *Asupra corecțiilor de compresibilitate la mișcări continue subsonice în jurul unui obstacol dat.* Bul. Ştiinț. Acad. R.P.R.. Secția de ştiințe matematice şi fizice, t. IX, nr. 2, 1957, p. 433
30. — *L'application correcte de la méthode de Tchapliguine aux mouvements gazeus subsoniques autour d'un obstacle elliptique* Bull. Math. de la Soc. Math. et Phys. de la R.P.R., t. I (49), nr.3, 1957, p. 269.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Tomul VIII 1957

INDEX ALFABETIC

	nr.	pag.
BARBILIAN D., Argumentul lui Euclid asupra infinităţii numerelor prime . .	1—2	7
CIUCU GEORGE, Proprietăţi ergodice ale unor lanţuri cu legături complete .	3—4	413
DINCULEANU NICOLAE, Spaţii Orlicz de cîmpuri de vectori	3—4	343
DOBRESCU EUGEN V., Contribuţii la o analiză infinitezimală bidimensională	1—2	103
DUMITRAŞ VIOREL, Determinarea spaţiilor A_3 cu grup tranzitiv $\mathfrak{G}_7$ . . .	1—2	183
DUMITRAŞ VIOREL, Grupurile de mişcare cu şase parametri ale spaţiilor A_3	3—4	303
FILIMON IOAN, Asupra corecţiilor de compresibilitate la mişcări continue subsonice. Cazul obstacolului eliptic	3—4	467
POPOVICI CONSTANTIN P., Asupra unicităţii descompunerii în factori primi în inelele de întregi ai lui Dirichlet	1—2	73
POSTELNICU TIBERIU Studiul spaţiilor A_2 cu conexiune afină liniară local euclidiene	3—4	279
ROŞCULEŢ MARCEL N., Relaţii integrale care caracterizează soluţiile unor ecuaţii cu derivate parţiale de ordin finit sau infinit	1—2	131
SINGER IVAN, Asupra unicităţii elementului de cea mai bună aproximaţie în spaţii Banach oarecare	1—2	235
TELEMAN C., O clasă specială de funcţii multiforme pe o suprafaţă riemanniană închisă	1—2	163
VAIDA DRAGOŞ, Caracterizarea structurilor modulare prin sisteme cu axiome independente	3—4	457
VRĂNCEANU G., Tensori armonici şi grupuri de mişcare ale unui spaţiu Riemann	3—4	257
VRĂNCEANU G.G. Determinarea transformărilor punctuale de speţă trei . .	3—4	447

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Tome VIII 1957

INDEX ALPHABÉTIQUE

	n°	Page
BARBILIAN D., L'argument d'Euclide pour l'infinité des nombres premiers	1—2	7
CIUCU GEORGE, Propriétés ergodiques de certaines chaînes aux liaisons complètes	3—4	413
DINCULEANU NICOLAE, Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs	3—4	343
DOBRESCU V. EUGEN, Contribution à une analyse infinitésimale bidimensionnelle	1—2	103
DUMITRAŞ VIOREL, Détermination des espaces A_3 à groupe transitif $\mathfrak{G}_7$	1—2	183
DUMITRAŞ VIOREL, Les groupes de mouvement à 6 paramètres des espaces A_3	3—4	303
FILIMON IOAN, Sur les corrections de compressibilité aux mouvements continus subsoniques. Cas de l'obstacle elliptique	3—4	467
POPOVICI P. CONSTANTIN, Sur l'unicité de la decomposition en facteurs premiers dans les anneaux des entiers de Dirichlet	1—2	73
POSTELNICU T., Étude des espaces A_2 à connexion affine linéaire, localement euclidiens	3—4	279
ROŞCULEŢ N. MARCEL, Relations intégrales caractérisant les solutions de certaines équations aux dérivées partielles, d'ordre fini ou infini	1—2	131
SINGER IVAN' Sur l'unicité de l'élément de meilleure approximation dans des espaces de Banach quelconques	1—2	235
TELEMAN C., Une classe de fonctions analytiques d'une surface de Riemann, généralisant les intégrales abéliennes	1—2	163
VAIDA DRAGOŞ, Caractérisation des structures modulaires par des systèmes à axiomes indépendants	3—4	457
VRĂNCEANU G., Tenseurs harmoniques et groupes de mouvements d'un espace de Riemann	3—4	257
VRĂNCEANU G. G., Détermination des transformations ponctuelles d'espèce trois	3—4	447

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Том VIII 1957

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

	№	Стр.
БАРБИЛИАН Д., Аргумент Евклида для бесконечности простых чисел . .	1—2	7
ВАЙДА Д., Характеристика модулярных структур посредством систем независимых аксиом	3—4	457
ВРЭНЧАНУ Г., Гармонические тензоры и группы движения пространства Римана	3—4	257
ВРЭНЧАНУ Г., Определение точечных преобразований третьего рода . .	3—4	447
ДИНКУЛЯНУ Н., Пространства Орлича векторных полей	3—4	343
ДОБРЕСКУ Е. В., К вопросу о двумерном анализе	1—2	103
ДУМИТРАШ В., Определение пространств A_3 с группой G_7	1—2	183
ДУМИТРАШ В., 6-параметрические группы движения пространств A_3 .	3—4	303
ЗИНГЕР И., О единственности элемента наилучшего приближения в любых банаховых пространствах	1—2	235
ПОПОВИЧ К. П., Об однозначности разложения на простые множители в кольцах целых чисел Дирихле	1—2	73
ПОСТЕЛЬНИКУ Т., Исследование локально-эвклидовых пространств A_2 с линейной аффинной связностью	3—4	279
РОШКУЛЕЦ М. Н., Интегральные соотношения, характеризующие решения некоторых уравнений с частными производными конечного или бесконечного порядка	1—2	131
ТЕЛЕМАН К., Об одном классе аналитических функций на римановой поверхности, обобщающем абелевы интегралы	1—2	163
ФИЛИМОН И., О поправках на сжимаемость при непрерывных дозвуковых движениях. Случай эллиптического препятствия	3—4	467
ЧУКУ Г., Эргодические свойства некоторых цепей с полными связями . .	3—4	413

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POȘTALE,
PRIN FACTORII POȘTALI ȘI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN INTREPRINDERI ȘI INSTITUȚII

MŰSZAKI KÖNYVTÁR-ORSZÁGOS
1883